Cours 2a :

PROBABILITE CONDITIONNELLE

THEOREME DE BAYES

INDEPENDANCE EN PROBABILITE

1) Probabilité Conditionnelle

Soit A et B deux évènements d'un ensemble E. La probabilité conditionnelle de A, sachant que B est déjà réalisé, se note :

$$\mathbf{P(A|B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(B)}}$$

N.B : Cette probabilité représente le nombre de réalisations de A et B en même temps, divisé par le nombre de réalisations de B

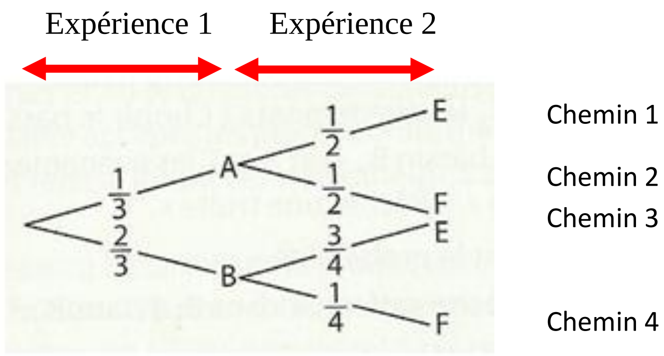
2) Théorème de la multiplication

Soit A et B deux évènements d'un ensemble E.
On appelle **Théorème de la multiplication**, le théorème qui définit la probabilité d'intersection de A et B :

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)}$$

Traduction : La probabilité que A et B se réalisent en même temps est égale au produit de la probabilité conditionnelle de A, sachant que B est réalisé, et de la probabilité que B se réalise.
La probabilité que A et B se réalisent en même temps est aussi égale au produit de la probabilité conditionnelle de B, sachant que A est réalisé, et de la probabilité que A se réalise.

3) Diagramme en arbre



Dans un **diagramme en arbre**, on considère une séquence d'expériences dont chacune a un certain nombre de résultats possibles.

En général, les probabilités associées aux résultats d'une expérience dépendent du résultat de l'expérience précédente. Dans notre exemple, les résultats de l'expérience 2 dépendent des résultats de l'expérience 1.

Dans notre arbre, on considère plusieurs chemins qui s'excluent mutuellement entre eux. Dans notre exemple, la probabilité du chemin 1 est notée $P(A \cap E)$. En appliquant le théorème de la multiplication, la probabilité qu'un chemin se réalise est égale au produit des probabilités de chaque branche du chemin.

A retenir : la probabilité conditionnelle est la proportion de sujets présentant A parmi ceux présentant B
Alors que la probabilité d'une intersection est la proportion de tous les sujets qui présentent à la fois A et B.

4) Formule de Bayes

A partir de la formule de la probabilité conditionnelle et du théorème de la multiplication, on trouve la **Formule de Bayes** notée :

$$\mathbf{P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}}$$

5) Théorème de Bayes

Si on considère des évènements A1, A2 et A3 qui forment une partition de l'ensemble E. Ces évènements sont donc disjoints et leur réunion forme l'ensemble E.
Soit B un évènement quelconque de l'ensemble E.

Cheminement pour arriver au théorème de Bayes :

- ✓ Théorème des probabilités totales appliqué à B :

$$P(B) = P(A1 \cap B) + P(A2 \cap B) + P(A3 \cap B)$$

- ✓ Application du Théorème de la multiplication :

$$P(B) = P(B|A1) \times P(A1) + P(B|A2) \times P(A2) + P(B|A3) \times P(A3)$$

- ✓ Application de la formule de Bayes pour A1 par exemple (l'application pourrait être pour A2 ou A3 également):

$$P(A1|B) = P(A1 \cap B) / P(B) = P(B|A1) \times P(A1) / P(B)$$

Théorème de Bayes :

On remplace P(B) par « P(B|A1) x P(A1) + P(B|A2) x P(A2) +P(B|A3) x P(A3) » dans la formule de Bayes pour obtenir le **Théorème de Bayes :**

$$P(A1|B) = \frac{P(B|A1) \times P(A1)}{P(B|A1) \times P(A1) + P(B|A2) \times P(A2) + P(B|A3) \times P(A3)}$$

6) Evènements indépendants

Deux évènements sont indépendants lorsque la survenue de l'un n'influe pas sur la survenue de l'autre, on a alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

N.B : On a: P(A|B) = P(A) et P(B|A) = P(B) car ils sont indépendants

7) Inclusion et exclusion

- Si un évènement A est inclus dans l'évènement B, cela veut dire que A est un sous-ensemble de B. D'où :

$$A \cap B = A$$

Et donc :

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A)}$$

Pour que A se réalise, il faut obligatoirement que B soit réalisé auparavant, d'où :

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}}$$

On en déduit que, si A est réalisé, alors B est forcément survenu :

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1}$$

Conclusion : Ces deux évènements A et B ne peuvent pas être indépendants car la survenue de A dépend de la survenue de B.

- Si deux évènements A et B sont disjoints, cela veut dire qu'ils ne peuvent pas se produire en même temps :

L'intersection de deux évènements disjoints (=incompatibles) est donc inexistante :

$$\mathbf{P(A \cap B) = 0}$$

D'où :

$$\mathbf{P(A|B) = P(B|A) = 0}$$

Conclusion : Ces deux évènements disjoints A et B ne sont pas indépendants car la survenue de l'un empêche la survenue de l'autre

ATTENTION

Les évènements incompatibles ne peuvent pas se réaliser en même temps : P(A∩B) =0 d'où : P(AUB) = P(A) + P(B).

Les évènements indépendants peuvent survenir en même temps mais la réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre : P(A∩B) = P(A) x P(B)