Cours N°3 : Probabilités conditionnelles.

Pr. Staccini

Papa Ours

Plan du cours

- **I. Définition**
- **II. Théorème de la multiplication**
- **III. Diagramme en arbre**
- **IV. Formule et théorème de Bayes**
- **V. Indépendance en probabilité**

Force et Honneur !! Vous en aurez besoin !

I. DÉFINITION

- Probabilité qu'un événement A se réalise **sachant qu'un événement B est réalisé.**

- $P(A/B) = P_B(A) =$ **« Probabilité de A sachant B ».**

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Exercice :

- *Un groupe de 10 personnes avec 5 filles et 5 garçons. Les 5 filles et un garçon ont les cheveux longs les autres des cheveux courts.*

- *Si je note A : « Choisir une fille » et B : « Choisir quelqu'un avec des cheveux longs ». Alors quelle est la probabilité d'avoir choisi une fille sachant que j'ai choisi quelqu'un avec les cheveux longs ?*

- Je cherche la probabilité d'avoir choisi une fille (A) sachant que j'ai choisi quelqu'un avec les cheveux longs (B) → P(A/B)

- P(A/B) = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- $P(A \cap B)$ = 5/10 → Sur dix personnes, 5 sont des filles avec des cheveux longs.
- **P(B)** = 6/10 → Sur dix personnes, 6 ont les cheveux longs.

- **P(A/B) = 5/6** → J'ai donc 5 chances sur 6 de choisir une fille si je choisis quelqu'un avec les cheveux longs !!

II. Théorème de la multiplication

- On sait que :
  - **$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$** et **$P(B/A) = P(B \cap A) / P(A)$**
  - **$P(A \cap B) = P(B \cap A)$**

- On peut en déduire :
  - **$P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$**

EXERCICE :

- Rappel de l'exemple précédent :
  - P(A) = 5/10
  - P(B) = 6/10
  - P(A/B) = 5/6

P(B/A) ??

- P(B/A) = $\frac{P\left(\frac{A}{B}\right) * P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{6} * \frac{6}{10}}{\frac{5}{10}}$

P(B/A) = 1

III. Diagramme en arbre

- 2 conditions pour l'utiliser :
  - 1 → Présence d'une **séquence fini d'expériences** avec pour chacune un **nombre fini de résultats possibles.**
  - 2 → Les résultats possibles de chaque expérience dépendent de l'expérience précédente → **Probabilité conditionnelles**.

