UE 4

PROBABILITES

PACES
TUTORAT NIÇOIS
Faculté de Médecine de Nice

Lois de probabilités
Variables aléatoires

By Chewbacca

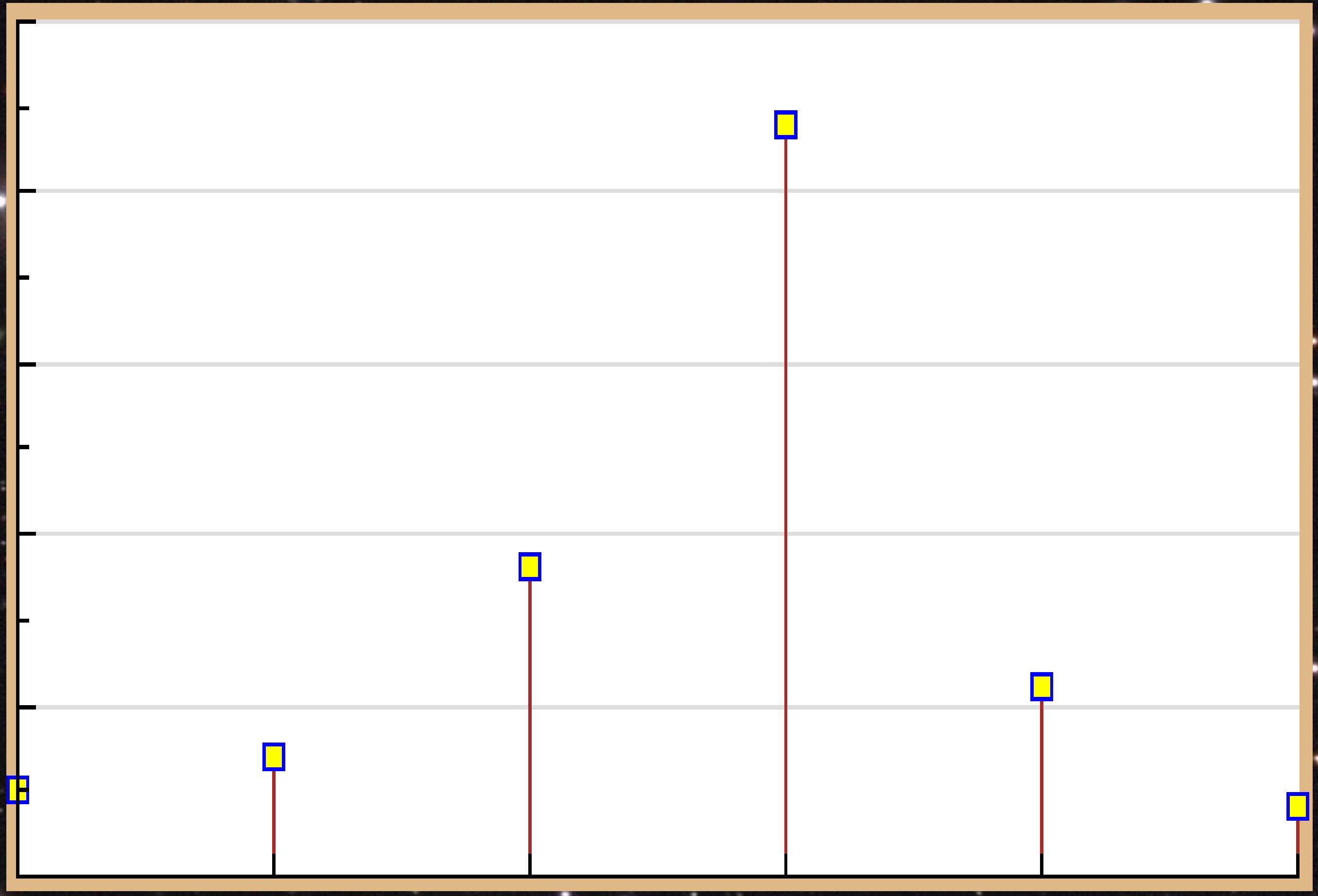
Variable aléatoire discrète:

1) Fonction de variable
2) Espérance
3) Variance et écart type
4) Fontions de répartition et de distribution
5) Lois de probabilité

<u>**Variable aléatoire discrète:**</u> **Epreuve dont le résultat est compris dans un ensemble fini ou infini dénombrable.**

Représentations des variables aléatoires discrètes: tableau ou diagramme en bâton

x1	x2	…	xn
p1	p2	…	pn



1) Fonction de variable

Y=g(X) = « Y est fonction de X ».

2) Espérance E(X) ou moyenne μ

<u>L'espérance</u>: Tendance centrale de la variable aléatoire et il s'agit d'un indicateur de position sur la distribution de probabilité de X.

