Variables aléatoires
Lois de probabilités

I. Définition générale

Une variable aléatoire est une épreuve aboutissant à des évènements élémentaires qui sont des nombres.

Ex 1 : On lance un dé (= épreuve) et on note le résultat obtenu (=évènement élémentaire). Ici, on parle bien de variable aléatoire car le résultat est un nombre.

Ex 2 : On tire au sort un étudiant en médecine (= épreuve) et on lui demande sa mention au bac (= évènement élémentaire). Attention, on ne parle pas de variable aléatoire car la mention n'est pas un nombre.

II. Variable aléatoire discrète

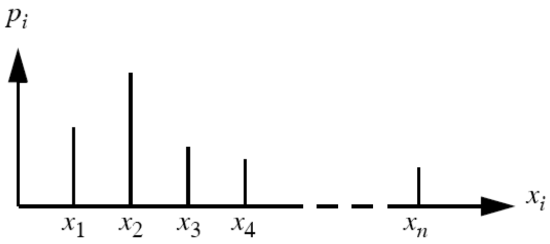
1. Définitions

On parle de variable aléatoire discrète lorsque le résultat est compris dans un ensemble fini (donc dénombrable) ou infini dénombrable (comme N).

Une loi de probabilité est définie par l'ensemble des probabilités des différentes éventualités d'une variable aléatoire X, c'est-à-dire qu'à chaque éventualité xi on associe une probabilité pi.

On peut les variables aléatoires discrètes sous forme de tableau ou sous forme de diagramme :

x1	x2	x3	...	xn	...
p1	p2	p3	...	pn	...



2. Paramètres

- **Espérance**

L'espérance mathématique correspond à la moyenne (notée μ) dans le domaine des «statistiques», elle traduit la tendance centrale de la variable aléatoire.

Notée E(X), il s'agit d'un indicateur de position sur la distribution de probabilité de X. **Esperance = Moyenne**

$E(X) = \mu = \sum(xi * pi)$

Exemple : Sur 10 élèves, 4 ont eu 8/20, 2 ont eu 12 et 4 ont eu 16. La moyenne de la classe est de 8 x 0,4 + 12 x 0,2 + 16 x 0,4 = 3,2 + 2,4 + 6,4 = 12.

Théorèmes de l'espérance :

- X est une variable aléatoire et k un nombre réel :
E(X+k) = E(X) + k et **E(kX) = k E(X)**
- X et Y sont 2 variables aléatoires : **E(X+Y) = E(X) + E(Y)**

« Pour n variables aléatoires, l'espérance de la somme est la somme des espérances »

- **Variance et écart-type**

La variance est un indicateur de dispersion, c'est-à-dire qu'elle caractérise **l'éloignement** des valeurs prises par la variable par rapport à la moyenne.

La variance est noté σ^2 ou Var(X) alors que l'écart-type est noté σ.

$\sigma^2 = Var(X) = \sum pi * (xi - \mu)^2$

En termes statistiques, on a : $\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$

Soit a un réel quelconque : $Var(X + a) = Var(X)$ et $Var(aX) = a^2\ Var(X)$

Exemple : Soient 2 classes de 10 élèves. Dans la classe 1, 4 ont eu 8, 2 ont eu 12 et 4 ont eu 16. La moyenne est de 12. La **variance** est de :

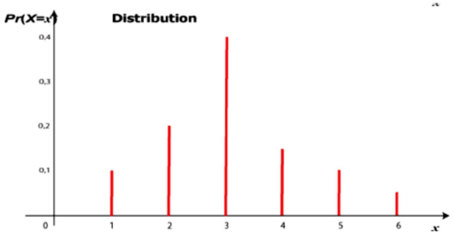
$0,4 \times (8-12)^2 + 0,2 \times (12-12)^2 + 0,4 \times (16-12)^2 = 0,4 \times 16 + 0,4 \times 16 = 2 \times 6,4 = 12,8$

Dans la classe 2, 3 ont eu 11, 4 ont eu 12 et 3 ont eu 13. La moyenne est de 12. La **variance** est de :

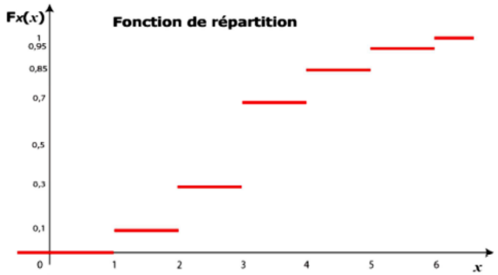
0,3 x (11-12)2 + 0,4 x (12-12)2 + 0,3 x (13-12)2 = 0,3 x 1 + 0,3 x 1 = 0,6
(Les notes dans cette classe sont donc beaucoup moins dispersées)

