TUT'RENTREE PHYSIQUE

LES ONDES

Ne vous inquiétez pas de la longueur de cette fiche, j'ai mis beaucoup de texte explicatif et de démonstrations++ (les démonstrations sont là, vous les lisez si vous le souhaitez. Perso, je les trouvais importantes, elles m'aidaient à comprendre et à retenir)

Il n'y a pas beaucoup d'images, mais vous pouvez trouver des animations sympathiques assez facilement sur internet, alors n'hésitez pas ;)

I) Différents types d'onde

Rappels de terminale :
Onde = déplacement d'énergie sans déplacement de matière
-> **longitudinale** quand la perturbation va dans la même direction que l'onde (ex : onde sonore),
-> **transversale** quand elle va perpendiculairement (ex : mouvement d'une corde)

Onde **mécanique** -> support (gazeux, liquide ou solide)
Onde **Electromagnétique** -> support ou pas (plus rapide dans le vide)
} Notion de milieu, caractéristique de déformabilité

II) Mise en équation de la propagation d'une onde :

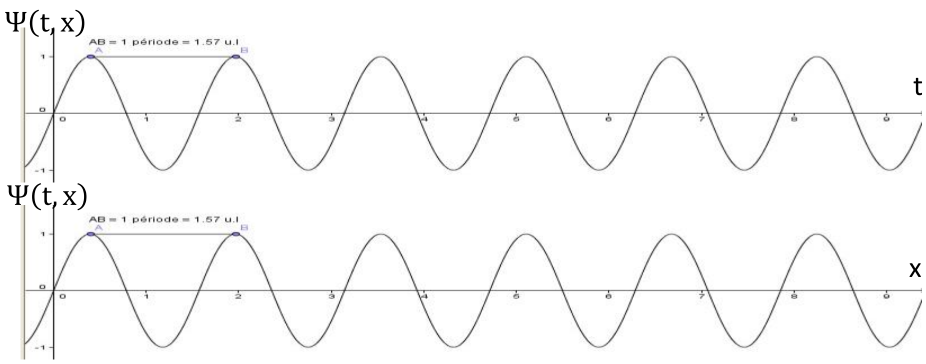
A) Démonstration de l'équation d'Alembert

Premièrement : savoir que la physique, c'est du bricolage ! On veut représenter un truc, en on s'arrange pour que ça colle.

Facile à comprendre : L'équation dépend du temps et de x.
On va appeler cette fonction ψ :

$$\boxed{\boldsymbol{\Psi(t,x) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)}}$$

C'est une onde **progressive** (f est une fonction qui détermine la forme de l'onde).



La fonction f doit prendre en compte t et x, mais ces deux ci n'ont pas la même unité → ça ne marche pas. Donc on transforme x en temps en divisant par v, qui est une constante.

Pourquoi un signe - ? Parce qu'on décide d'étudier une onde qui va **vers les x croissants**. On veut un phénomène périodique, donc centré autour d'une valeur, qui ne s'en écarte pas trop. S'il y avait un +, on aurait en même temps t et x qui avancent et ça augmenterais à l'infini. Ici, quand t augmente, la valeur est freinée par x qui augmente aussi.

Bon, en soi ça ne sert pas à grand-chose pour l'instant. On va transformer cette équation, puis la résoudre.

Pour ça, on la dérive deux fois par rapport à x (on considère alors que t est une constante) et on la dérive deux fois par t (x constante).
Sachez que quand on dérive par rapport à une seule variable, on met des ∂ (des d ronds)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f'' \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} f''$$

-> on remplace f'' par son expression juste avant et on trouve $\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}}$

C'est l'**équation d'Alembert**.

Cette équation est magique : en la résolvant (en cherchant les f possibles) on peut décrire toutes les ondes !

