UE 4

Cours 1b:

PROBABILITES ET EVENEMENTS

- *Population* ⟶ ensemble d'objets, d'êtres vivants (population réelle) ou d'objets abstraits (population fictive) de même nature

- *Echantillon* ⟶ sous ensemble d'une population utilisé lors d'une étude statistique

Etude statistique sur un échantillon

2 problèmes pour les études sur échantillon

La représentativité

→ On n'observe que partiellement la caractéristique.
Peut-on extrapoler à la population ?

La confiance

→ Mesures différentes pour chaque échantillon constitué d'individus différents.

DEFINITIONS

- *Ensemble* ⟶ liste, collection d'objets définis

- *Elément* ⟶ objet d'un ensemble

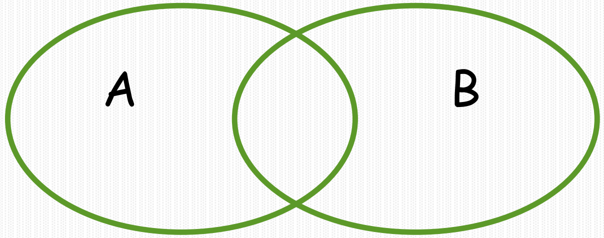
- *Ensemble défini en extension = Explicite*
  → en listant tous ses éléments : A = [1; 2; 3; 4; 5; 6]

- *Ensemble défini en compréhension = Implicite*
  → en donnant la (les) propriété(s) qui caractérise(nt) ses éléments : A = [les résultats possibles du lancer d'un dé seul]

