

UE 4



PROBABILITES



Lois de probabilités Variables aléatoires

By Chewbacca

Variable aléatoire discrète:

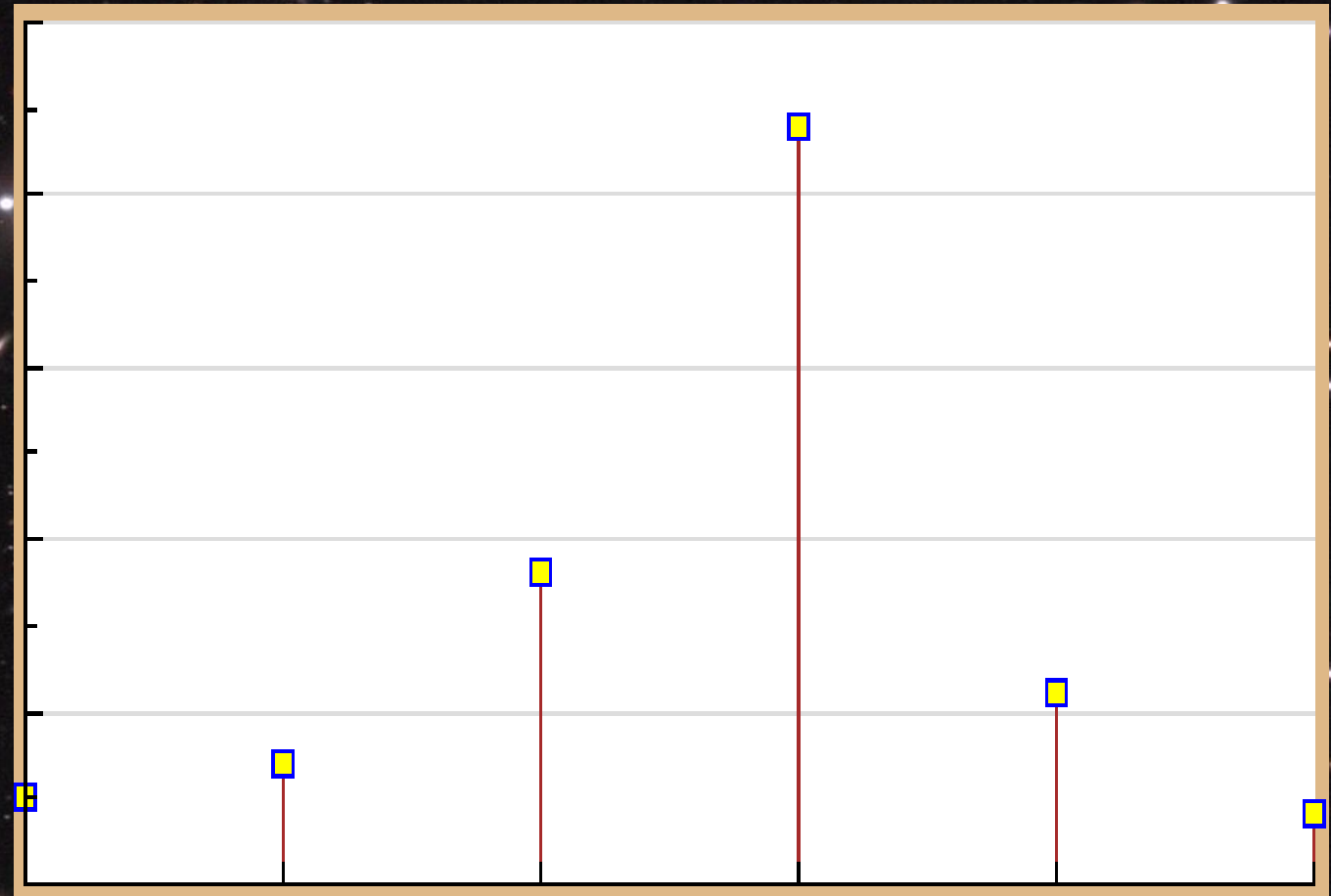
- 1) Fonction de variable**
- 2) Espérance**
- 3) Variance et écart type**
- 4) Fontions de répartition et de distribution**
- 5) Lois de probabilité**



Variable aléatoire discrète: Epreuve dont le résultat est compris dans un ensemble fini ou infini dénombrable.

Représentations des variables aléatoires discrètes: tableau ou diagramme en bâton

x_1	x_2	...	x_n
p_1	p_2	...	p_n



1) Fonction de variable

$Y=g(X)$ = « Y est fonction de X ».