B) Résolution de l'équation d'Alembert

Cette partie est un peu longue, elle a l'air compliqué, mais ça ne l'est pas vraiment (c'est du bricolage). Prenez le temps de bien comprendre ;)

On va le faire, dans le cas le plus simple : une onde **sinusoïdale**. En plus, un jour, Josef **fourrier** a dit que toute onde (de n'importe quelle forme) pouvait être décomposée en somme de sinusoïde, donc c'est l'exemple le plus intéressant.

On se place à t constant (on « arrête » l'onde) -> on va avoir une sinusoïde immobile
On se place à x constant : Si on observe le mouvement en x, on a une montée-descente périodique, qui donne une sinusoïde quand on la représente en fonction de t

Bref pas besoin d'insister plus que ça, vous avez compris, f est une fonction sin.

Et là, du coup, je vous explique la construction de la formule :

Il pourrait aussi s'agir d'une fonction cos, car sin et cos sont identiques avec un déphasage de π/2 et on corrige le déphasage plus tard

La base, c'est $\Psi(x,t) = \sin\left(t - \frac{x}{v}\right)$

On ajoute un terme d'amplitude -> $\Psi(x,t) = A\sin\left(t - \frac{x}{v}\right)$

On ajoute une période (le temps nécessaire pour que l'onde parcoure une longueur d'onde) :
On multiplie toute l'intérieure du sin par 2π/T, comme ça au bout du temps T L'onde aura parcouru une fois sa longueur d'onde :

$$\psi(x,t) = A\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

On vérifie que ça marche :

$\psi(x,t+T) = A\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t+T-\frac{x}{v}\right)\right] = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+2\pi-\frac{2\pi x}{vT}\right) = A\sin\left[2\pi+\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right] = \Psi(x,t)$

$\Psi(x+\lambda,t) = A\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{(x+\lambda)}{v}\right)\right] = A\sin\left[\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{Tv}-\frac{2\pi\lambda}{Tv}\right] = A\sin\left[2\pi+\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right] = \Psi(x,t)$ car $\lambda = Tv$

Enfin, on ajoute un déphasage (qui permet de faire démarrer l'onde où on veut, c'est pas hyper important…)

$$\psi(x,t) = A\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi\right]$$

Maintenant on transforme cette expression, pour ça on va inventer les grandeurs :
ω = la pulsation (en rad.s-1) qui est un peu comme une fréquence, mais au lieu que ce soit un nombre de longueur d'ondes par secondes, c'est un nombre de fois qu'on a un angle de 2π par secondes : c'est presque la même chose (car quand on fait 2π, on a parcouru une longueur d'onde)
k = le nombre d'onde

$$\boxed{\boldsymbol{\Psi(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi)}}$$

Savoir calculer le nombre d'onde et la pulsation : $\boxed{\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T}}}$ $\boxed{\boldsymbol{k = \frac{2\pi}{\lambda}}}$ $\boxed{\boldsymbol{\omega = kv}}$

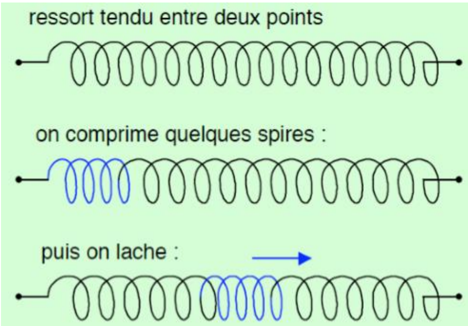
Ca y est ! On a enfin notre expression ! :D Maintenant qu'on a défini notre onde, on peut commencer à calculer des vitesses, impédances et puissances. (le cours devient plus gentil)

III) Vitesse d'une onde

Pour trouver les vitesses, on bricole en se servant des unités : Il faut toujours que de chaque côté de l'égalité, les unités soient les mêmes. Cela sert très souvent en physique. Au concours, si vous avez un doute sur votre formule, préférez **vérifier les unités** (ça marche à tous les coups) plutôt que prendre le risque de faire un calcul complètement erroné.