Opérations

- **Union**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



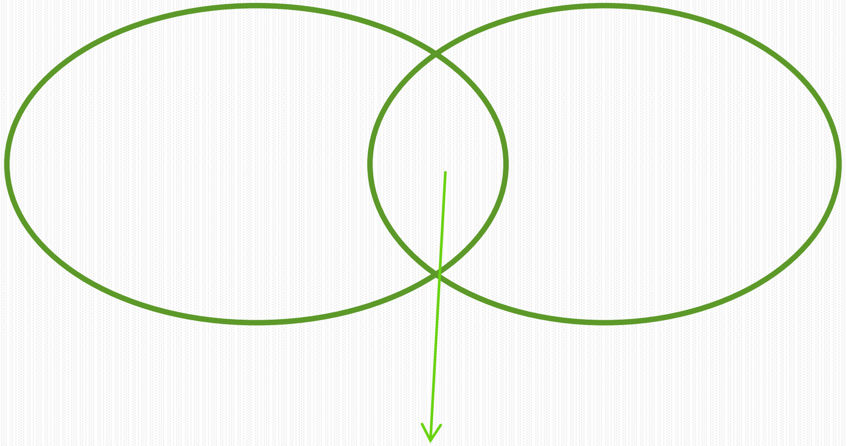
A U B

Intersection

Notée $A \cap B$

Si $A \cap B$ = ∅ alors A et B sont disjoints ou incompatibles

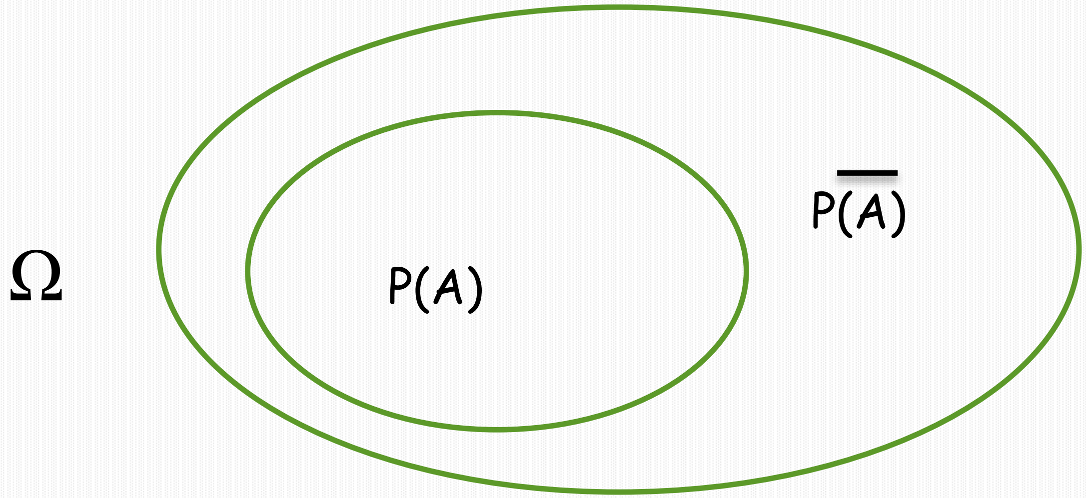
Sa probabilité est $P(A \cap B)$



$A \cap B$

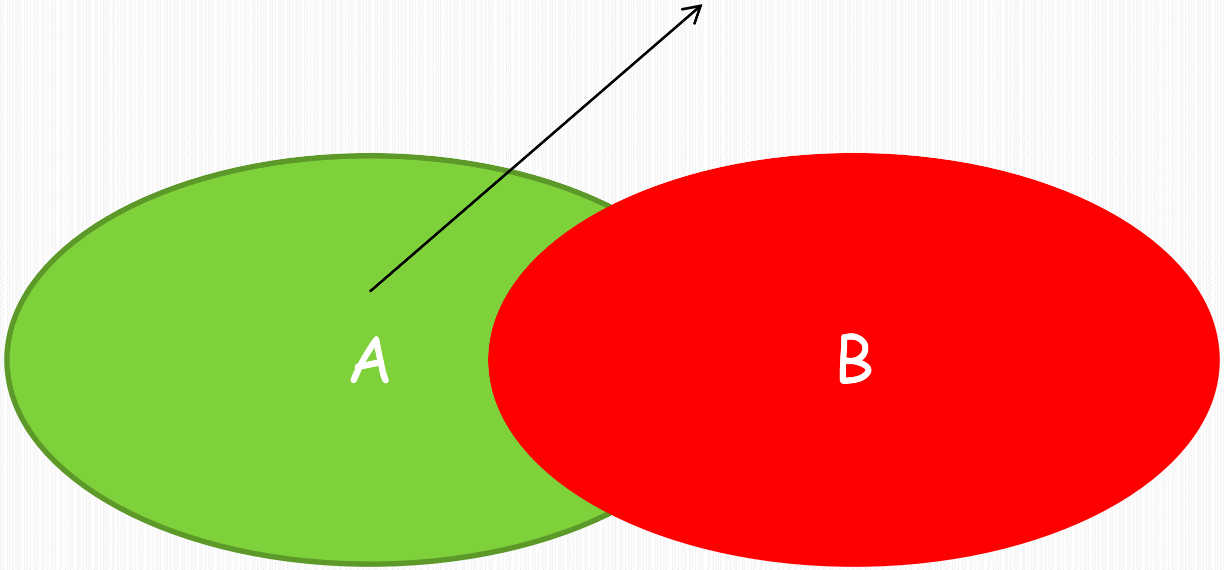
Complémentaire

$$P(\overline{A}) = P(\complement A) = 1 - P(A)$$



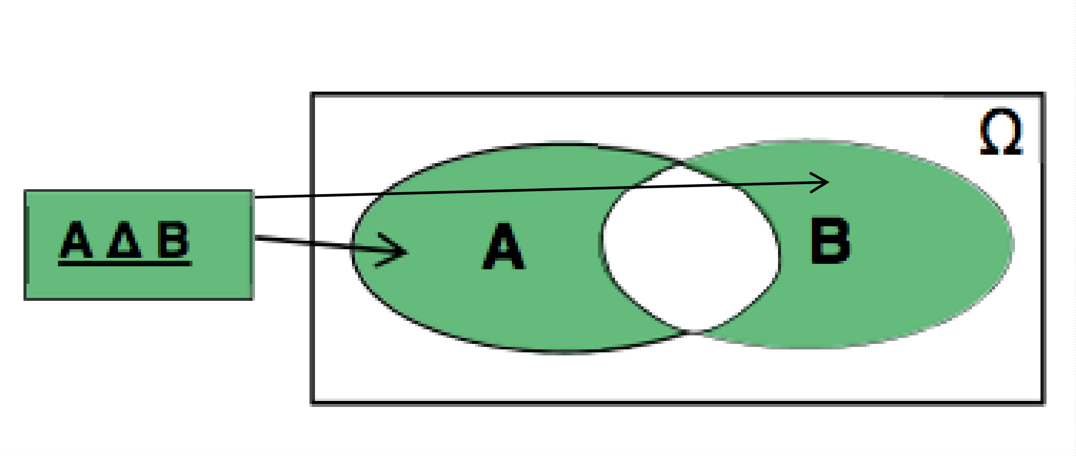
Différence

Notée **A-B**



Différence symétrique

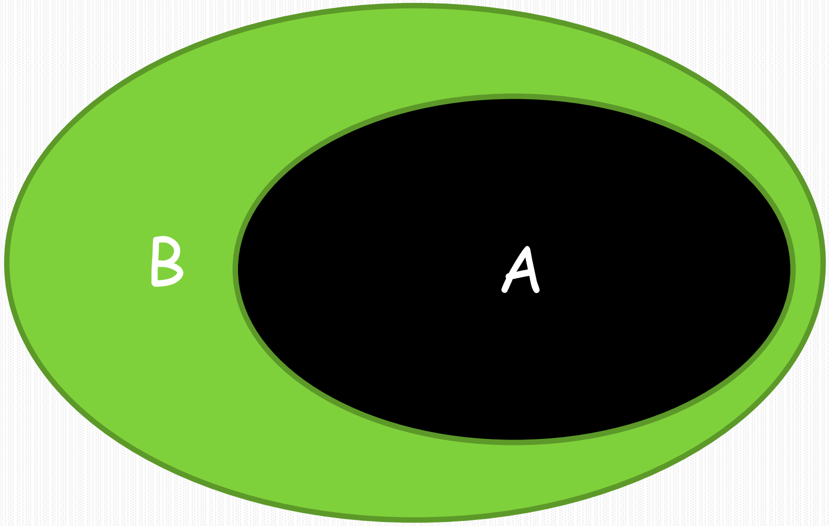
Notée **AΔB**



Inclusion

Notée $A \subset B$

Si $A \subset B$ alors P(A)≤P(B)



Ensemble fini

- **Contient un nombre fini d'éléments**
- Toujours dénombrable !
- Ensemble vide = Ensemble fini
- A= [a1; a2; a3] est un ensemble fini

Ensemble infini

- **Contient un nombre infini d'éléments**

- Peut être → dénombrable : chaque élément correspond à un unique entier naturel (Ex : $\mathbb{N}$ = les entiers naturels)

  → indénombrable : non dénombrable (Ex : $\mathbb{R}$ = les nombres réels)

ENSEMBLE PRODUIT

- **= Ensemble AxB**

- Ensemble des couples ordonnés (a;b) où :

  → a = élément de A

  → b = élément de B

Ex : Soient A=[a; b; c] et B=[1; 2]

AxB = [(a;1),(a;2),(b;1),(b;2),(c;1),(c;2)]

- Produit cartésien = produit de n ensembles

  → un élément de ce produit s'appelle un n-uplet

Cardinal d'un ensemble

- Noté **Card(E)**
- Nombre d'éléments que contient un ensemble dénombrable
- Pour un ensemble produit:

$$Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$$

FAMILLES D'ENSEMBLE

- L'ensemble des sous-ensembles de A constitue la **famille des parties de A**
- Nombre de parties d'un ensemble à p éléments = 2^p
- **Partition de A** = subdivision de A en sous-ensembles disjoints dont la réunion forme A

  A = A1 U A2 U A3 U A4 U A5

QCM TIME

QCM TIME

QCM 1 : Donnez les vraies propositions.