2) Espérance $E(X)$ ou moyenne μ

L'espérance: Tendance centrale de la variable aléatoire et il s'agit d'un indicateur de position sur la distribution de probabilité de X.

$$\mathbf{E(X)=\mu=\sum (x_i p_i)}$$

Moyenne = μ = Valeur moyenne des résultats de l'épreuve

Moyenne de $X = \mu$

Moyenne de X^2 est différente de μ^2

Moyenne de $\frac{1}{X}$ est différente de $\frac{1}{\mu}$

-Théorèmes de l'espérance

$$\mathbf{E(X+k) = E(X) + k}$$

$$\mathbf{E(kX) = k E(X)}$$

$$\mathbf{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$$

The background of the slide is a high-resolution astronomical image of a deep space field. It features a dense distribution of galaxies at various distances and orientations, some appearing as bright, fuzzy clouds and others as more distant, point-like sources. Interspersed among the galaxies are numerous individual stars, many of which exhibit prominent diffraction spikes, characteristic of light from distant celestial objects captured by a telescope. The overall color palette is dominated by the warm tones of galaxies (whites, yellows, oranges) against the stark blackness of the cosmic void.

3) Variance et écart type

- La variance : Indicateur de dispersion

La variance est noté σ^2 ou $\text{Var}(X)$,:

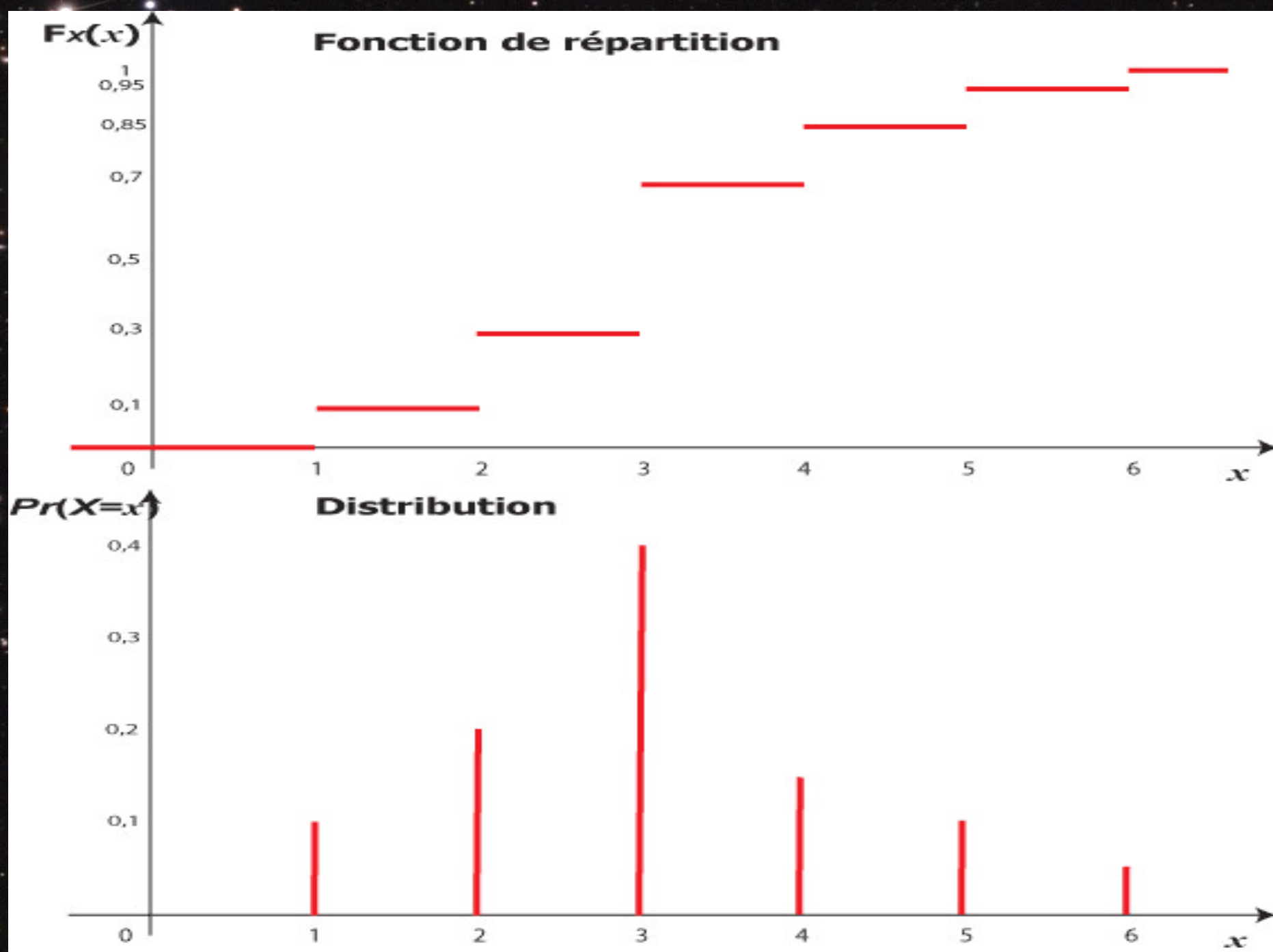
$$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$$

On l'écrit aussi : $\sigma^2 = \sum p_i * (x_i - \mu)^2$

- L'écart type σ de la distribution est la racine carrée de la variance.