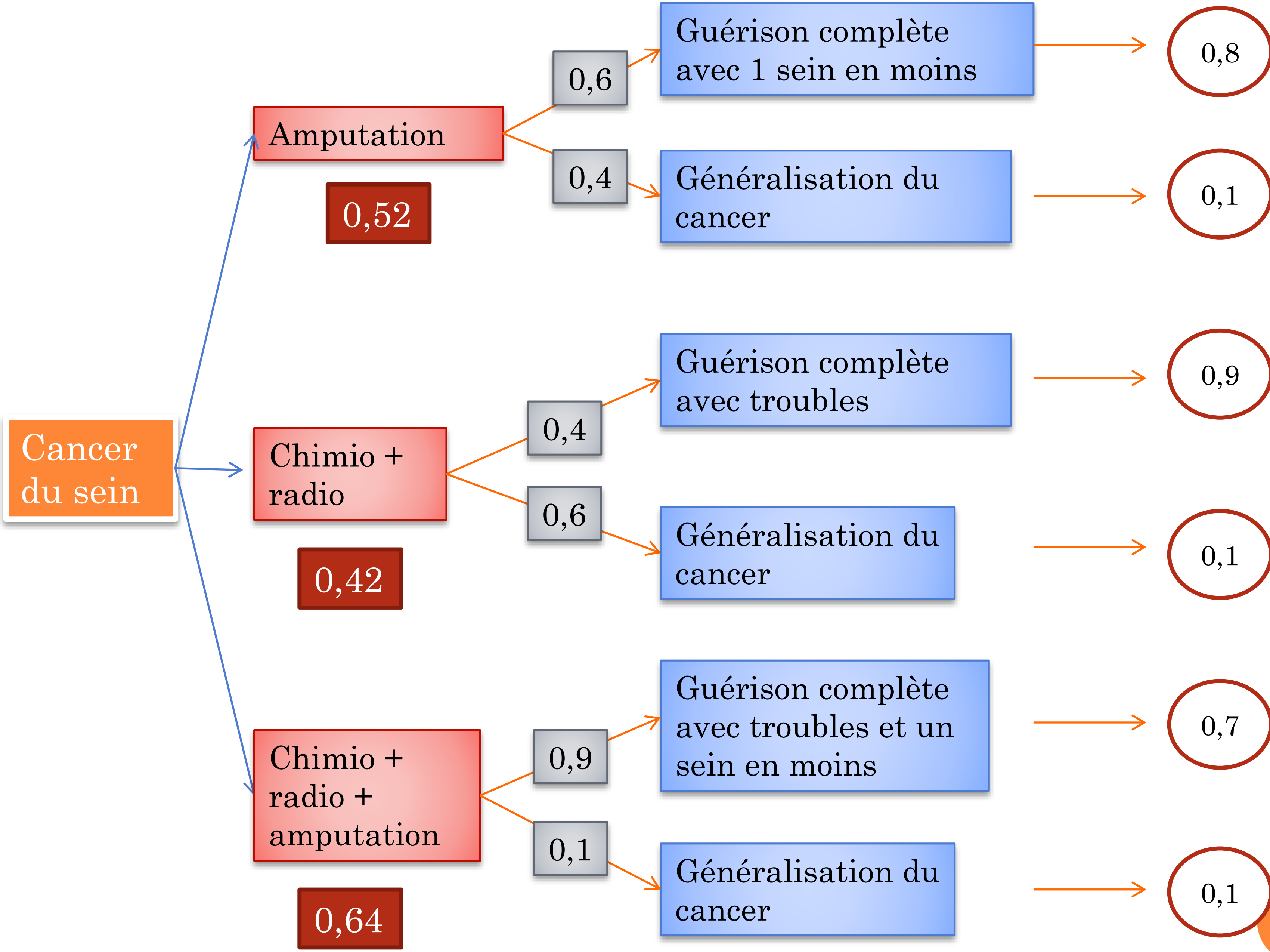
- **3 règles à retenir :**
  - 1. La probabilité qu'un chemin particulier de l'arbre se réalise est, d'après le théorème de la multiplication, **le produit des probabilités de chaque branche du chemin.**
  - 2. Les chemins **s'excluent mutuellement.**
  - 3. **La somme de toutes les probabilités finales obtenues doit être de 1.**

Exemple :

- Prise en charge d'une femme de 35 ans atteinte d'un cancer du sein (non métastasé) :

- 3 stratégies de prise en charge :
  - Amputation immédiate du sein concerné.
  - Chimiothérapie et radiothérapie sans amputation.
  - Chimiothérapie et radiothérapie suivies d'une amputation.

→ Arbre !!


Cancer du sein
Amputation
0,52
Chimio + radio
0,42
Chimio + radio + amputation
0,64
0,6
0,4
0,4
0,6
0,9
0,1
Guérison complète avec 1 sein en moins
Généralisation du cancer
Guérison complète avec troubles
Généralisation du cancer
Guérison complète avec troubles et un sein en moins
Généralisation du cancer
0,8
0,1
0,9
0,1
0,7
0,1

IV. Formule et théorème de Bayes

- Rappel : Théorème de la multiplication :

  - **$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$**

- **Formule de Bayes :**

  - $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) * P(B/A)}{P(B)} ;$$
  - $$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) * P(A/B)}{P(A)}$$

Théorème de Bayes

- **Partition d'un ensemble Ω** avec deux événements A_1 et A_2.

- **B est un événement aléatoire :**
  - $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$

- **<u>Théorème de la multiplication</u>** :
  - $P(B) = P(B/A_1) \times P(A_1) + P(B/A_2) \times P(A_2)$

- **<u>Formule de Bayes :</u>**
  - $P(A_1/B) = \frac{P(A1)*P(B/A1)}{P(B)}$; $P(A_2/B) = \frac{P(A2)*P(B/A2)}{P(B)}$

- **<u>Théorème de Bayes :</u>**
  - $\mathbf{P(A_1/B) = \frac{P(A1)*P(B/A1)}{P(B/A_1)*P(A_1) + P(B/A_2)*P(A_2)}}$

Exercice :

- Nathan, élève de P2, se présente a l'hôpital avec le symptôme « **vomit partout » (B).**
  - On sait que à cet instant dans la promo de P2 : 10% ont la gastro (**A_1**), 60% sont intoxiqués à l'éthanol **(A_2**) et 30% sont sains (**A_3**).
  - On considère qu'on ne peut pas être intoxiqué et avoir la gastro en même temps (faut pas abuser).