A) Ressort tendu

On cherche la vitesse de l'onde du ressort. Encore une fois, on bricole.
On suppose que ça dépend de :



L'**étirement x** du ressort (distance séparant les anneaux pincés de leur position au repos) → m

La **constante de raideur K** (définie par F=Kx : résistance à l'étirement) → $N.m^{-1} = m.s^{-2}$
(car $1N = 1kg.m.s^{-2}$)

La **masse linéique μ** (la masse par unité de longueur) → $kg.m^{-1}$

On cherche les exposants à attribuer à ces constantes pour obtenir des $m.s^{-2}$ (faites le chez vous, même plusieurs fois c'est intéressant et ça vous entraîne)

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{n}\sqrt{\frac{\mathbf{Kx}}{\boldsymbol{\mu}}}}$$

$n \in \mathbb{R}$

Remarque : c'est la racine d'une force sur une masse linéique.

Si un qcm à ce sujet tombe au concours, prenez n=1

B) Autres vitesses

Bon là on est sur du par cœur pur, mais pour vous aider vérifiez toujours bien que vous retrouvez une racine qui contient l'équivalent d'une force/masse linéique.

Il peut être intéressant pour vous entraîner d'essayer de vérifier que ces expressions sont bien des vitesses ! (pour les constantes inconnues, vous pouvez chercher leur dimension sur internet)

ONDE	MILIEU	VITESSE
Transversale	Corde	$\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ T=Tension (N)
Longitudinale	Ressort tendu	$\sqrt{\frac{\mathrm{Kx}}{\mu}}$
Pression (onde sonore)	Gaz	$C_s = n\sqrt{\frac{p}{\rho}}$
Electromagnétique	Vide	$c = 3.10^8 m.s^{-1}$
Electrique	Ligne à transmission (câble coaxial)	osef

C) Exercice type concours :

Une corde de longueur 10dm et de masse 150g est accrochée par une de ses extrémités à un mur, et est tendue par l'autre grâce à une masse de 6kg. On provoque une onde, quelle est sa vitesse ?

Formule : $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

On met les unités en SI : ici, l = 10dm = 1m et mc = 150g = 0,15kg

T = tension : c'est la force exercée par la masse. T = mg = 6x10 = 60N

La masse linéique vaut $\mu = \frac{m}{l} = \frac{0{,}15}{1}$ = 0,15

On a donc $V = \sqrt{\frac{60}{0{,}15}} = \sqrt{400} = 20m \cdot s^{-1}$

NB : en <u>physique</u> on ne s'embête pas avec les chiffres significatifs et on arrondis => on considère TOUJOURS g=10 n'allez pas chercher la petite bête ;)

IV) Impédance Z

L'impédance est une constante qui caractérise la **résistance** apportée par le milieu à la propagation de l'onde.
Pour la trouver, on va diviser la force qui s'exerce verticalement sur la corde par la vitesse de déplacement vertical de cette corde.
C'est un calcul assez bizarre, on n'aurait pas le réflexe de penser à ça. En fait, on la trouve d'abord grâce à une propriété spéciale de la fonction d'onde.

On repart de la base : $\Psi(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega A\, cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -kA\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

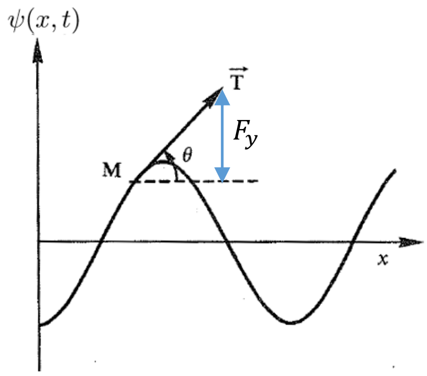
N'oubliez pas que même si elle fait peur, cette fonction est comme toute les autres : ψ désigne la « hauteur » sur le graphique, c'est comme la valeur sur l'axe y

On a deux expressions super proches, donc on les divise l'une par l'autre pour les simplifier :

$$\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial t}} = -\frac{k}{\omega} = -\frac{1}{c}$$

Maintenant on va donner du sens à cette équation : $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ c'est la dérivée de la position verticale par rapport au temps → vitesse verticale que je note V_y

Et pour $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$: on imagine une onde sur une corde. On se place à un endroit aléatoire de la corde : la force (tension) que la corde exerce sur ce point fait un angle de θ avec l'horizontale.