4) Fonctions de répartition et de distribution



5) Lois de probabilités discrètes

A deep space photograph showing a vast field of galaxies and stars against a black background. The galaxies are of various shapes and sizes, some appearing as bright, diffuse clouds, others as more structured, spiral or elliptical forms. The stars are numerous, appearing as bright points of light, some with prominent diffraction spikes. The overall scene is a dense, colorful representation of the universe's structure.

❖ **Loi de Bernoulli $B(p)$**


$$P(X = k) = p^k(1 - p)^{1-k}$$

- **Moyenne : $\mu = p$**
- **Variance : $\sigma^2 = p(1-p) = pq$**



QCM
Vous avez 1min!

Voici Elise votre tutrice de Bioch!!

En France, la « navette » Air-France permettant de se déplacer entre Nice et Paris est généralement en retard une fois sur vingt-cinq. Sachant que j'ai un rendez-vous tout suite après mon vol, un éventuel retard me ferait rater mon rendez-vous. Quelle est la probabilité que j'arrive à l'heure à ce rendez-vous?

- A.0,04 B.0,96 C.0,038 D.0,4
E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse B!!!!

- $P(X = 0) = 0,04^0(0,96)^1$

The background of the slide is a high-resolution astronomical image. It features a dense field of stars, many of which appear as bright, multi-pointed diffraction patterns. Interspersed among the stars are numerous galaxies, including several prominent spiral galaxies with distinct arms and some elliptical galaxies. The overall scene is a deep space view, likely from a large-scale astronomical survey.

Loi Binomiale $B(n;p)$


$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

- La moyenne s'écrit : $\mu = np$
- La variance s'écrit : $\sigma^2 = np(1-p)$



QCM
Vous avez 1min30

Et oui c'est Amaury l'autre
prof de Bioch!

Un médicament A donné, entraîne 90% de guérison.. On donne ce médicament 3 fois au même individu, de façon totalement indépendante pour chaque administration. Quelle est la probabilité que le médicament soit efficace 2 fois lors de nos administrations?

- A. 0,027
- B. 0,081
- C. 0,24
- D. On utilise une loi binomiale $B(2 ; 0,9)$
- E. Toutes les réponses sont fausses

Réponse C!!

Loi binomiale ou loi hypergéométrique ?

Pour le savoir, il faut calculer le taux de sondage n/N

Si $n/N \leq 0,10$ on doit donc appliquer la loi binomiale pour l'étude de l'échantillon

Si $n/N \geq 0,10$ on doit donc appliquer la loi hypergéométrique

A deep-field astronomical image showing a vast field of galaxies and stars against a black background. The galaxies are of various shapes and sizes, including spiral, elliptical, and irregular forms, scattered across the frame. Stars appear as bright, multi-pointed sources of light.

❖ Loi hypergéométrique $H(N;D;n)$

$$P(X = k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

Moyenne : $\mu = \frac{nD}{N} = np$

Variance : $\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$ et $\sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) npq$



2

QCM

Vous avez 1min30

Et pout finir ma vengeance anticipée
Alice votre tutrice de Pharma

... mais j'm trop caaa !

Une équipe scientifique fait une commande de 20 microscope à une entreprise. Sur 50 microscope fabriqué au total dans l'entreprise, il y en a 5 défectueux. Mais elle décide tout de même d'envoyer un lot de 20 microscopes aux chercheurs au risque d'envoyer les défectueux. Quelle est la probabilité que les chercheurs ne reçoivent aucun microscope défectueux?

A. $\frac{C_5^5 \times C_{45}^{15}}{C_{50}^{20}}$ B. $1 - \frac{C_5^0 \times C_{45}^{20}}{C_{50}^{20}}$ C. $\frac{C_5^0 \times C_{45}^{20}}{C_{50}^{20}}$ D. $\frac{C_0^5 \times C_{20}^{45}}{C_{20}^{50}}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse B

The background of the slide is a deep space image showing a vast field of galaxies and stars. The galaxies are of various shapes, including spirals, ellipticals, and irregular forms, scattered across the dark cosmic void. Numerous bright stars are visible, each with a characteristic four-pointed diffraction pattern. The overall color palette is dominated by the black of space, with highlights of white, yellow, and orange from the stars and galaxies.

❖ Loi géométrique $G(p)$


$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}$$

- $\mu = \frac{1}{p}$
- $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

QCM

Dans une soirée échangiste, Ophélie rejoint les hommes plus jeunes qu'elle. La probabilité qu'elle rencontre un homme plus vieux est de 0,2. Quelle est la probabilité qu'elle s'envoie en l'air avec un homme plus vieux au bout de 3 personnes ?

- A. 0,13 B. 0,10 C. 0,032 D. La réponse D
E. Toutes les réponses sont fausses

Réponse A

A deep space photograph showing a vast field of galaxies and stars against a black background. The galaxies are of various shapes and sizes, some appearing as bright, diffuse clouds, others as more compact, structured objects. The stars are numerous, appearing as bright points of light with some showing diffraction spikes. The overall scene is a dense, colorful representation of the universe's structure.