3. Fonctions de répartition et de distribution

Pour variable aléatoire discrète.
La fonction de distribution est modélisée par un diagramme en bâtons, elle permet de voir la distribution des probabilités d'une variable aléatoire finie :



La fonction de répartition est une fonction monotone croissante représentée par une fonction en escalier. Il s'agit d'une fonction cumulative car elle somme toutes les probabilités pi correspondant aux xi survenus avant x :



4. Lois de probabilités discrètes

Les variables aléatoires discrètes suivent des lois de probabilités discrètes.

a. Loi de Bernoulli : B(p)

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve unique dont l'issue est soit « succès » soit « échec ». On note :

- p : la probabilité du succès
- q = 1-p : la probabilité de l'échec
- X : le nombre de succès au cours de l'épreuve (soit 1 soit 0)

Formules : **P(X=1) = p** **et** **P(X=0) = q**

$\mu = p$ et $\sigma^2 = pq$

Exemple : On lance une pièce et on regarde si on obtient « pile ». Cet évènement
constitue le succès de l'épreuve avec une probabilité de 0,5. On a donc :
P(X=1) = 0,5
P(X=0) = 0,5

b. Loi Binomiale : B(n,p)

On répète n fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli. On note :

- n : le nombre d'essais indépendants
- X : le nombre de succès à l'issue des n essais

Formule : **P(X = k) =** $\boldsymbol{C_n^k \times p^k \times q^{n-k}}$

$\mu = np$ et $\sigma^2 = npq$

Exemple : on répète 3 fois l'expérience de la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois « pile » ?

$P(X=2) = C_3^2 \times p^2 \times q = 3 \times 0{,}5^2 \times 0{,}5 = 0{,}375$

NB : Dans le cas de de la constitution d'un échantillon par Tirage Au Sort, on distingue 2 situations :

- 1ère situation : Le tirage est non exhaustif (= indépendant). Les éléments sélectionnés sont remis dans l'échantillon après le tirage (= tirage avec remise) : p reste alors constant.

- 2ème situation : Le tirage est exhaustif (= dépendant des autres tirages). Il n'y a **pas de remise**, p varie donc au fil des tirages. On définit alors le taux de sondage = n / N :
=> Si n / N ≥ 0,10, on appliquera la loi Hypergéométrique.
=> Si n / N ≤ 0,10, on peut appliquer la loi Binomiale. Dans ce cas on considère que les variations de p sont négligeables.

(Propriétés :

- Pour p = 0,5 la distribution Normale est symétrique autour de µ pour tout n.
- Si p ≠ 0,5, la distribution est asymétrique négative pour p ≤ 0,5 et inversement.
- Quand n est grand, la forme de la représentation graphique devient symétrique.
- Si n est grand et p pas trop proche de 0 ou 1, on tend vers la loi Normale.)

e. Loi de Poisson : P(λ)

La loi de Poisson est utilisée le plus souvent pour déterminer la probabilité qu'un certain nombre d'événements interviennent sur la base d'une unité de temps (ou d'autres unités : volume, surface, etc...).

λ = Nombre moyen d'évènement apparaissant dans un laps de temps (ou unité de volume, surface…)

Formule : P(X=k) = $\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$

$\mu = \sigma^2 = \lambda$

On utilise la loi de Poisson seulement si **$\lambda \leq 25$**.

Exemple : On veut connaître la probabilité qu'il y ait un certain nombre de tram allant vers Valrose en 1 heure sachant qu'il y en passe en moyenne 8 par heure.

P(X=2) = (e-8 * 82) / 2 ! P(X=4) = (e-8 * 84) / 4 ! P(X=10) = (e-8 * 810) / 10 !

d. Loi Géométrique : G(p)

On répète l'épreuve de Bernoulli jusqu'à ce qu'on obtienne un succès. On comptabilise le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ce premier succès.

Formule : P(X=k) = p * q^{k-1}

$\mu = 1 / p$ et $\sigma^2 = (1-p) / p^2$

Exemple : On lance un dé jusqu'à obtenir un « 5 ». On obtient un 5 après 3 essais.
La probabilité d'obtenir un 5 au bout de 3 essais est : P(X=3) = 1/6 x (5/6)2 = 25 / 216

e. Loi Hypergéométrique : H(N,D,n)

Soit une population de N individus dont un nombre D présente un caractère donné. On utilise la loi hypergéométrique lorsqu'on veut connaitre la probabilité d'obtenir X individus présentant ce caractère dans un échantillon de n individus, issu de la population N.

Les individus de l'échantillon n sont tirés simultanément (l'ordre de tirage n'a pas d'importance), mais **ne sont pas remis** dans la population N après le tirage! Il n'y a donc **pas de remise**.