La force verticale est la projection de la force sur un axe vertical :
$F_y = T\sin\theta = T\tan\theta$ (approximation des petits angles)

Mais $tan\ \theta = \frac{côté\ opposé}{côté\ adjacent}$ dans le triangle. C'est donc la pente de l'hypoténuse, et donc la pente de ψ(x,t).

Or la pente en un point, c'est la dérivée en ce point donc $F_y = T\frac{\partial \Psi}{\partial x}$

⇨ $$\boxed{\mathbf{Z = \frac{V_y}{F_y} = \frac{T}{c}}}$$

Cette expression de Z peut servir pour tous type d'onde, et donc par exemple pour la **corde** : $\boxed{Z = \sqrt{T\mu}}$

Passage non obligatoire ! Là on pénètre dans le hors programme : Pourquoi le signe – a-t-il disparu ?
Vous pouvez remarquer que $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ ont la forme d'ondes.

On les a divisées en partant du principe qu'elles étaient en phase.
Mais en vérité, puisque l'impédance est par définition positive, on constate qu'il y a un déphasage de π entre la force et la vitesse pour une onde allant vers les x croissants. Ce déphasage n'existe pas quand l'onde va vers les x décroissants.

V) Les ondes stationnaires

Passage important ! Tout le monde se réveille !

Quand le support d'une onde subit des contraintes à ses deux extrémités, l'onde se retrouve piégée sur place : c'est une onde stationnaire.

Le principe est simple : l'onde se propage, puis atteint un obstacle sur lequel elle se réfléchit complètement, et change de sens (elle se « retourne » et change de signe) pour une raison qui n'est pas au programme de la tut'rentrée). L'onde qui en résulte est donc la somme de deux ondes allant en sens inverse (visible au signe qui change) et de signe opposé :

$$\Psi = \mathrm{A}\sin(\omega\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi) - \mathrm{A}\sin(\omega\mathrm{t} + \mathrm{kx} + \varphi)$$

Formule de trigo : $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin b\cos a$

⇨ $$\boxed{\boldsymbol{\Psi = 2\mathrm{A}\sin(\mathrm{kx})\cos(\omega\mathrm{t})}}$$

Et là, pour la première fois, les composantes de **temps et de position sont indépendantes** l'une de l'autre ! Et ça, c'est important.
J'ai décidé de laisser tomber le terme de déphasage car dans la démonstration qui suit il se serait éliminé et que ça complique pour rien.

Une onde stationnaire possède des nœuds et des ventres, mais on veut savoir où. Pour ça on définit l'onde telle que $\Psi(0,t) = 0 \; et \; \Psi(L,t) = 0$ (L étant la distance sur laquelle est contenue l'onde)

On n'a aucun problème pour $\Psi(0,t)$ car $sin(0) = 0$ (c'est là qu'on aurait éliminé le déphasage)

Mais pour $\Psi(L,t) = 0$, on doit poser $sin(kL) = 0$ donc $kL = n\pi$ (n entier)

Avec $k = 2\pi/\lambda$, on a

⇨ $$\boxed{\mathbf{L = \frac{n\lambda}{2}}}$$ **+++++**

C'est HYPER important, parce que ça définit toutes les longueurs d'ondes que pourra prendre notre onde stationnaire !
Retenez bien cette formule vous en entendrez parler dans d'autres cours et en QCM elle sert souvent !

Les différentes possibilités sont appelées les **modes d'ordre n**, quand n vaut 1 on a le mode **fondamental**.

En soi cette formule est très simple à comprendre, votre longueur totale est découpée en un nombre entier de demi longueurs d'ondes.

Enfin, grâce à l'élémentaire $\lambda = \frac{c}{f}$, vous pouvez trouver les fréquences possibles très facilement !