Loi de Poisson $P(\lambda)$


$$P(X = \mathbf{k}) = \frac{\lambda^{\mathbf{k}} e^{-\lambda}}{\mathbf{k}!}$$

- $\mu = \sigma^2 = \lambda$

QCM

En moyenne, 2 tuteur donnent cours par heure. Quelle est la probabilité que 3 tuteurs donnent cours en une heure?

A. $\frac{3 e^{-2}}{4}$ B. $\frac{9 e^{-3}}{2}$ C. $\frac{4 e^{-2}}{3}$ D. $\frac{2 e^{-3}}{3}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse C

The background of the slide is a high-resolution astronomical image of a deep space field. It features a dense distribution of galaxies, including spiral, elliptical, and irregular shapes, as well as numerous individual stars. The galaxies are scattered across the frame, with some appearing as bright, diffuse clouds and others as more compact, distant objects. The stars are represented by sharp, bright points of light, some with visible diffraction patterns. The overall color palette is dominated by the dark black of space, with various shades of blue, purple, and white from the celestial bodies.

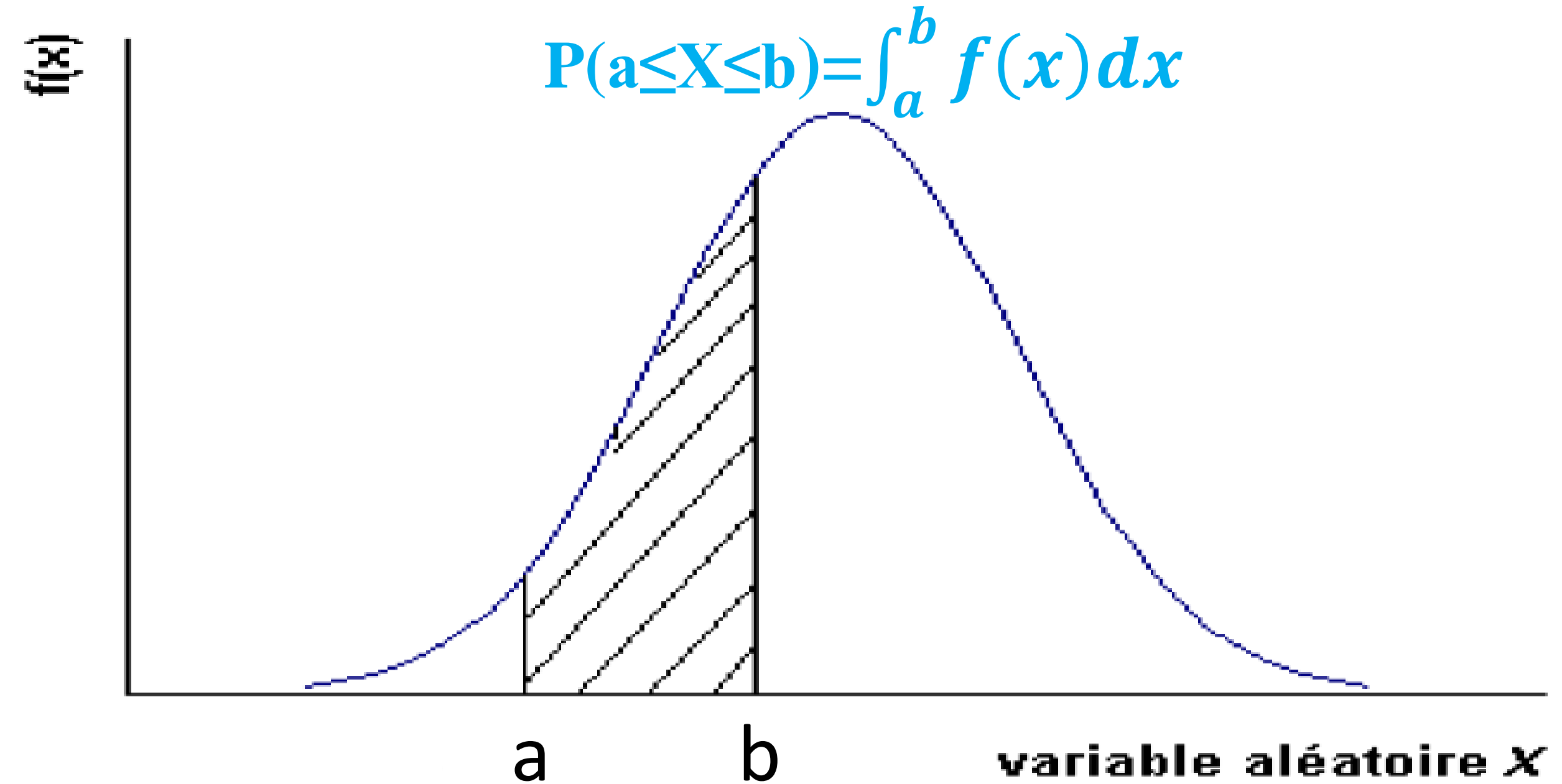
Variable aléatoire continue

Variable aléatoire continue: La variable se définit sur un ensemble indénombrable.