A) Un ensemble en compréhension (implicite) est défini en listant tous ses éléments

B) L'union de 2 ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B

C) Un ensemble fini est toujours dénombrable

D) Un ensemble produit est le produit de n ensembles dont un élément est nommé n-uplet

E) Les propositions A,B,C et D sont fausses

QCM TIME

Réponse: **C**

QCM 1 : Donnez les vraies propositions.

A) Un ensemble en ~~compréhension (implicite)~~ est défini en listant tous ses éléments EN EXTENSION (explicite)

B) L'union de 2 ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant ~~à A et à B~~ à A OU à B !!!

C) Un ensemble fini est toujours dénombrable

D) Un ~~ensemble produit~~ est le produit de n ensembles dont un élément est nommé n-uplet Un produit cartésien

E) Les propositions A,B,C et D sont fausses

QCM TIME

QCM 2 : Donnez les vraies propositions.

A) La différence de 2 ensembles A et B, notée A Δ B, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A sans appartenir à B.

B) La probabilité du complémentaire de A est $\overline{P}(A) = 1 - P(A)$

C) Un ensemble infini peut être dénombrable ($\mathbb{N}$) ou indénombrable ($\mathbb{R}$)

D) Pour le lancer d'une pièce, épreuve nommée A , la famille des parties de A est {∅; {pile}; {face}; {pile, face} }

E) Les propositions A,B,C et D sont fausses

QCM TIME

Réponse: **B, C, D**

QCM 2 : Donnez les vraies propositions.

A) La différence de 2 ensembles A et B, notée ~~A Δ B~~, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A sans appartenir à B. A - B

B) La probabilité du complémentaire de A est $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

C) Un ensemble infini peut être dénombrable ($\mathbb{N}$) ou indénombrable ($\mathbb{R}$)

D) Pour le lancer d'une pièce, épreuve nommée A , la famille des parties de A est {∅; {pile}; {face}; {pile, face} }

E) Les propositions A,B,C et D sont fausses

PROBABILITES

- Un phénomène aléatoire est un phénomène dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance.

  Ex: le lancer d'un dé

- Un phénomène déterministe est un phénomène dont on peut prévoir le résultat à l'avance, il a une régularité de comportement.

  Ex: la trajectoire d'une balle, grâce aux lois de la physique

DÉFINITIONS

- *Epreuve* $\longrightarrow$ expérience aléatoire
- *Evènement certain* $\longrightarrow$ **ensemble des résultats** possibles, nommé Ω
- *Evènement* $\longrightarrow$ **sous ensemble de Ω**, ensemble de résultats
- *Evènement élémentaire* $\longrightarrow$ = **un résultat unique** de Ω
- *Evènement impossible* $\longrightarrow$ = **ensemble vide**, ne contient aucun de résultats possibles, noté $\emptyset$

PROBABILITÉ

- Notée **P(A)**
- **Toujours comprise entre 0 et 1**
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- La somme des probabilités des évènements de **Ω** vaut 1

- *Propriété d'additivité forte* $\longrightarrow$ se généralise à un nombre quelconque n d'éléments (formule de Poincaré)

Pour n = 3 →

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)) + P(A \cap B \cap C)$$

Equiprobabilité

- Même probabilité pour chaque évènement élémentaire

- La probabilité de chaque évènement élémentaire est :

$$1 / \mathrm{Card}(\Omega)$$

Ex: *Probabilité d'avoir un 5 lors du lancer d'un dé ?*

Card(Ω) = 6 (6 possibilités de résultat)

P(A = avoir un 5) = 1/6

Factorielle

- Noté $n!$

- $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

- n est un entier naturel !

- Ex : avec $n = 5$

  $n! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = (5 \times 2) \times (4 \times 3) = 120$

DENOMBREMENTS

1) P-liste avec remise

- *Ordonné / avec remise*

- <u>Formule</u> : $Card(E^p) = Card(E)^p$

- On prend un élément dans E, on l'y replace et on répète p fois cette épreuve. Pas d'associations d'objets.