- Si on dit que : 90% des gens avec la gastro, 70% des intoxiqués et 1% des sains vomissent.

- **Quel est la probabilité que Nathan soit intoxiqué ? Ait la gastro** ?

- Probabilité d'être intoxiqué : $P(A_2/B)$
  - On utilise le théorème de Bayes :

$$P(A_2/B) = \frac{P(A2) * P(B/A2)}{P\left(\frac{B}{A_1}\right) * P(A_1) + P\left(\frac{B}{A_2}\right) * P(A_2) + P\left(\frac{B}{A3}\right) * P(A3)}$$

$$= \frac{0{,}7 * 0{,}6}{0{,}9 * 0{,}1 + 0{,}7 * 0{,}6 + 0{,}01 * 0{,}3}$$

$$= 0{,}82 = 82\%$$

- Probabilité d'avoir la gastro : $P(A_1/B)$

$$= \frac{0{,}9 * 0{,}1}{0{,}9 * 0{,}1 + 0{,}7 * 0{,}6 + 0{,}01 * 0{,}3}$$

$$= 0{,}18 = 18\%$$

V. Indépendance en probabilité

- Evènements indépendants = la survenue de l'événement A n'influe pas sur la survenue de l'événement B
  - **$P(A/B) = P(A)$ et $P(B/A) = P(B)$**

- *Rappel :*
  - $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$.

- Donc :
  - **$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.**

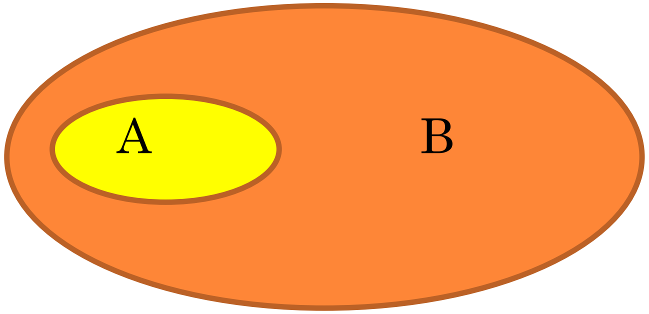
EXEMPLE :

- Groupe de 100 personnes, parmi elles :
  - 75 filles et 25 garçons.
  - 20 personnes avec les yeux bleus → 15 filles, 5 garçons.
  - 80 personnes avec les yeux marrons → 65 filles, 15 garçons.

- On prend :
  - A : « Être un garçons » → P(A) = 0,25.
  - B : « Avoir les yeux bleus » → P(B) = 0,2

- $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,05}{0,2} = 0,25 = P(A)$
  - Le sexe de l'individu choisi n'a donc pas d'influence sur la couleur de ses yeux .

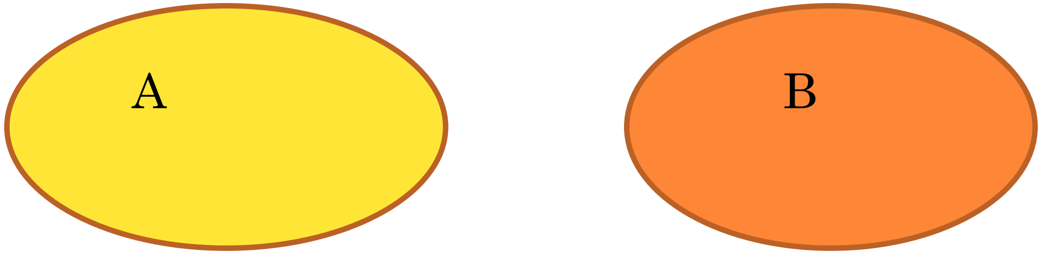
Inclusion :



- Si un événement **B inclue un événement A alors ceux-ci ne sont pas indépendants.**

- En effet, si B inclus A :
  - **$P(A \cap B) = P(A)$**
  - **$P(A/B) = P(A) / P(B) \neq P(A)$**
  - **$P(B/A) = P(A) / P(A) = 1 \neq P(B)$**

Evénements disjoints :



- De la même manière **deux événements disjoints ne sont pas indépendants**.

- Si A est disjoint de B alors :
  - **$P(A \cap B) = 0$**
  - **$P(A/B) = P(B/A) = 0$**

THE END !!