<u>Formule :</u> P(X=k) = $\frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$

$\mu = \frac{nD}{N}$ et $\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$

Exemple 1 : Dans une population de 1000 habitants, 150 possèdent les yeux vairons (les yeux sont chacun d'une couleur différente). On tire au sort 200 individus dans cette population. Quelle est la probabilité que la moitié de cet échantillon ait les yeux vairons ?

$$P(X=100) = \frac{C_{150}^{100} \times C_{850}^{100}}{C_{1000}^{200}}$$

$$= \frac{\frac{150!}{100! \times 50!} \times \frac{850!}{100! \times 750!}}{\frac{1000!}{200! \times 800!}}$$

$$= 6{,}62 \times 10^{-44}$$

III. Variable aléatoire continue

1. Définition

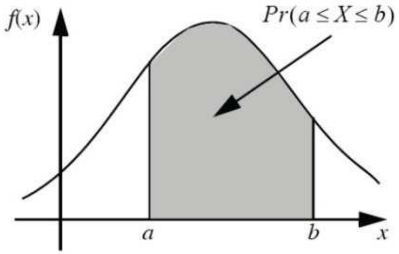
On parle de variable aléatoire continue ou à densité si les résultats de l'expérience sont **indénombrables**, compris dans R ou un intervalle de R.

Exemple : La taille d'une personne, le poids d'un objet …

2. Densité de probabilité

L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire continue est contenue dans un intervalle : la probabilité que cette variable soit égale à un nombre donné est donc nulle.

On définit la loi de probabilité de X grâce à la fonction f(X), aussi appelée densité de probabilité de X.



3. Fonction de répartition

La fonction de répartition F(X) correspond à l'intégrale de la fonction de densité.

La différence F(b) – F(a) correspond à la probabilité représentée par l'aire sous la fonction de densité ! La fonction de répartition nous permet donc de déterminer directement la probabilité d'un intervalle :

Propriétés de la fonction de répartition :

- Monotone croissante (comme pour les variables discrètes)
- P(a ≤ X ≤ b) est la différence des hauteurs F(b) - F(a) si on utilise la fonction de répartition.
- Contrairement au cas des variables discrètes, la fonction de répartition est ici continue (courbe).

4. Variable centrée réduite

Le terme « centrée » signifie qu'on soustrait la moyenne μ de la variable à chacune de ses valeurs initiales.

Le terme « réduite » signifie qu'on divise toutes les valeurs que prend la variable par son écart-type.

On transforme donc une variable X en une variable centrée réduite Y selon la relation :

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

2 propriétés : **E(Y) = 0** et **Var(Y) = 1; d'où σ = 1**

Cette transformation permet :

- D'obtenir des données indépendantes des unités
- D'avoir des variables avec une moyenne (μ = 0) et un écart-type (σ = 1) identiques.
- De **n'utiliser qu'une seule table de probabilité** (celle de la loi normale centrée réduite) afin de déterminer les probabilités de n'importe quelle variable.

5. Lois de probabilités continues

Les variables aléatoires continues suivent des lois de probabilités continues.

a. Loi Uniforme : U([a ;b])

On utilise une loi Uniforme lorsque entre un point a et un point b, la densité de probabilité est toujours égale entre ces deux points et nulle ailleurs

Exemple : Sur une autoroute, une zone contenant un radar est manifestée par la présence de 2 panneaux éloignés de 500 mètres. Quelle est la probabilité pour que le radar soit placé dans les 100 mètres après le premier panneau ?

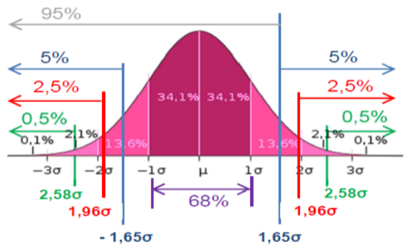
Chaque mètre possède la même probabilité de contenir le radar. Il y a donc 1 chance sur 5 que le radar soit dans les 100 premiers mètres.

b. Loi Normale : N(μ,σ)

La loi Normale est une des principales distributions de probabilité. La courbe représentative de la fonction de densité est appelée **courbe de Gauss**. L'aire sous la courbe délimitée par un intervalle représente la proportion d'individu (ou probabilité de la survenue d'un évènement) dans cet intervalle.

De nombreux phénomènes naturels (ex : taux d'hématocrite d'une population, Quotient Intellectuel, etc) suivent une distribution très proche de celle de la loi Normale, et forme cette courbe en cloche.

Cette courbe correspond à une grande proportion d'individus autour de la moyenne μ, et de moins en moins au fur à mesure qu'on s'en éloigne. Elle est symétrique autour de μ.