- *<u>Ex</u> : on tire SUCCESSIVEMENT 3 cartes dans un jeu de 32 cartes, on les remet dans le paquet à chaque tirage*

DENOMBREMENTS

2) Arrangements de n éléments pris p à p

- *Ordonné / sans remise*

- <u>Formule</u> : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

- On prend SUCCESSIVEMENT p éléments parmi n <u>sans les remettre</u>

- *<u>Ex</u> : on tire 3 cartes successivement dans un jeu de 32 cartes mais on ne les remet pas dans le jeu à chaque tirage*

DENOMBREMENTS

3) Arrangements avec répétition

- *Ordonné / avec remise*
- <u>Formule</u> : n^p
- On prend un élément parmi n qu'on remet ensuite et on répète p fois cette épreuve. Possibilité d'associations d'objets.
- *<u>Ex</u> : combien de mots différents de 4 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet ?*

DENOMBREMENTS

4) Permutation d'un ensemble fini à n éléments

- *Ordonné / sans remise*

- Formule : $P_n = n!$

- On prend les éléments 1 à 1 sans les remettre jusqu'à épuisement.

- *Ex: on a un valet, un roi et une dame, combien de permutations (= suites de cartes) sont possibles ?*

DENOMBREMENTS

5) Permutation avec répétition

- *Ordonné / sans remise*
- Formule : $P_n = n! / (k_1! \times k_2! \times \ldots \times k_x!)$
- Les éléments sont répartis en x catégories k différentes
- On prend les éléments 1 à 1 jusqu'à épuisement en ne tenant compte que des catégories
- *Ex: 6 chevaux sont au départ d'une course hippique : 2 chevaux bleus (B1 et B2), 3 Rouges (R1, R2 et R3) et 1 Jaune (J1).*
  Le nombre de classements possibles (= permutations) à l'arrivée en ne tenant compte que des catégories est ?

DENOMBREMENTS

6) Combinaison de n éléments pris p à p parties d'un ensemble

- *Sans ordre / sans remise*

- Formule : $C_n^p = n! / (p! \times (n-p)!)$

- On prend SIMULTANEMENT p éléments parmi n, on en laisse donc n-p
- On crée donc 2 séries complémentaires

- *Ex: on a un valet, un roi et une dame, on tire simultanément 2 cartes sans remise, combien de combinaisons possibles ?*

Attention :

Alors que 3 lettres (a; b; c) prises 2 à 2 conduisent

à 6 arrangements (a,b) (b,a) (a,c) (c,a) (b,c) (c,b)

(*car on tient compte de l'ordre*) ,

elles ne donnent lieu qu'à 3 combinaisons

(*car l'ordre est ignoré*) :

{a,b} {a,c} {b,c}

QCM TIME

QCM 3 : Soit un jeu de 52 cartes, on tire successivement 3 cartes qu'on remet dans le paquet à chaque fois. Donnez les vraies.

A) Le nombre d'arrangements possible est 52^3

B) Le nombre de combinaisons possibles est 52! / (3! x (52-3)!)

C) La probabilité d'avoir un roi pour un tirage est 1/13

D) Nous sommes en présence d'un phénomène déterministe

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QCM TIME

Réponse : AC

QCM 3 : Soit un jeu de 52 cartes, on tire successivement 3 cartes qu'on remet dans le paquet à chaque fois. Donnez les vraies.

A) Le nombre d'arrangements possible est 52^3

B) Le nombre de ~~combinaisons possibles~~ est 52! / (3! x (52-3)!)

Pas de combinaisons possibles puisqu'on tire SUCCESSIVEMENT et pas simultanément !

C) La probabilité d'avoir un roi est 1/13

D) Nous sommes en présence d'un phénomène ~~déterministe~~ Aléatoire !

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

KEEP
CALM
AND
BE A
MATHS GEEK

A bientôt pour de nouvelles aventures statistiques ! (#tut'biostatrelou)

KEEP
CALM
AND
BE A
MATHS GEEK

Tom_C
pour vous
servir