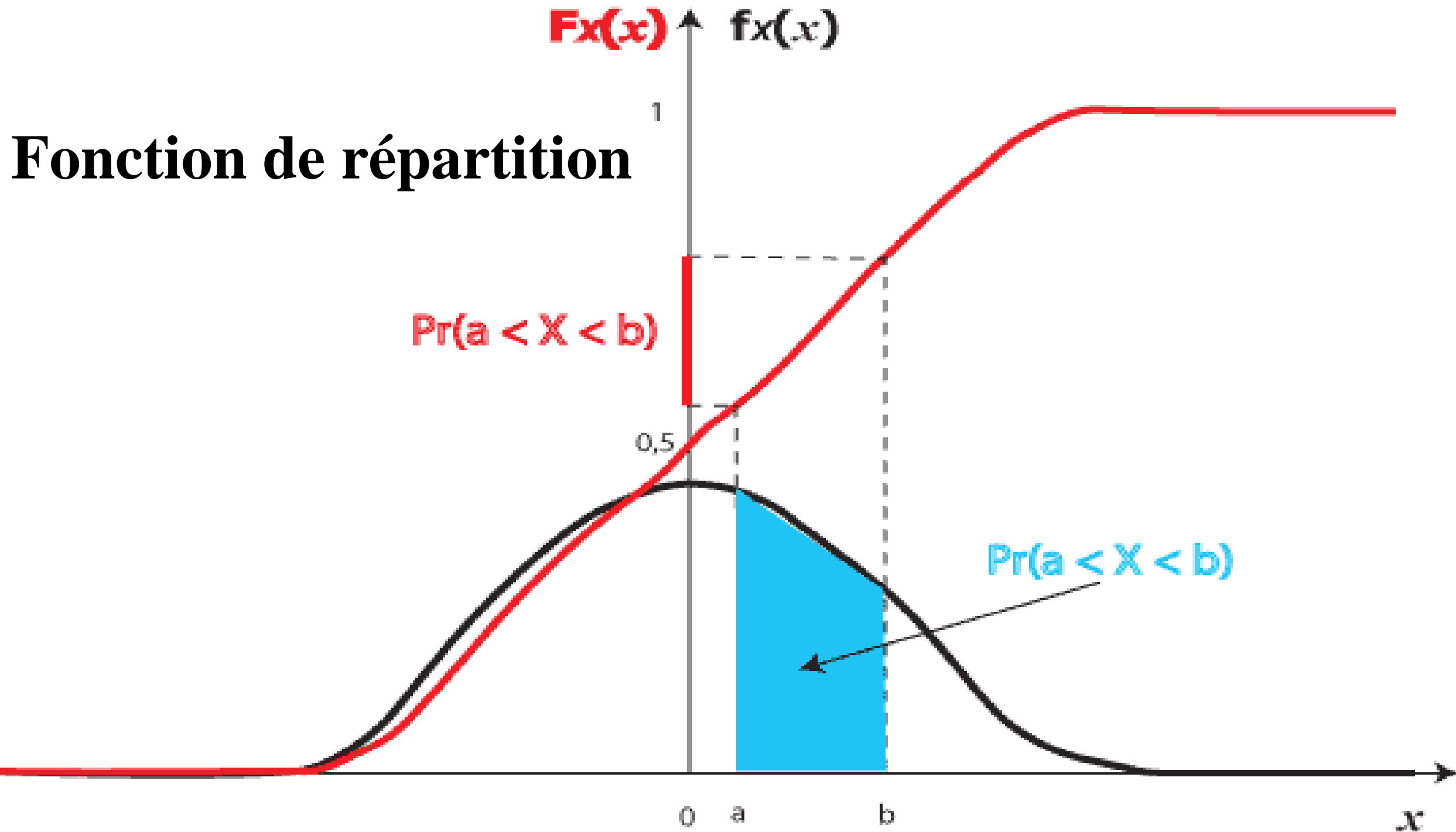
Particularités des v-a continues:

$$P(X=k)=0$$

fonction f de densité de probabilité

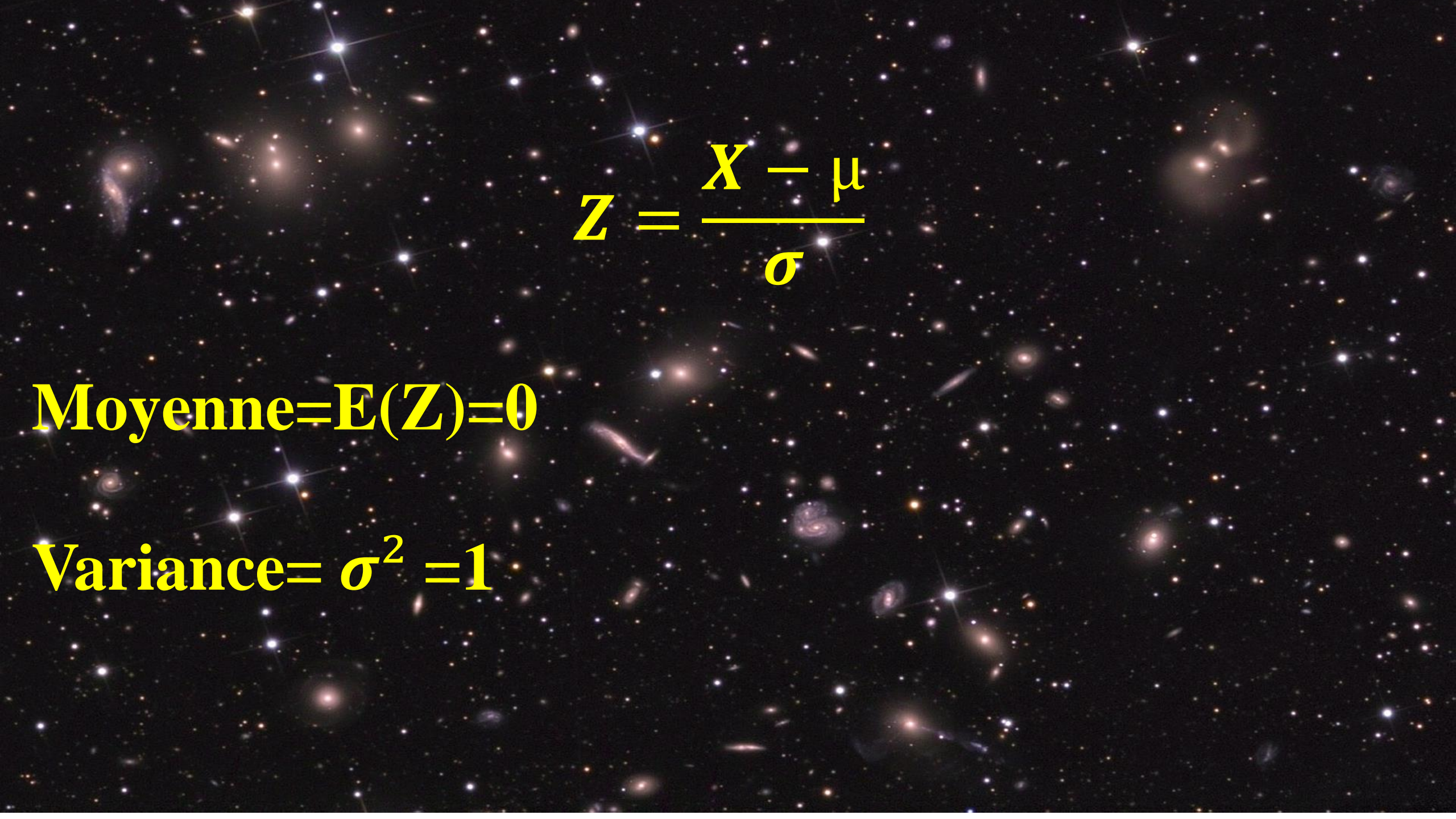


Fonction de répartition



The background of the image is a deep-field astronomical photograph, likely from the Hubble Space Telescope, showing a vast field of galaxies. The galaxies are of various shapes and sizes, including spiral, elliptical, and irregular forms, scattered across a black cosmic background. Many of the galaxies are small and distant, appearing as faint points of light. Some are larger and more prominent, showing distinct structures like spiral arms or elliptical cores. The text 'Variable centrée réduite' is centered in the image in a bold, yellow, serif font. The overall composition suggests a scientific or educational context, possibly related to astronomy or astrophysics.

Variable centrée réduite

The background of the slide is a deep space image showing a vast field of galaxies and stars. The galaxies are of various shapes, including spirals, ellipticals, and irregular forms, scattered across the dark cosmic void. Stars appear as bright, multi-pointed sources of light. The overall color palette is dominated by blacks and greys, with highlights from the celestial objects.
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Moyenne= $E(Z)=0$

Variance= $\sigma^2 = 1$

Loi de probabilités continues

❖ Loi exponentielle $E(\lambda)$

La loi exponentielle permet de décrire un processus de « mortalité » dans lequel le risque instantané (ou taux de défaillance λ) de décès est constant.

- **Fonction de densité** : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- $P(X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$
- **Espérance**= $\mu = \frac{1}{\lambda}$
- **Variance**= $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

QCM

On étudie la durée de vie d'un canard borgne. Son taux de défaillance est égal à 2. Quelle est la probabilité qu'il meurt avant 3 ans?

A. $1 - e^{-2}$

B. $1 - e^{-3}$

C. e^{-3}

D. $1 - e^{-6}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse D

Lien entre la loi de Poisson et la loi exponentielle:

Si un évènement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ , alors le temps qui s'écoulera entre deux réalisations consécutives de l'évènement est distribué selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\lambda}$. Le temps qui s'écoule entre deux réalisations est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

QCM

Le nombre de personnes qui consultent aux urgences se distribue selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda=2$ visites toutes les 20 minutes. Combien de temps en minutes s'écoulera t'il entre deux visites?