Valeurs limites à connaître :

- Il y a 5 chances sur 100 pour que X<μ-1.96σ ou X>μ+1.96σ
- Il y a 1 chance sur 100 pour que X<μ-2,6σ ou X>μ+2,6σ

c. Loi Normale centrée réduite : N(0,1)

La loi Normale centrée réduite est un cas particulier de la loi Normale, où **μ = 0 et σ = 1**.

Lorsqu'une variable aléatoire X suit une loi Normale dont le comportement nous ait inconnu, on procède à un changement de variable X → Z, afin de ramener la variable X à une variable Z (variable centrée réduite) dont on connait le comportement.

En effet, il existe une table de la loi normale centrée réduite qui donne la probabilité **pour que la variable Z soit inférieure à z (z = (x - μ)/s).** La probabilité trouvée pour que la variable centrée réduite Z soit inférieure à z est égale à celle pour que la variable X soit inférieure à x !

A retenir : la table de la loi centrée réduite ne donne que les probabilités de Z pour $0 \leq z \leq 3{,}999$.

Exemple : Pour être mannequin féminin, la taille minimale est de 175 cm. Si la taille moyenne des femmes françaises est de 165 cm, et qu'elle a un écart type de 4 cm, alors quel est le pourcentage de femmes ne pouvant être mannequin, à 5% près ?

On cherche alors dans le tableau de la loi normale centrée réduite $P(Z \leq 2{,}5)$ et on trouve 0,9938. Donc 99,38% des femmes françaises ne peuvent être mannequin car sont trop petites.

d. Loi Exponentielle : E(λ)

La loi exponentielle est utilisée pour décrire un phénomène de « mortalité » (ou survenue d'un événement) dans lequel « le risque instantané » (taux de défaillance) de « décès » est constant, c'est-à-dire que la durée de vie au-delà de l'instant t est indépendante de l'instant t.

NB : Lien avec la loi de Poisson : Si un évènement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ, alors ***le temps entre 2 réalisations consécutives*** *de l'événement est distribué selon* ***une loi exponentielle de paramètre 1/λ.***

$P(X \leq x)$ signifie : « probabilité que l'événement survienne avant l'instant t = x. » On note :
- λ = taux de défaillance instantanée
- x = nombre réel

$$\boldsymbol{P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt}$$
$$\boldsymbol{= 1 - e^{-\lambda x}}$$

$\mu = 1/\lambda$
$\sigma^2 = 1/\lambda^2$

Exemple : J'ai gagné le grand prix d'un magasin électroménager, c'est-à-dire un grille-pain bon marché. Je sais que sa durée de vie suit une loi exponentielle telle que ⍰ ⍰ 1/ 12 si l'unité est en année. Quelle est la probabilité qu'il marche encore après trois ans ?

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$
$$P(X \geq x) = 1 - F(x) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda x}\right] = e^{-\lambda x}$$
$$P(X \geq 3) = e^{-\frac{1}{12}\times 3} = e^{-\frac{1}{4}}$$

IV. Approximations

1. Loi binomiale => Loi de Poisson :

Lorsqu'un phénomène suit une loi Binomiale, si **n >50**, **p ≤ 0,1** et **np < 5**, la loi de Poisson permet d'approximer la loi Binomiale de la manière suivante :

B(n,p) → P(λ = np)

Exemple : Je décide de piocher puis de remettre dans le paquet une carte 100 fois. Si j'obtiens le deux de carreau, je considère que je gagne, sinon je considère que je perds.

Ici n = 100 donc >50 ; p<0,1 et np < 5 donc je peux appliquer la loi de Poisson telle que P($\lambda = \frac{1}{52} \times 100$)

2. Loi Binomiale - Loi Normale:

Lorsqu'un phénomène suit une loi Binomiale, si **np ≥ 5** et **nq ≥ 5**, alors la loi Normale permet d'approximer la loi Binomiale de la manière suivante :
B(n,p) → N(np , √npq)

Exemple : On lance 20 fois une pièce truquée de façon à ce que la probabilité d'avoir pile est de 0,7. On considère qu'on gagne lorsqu'on obtient face.

*Ici, np = 0,7 x 20 = 14 et nq = 0,3 * 20 = 6 donc on peut appliquer la loi Normale telle que N(14, √4,2)*

3. Loi de Poisson - Loi Normale :

Lorsqu'un phénomène suit une loi de Poisson, si **λ > 25**, la loi Normale permet d'approximer la loi de Poisson de la manière suivante :
P(λ) → N(λ , √ λ)
Exemple : Soit une machine de production de bouteille d'eau. Cette machine vise 50 bouchons par minutes. Autrement dit, λ =50 donc λ >25. On peut donc utiliser la loi Normale telle que N(50, $\sqrt{50}$)

FIN !!