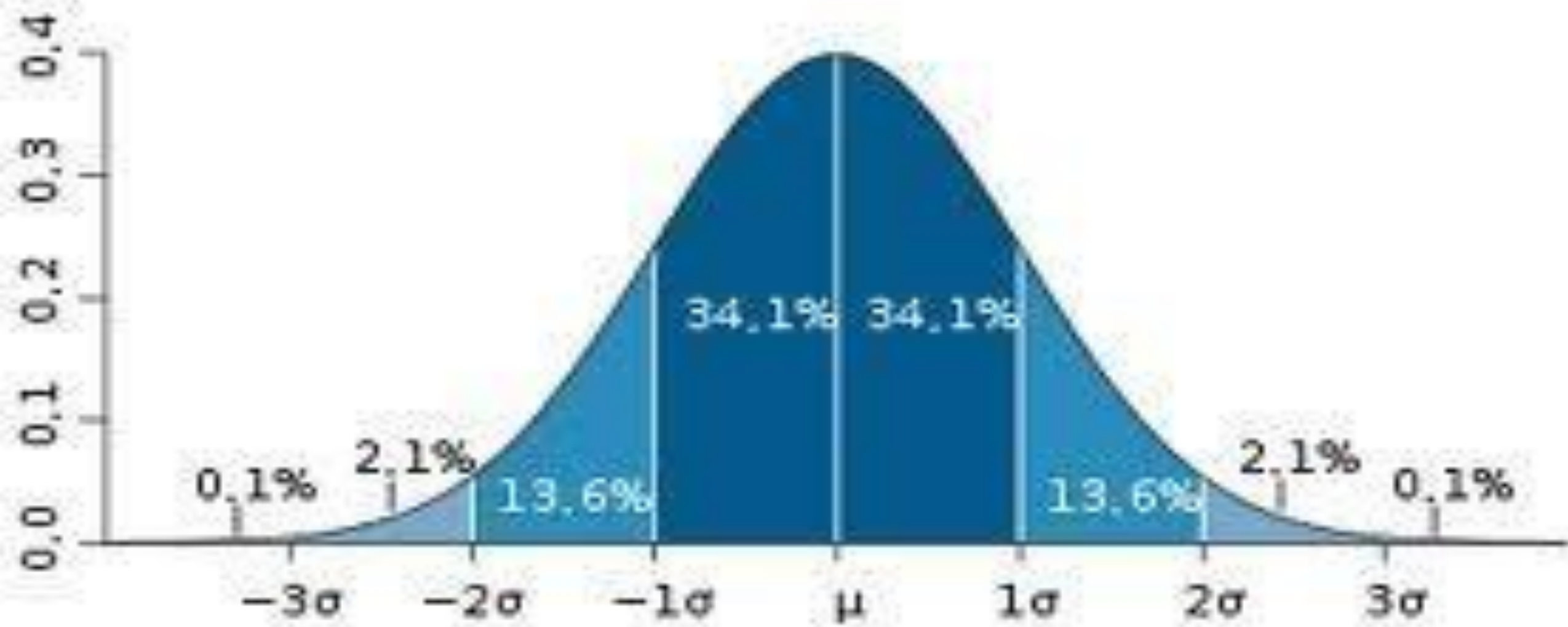
A. 10 B. 15 C. 20 D. 30

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse A

The background of the slide is a high-resolution astronomical image, likely from a space telescope. It shows a dense field of galaxies at various distances and orientations. Some galaxies are bright and clear, showing spiral or elliptical structures, while others are faint and distant. Interspersed among the galaxies are numerous individual stars, some of which appear as bright, multi-pointed sources of light due to diffraction. The overall color palette is dominated by the yellows and oranges of distant light, set against the deep black of space.

Loi normale $N(\mu ; \sigma)$



Soit la loi normale de paramètres $(\mu ; \sigma)$, il faut connaître certaines valeurs :

- $P(X < \mu - 1,65\sigma) = 5\%$ et $P(\mu + 1,65\sigma < X) = 5\%$**
- $P(X < \mu - 1,96\sigma) = 2,5\%$ et $P(\mu + 1,96\sigma < X) = 2,5\%$**
- $P(X < \mu - 2,58\sigma) = 0,5\%$ et $P(\mu + 2,58\sigma < X) = 0,5\%$**
- $P(X < \mu - 3,30\sigma) = 0,05\%$ et $P(\mu + 3,30\sigma < X) = 0,05\%$**



- Loi normale centrée réduite : $N(0 ; 1)$

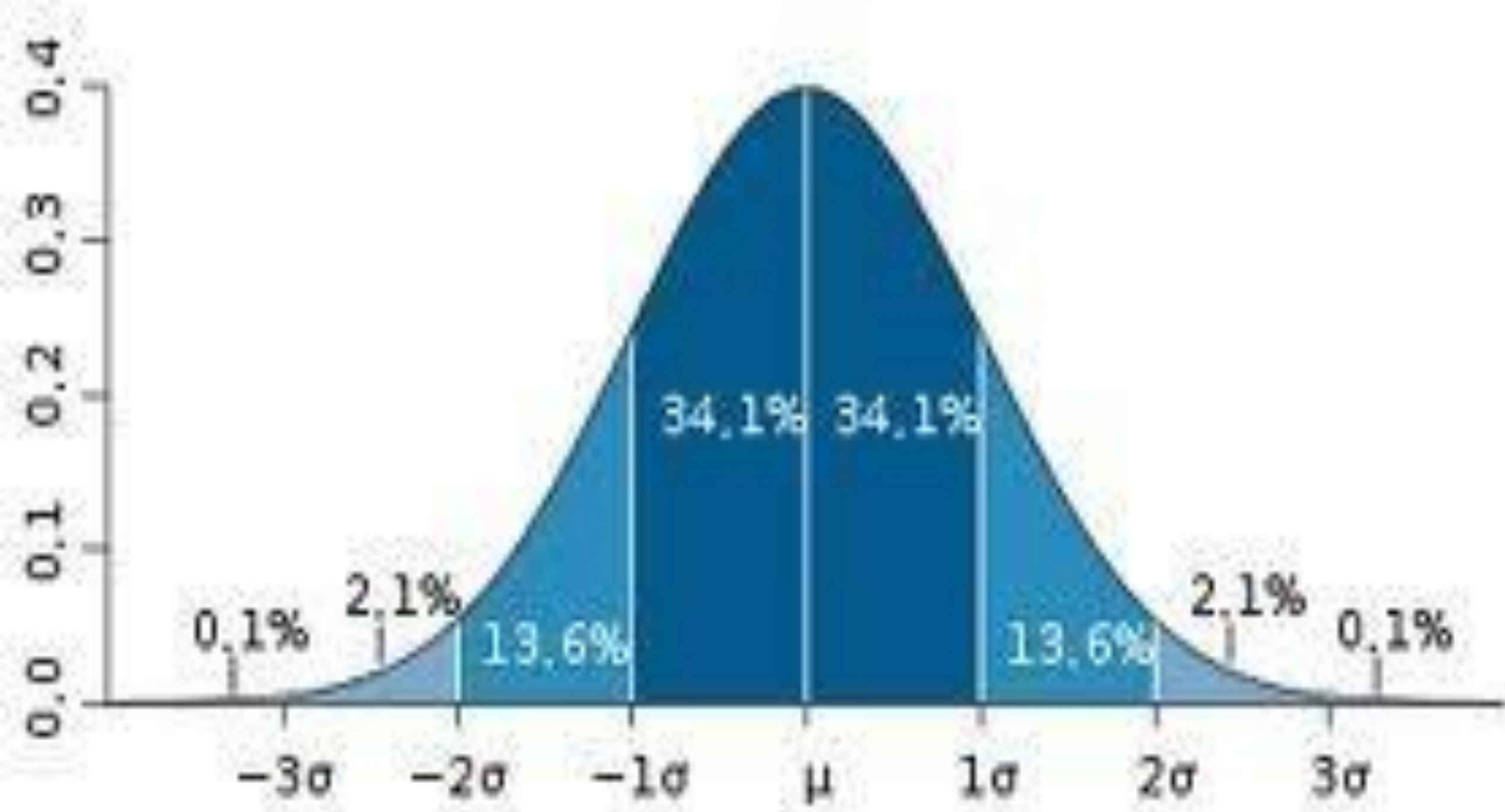
-

- **La loi Normale centrée réduite a pour paramètres : moyenne = 0 et variance = 1**

- **$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$**

Table de la loi normale centrée réduite: $P(Z \leq d)$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577



Approximations

**Soit un phénomène qui suit une loi Binomiale
 $B(n ; p)$**

Si : $n > 50$, $p \leq 0,1$ et $np < 5$

**Alors la loi de Poisson permet d'approximer la loi
Binomiale de la manière suivante :**

$B(n, p) \rightarrow P(\lambda = np)$

**Soit un phénomène qui suit une loi Binomiale
 $B(n ; p)$**

Si $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, (avec $q=1-p$)

**Alors la loi Normale permet d'approximer la loi
Binomiale de la manière suivante :**

$$\mathbf{B(n ; p) \longrightarrow N(np ; \sqrt{npq})}$$

**Soit un phénomène qui suit une loi de
Poisson $P(\lambda)$**

Si $\lambda > 25$

**Alors la loi Normale permet d'approximer la
loi de Poisson de la manière suivante :**

$$P(\lambda) \rightarrow N(\lambda ; \sqrt{\lambda})$$

QCM

On demande à un chirurgien en urologie de réaliser un « allongement de chybres » (terme non scientifique) 10 fois d'affilée de manière totalement indépendante. La probabilité d'avoir un pénis allongé de plus de 3cm est de 0,5. La probabilité d'avoir 5 bites allongées de plus de 3cm est donnée par quelle loi?

- A. Elle peut être approximer par la loi normale $N(5 ; 5)$
- B. Elle peut être approximer par la loi normale $N(5 ; 25)$
- C. Elle peut être approximer par la loi de poisson $P(5)$
- D. Elle peut être approximer par la loi de poisson $P(\sqrt{5})$
- E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse A

C'est la fin!!!!

BB-8