$$E(X) = \mu = \sum (x_i p_i)$$

Moyenne= μ= Valeur moyenne des résultats de l'épreuve

Moyenne de X = μ

Moyenne de X^2 est différente de μ^2

Moyenne de $\frac{1}{X}$ est différente de $\frac{1}{\mu}$

-Théorèmes de l’espérance

$$E(X+k) = E(X) + k$$

$$E(kX) = k\,E(X)$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

3) Variance et écart type

- La variance : Indicateur de dispersion

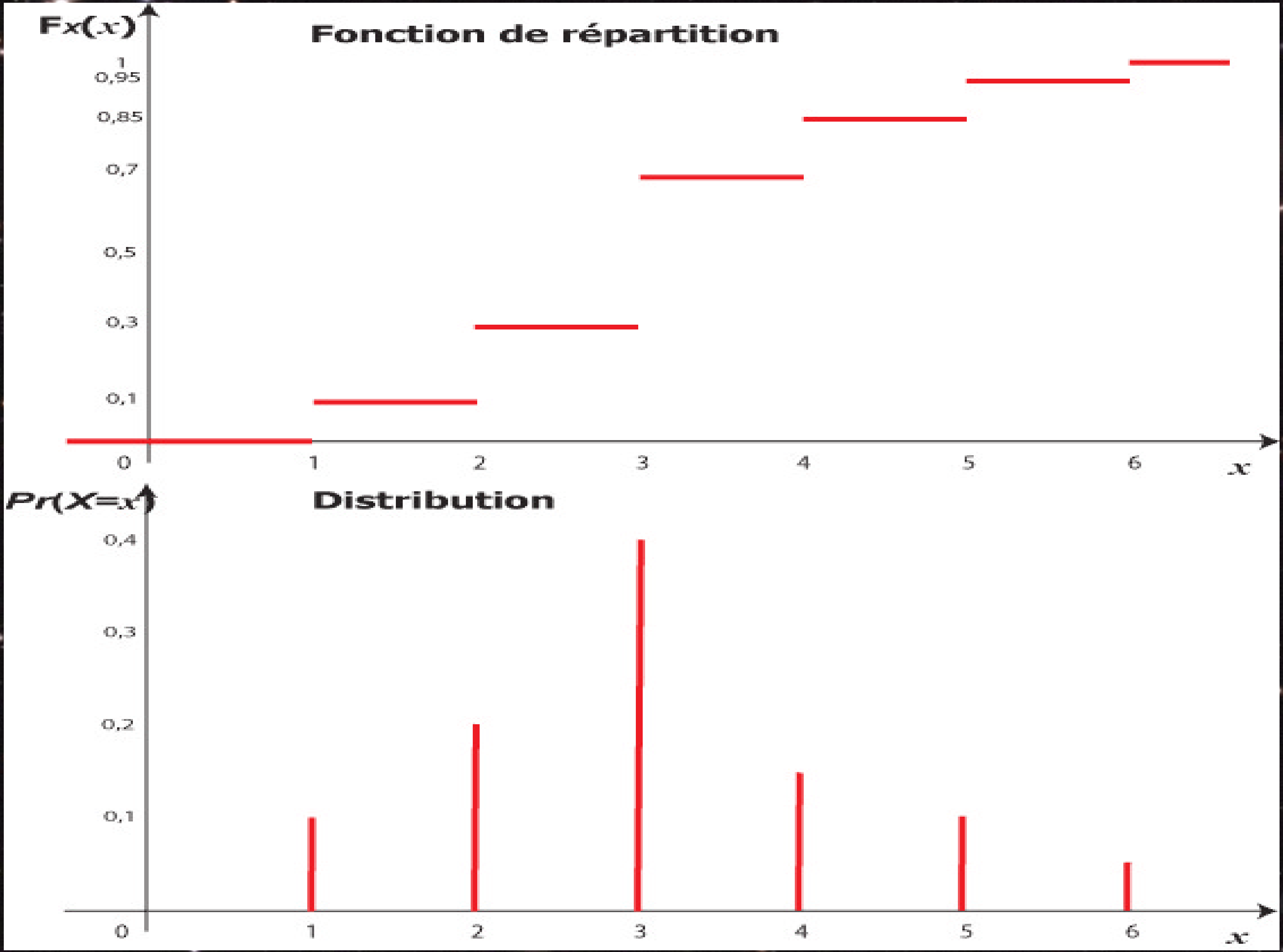
La variance est noté σ^2 ou Var(X),:

$$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$$

On l'écrit aussi : $\sigma^2 = \sum pi * (xi - \mu)^2$

- L'écart type σ de la distribution est la racine carrée de la variance.

4) Fontions de répartition et de distribution


Fx(x)
Fonction de répartition
1
0,95
0,85
0,7
0,5
0,3
0,1
0
1
2
3
4
5
6
x
Pr(X=x)
Distribution
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
6
x

5) Lois de probabilités discrètes

❖ Loi de Bernoulli B(p)

$$P(X = k) = p^k(1 - p)^{1-k}$$

- **Moyenne : $\mu = p$**
- **Variance : $\sigma^2 = p\,(1-p) = pq$**

QCM

Vous avez 1min!

Voici Elise votre tutrice de Bioch!!

En France, la « navette » Air-France permettant de se déplacer entre Nice et Paris est généralement en retard une fois sur vingt-cinq. Sachant que j'ai un rendez-vous tout suite après mon vol, un éventuel retard me ferait rater mon rendez-vous. Quelle est la probabilité que j'arrive à l'heure à ce rendez-vous?

A.0,04 B.0,96 C.0,038 D.0,4

E. Les réponses A, B, C et D sont fausse

Réponse B!!!!

- $\mathbf{P(X = 0) = 0,04^0(0,96)^1}$

Loi Binomiale B(n;p)

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

- La moyenne s’écrit : $\mu = np$
- La variance s’écrit: $\sigma^2 = np(1-p)$

QCM
Vous avez 1min30

Et oui c’est Amaury l’autre prof de Bioch!

Un médicament A donné, entraine 90% de guérison.. On donne ce médicament 3 fois au même individu, de façon totalement indépendante pour chaque administration. Quelle est la probabilité que le médicament soit efficace 2 fois lors de nos administrations?

A. 0,027
B. 0,081
C. 0,24
D. On utilise une loi binomiale B(2 ; 0,9)
E. Toutes les réponses sont fausses

Réponse C!!

Loi binomiale ou loi hypergéométrique ?

Pour le savoir, il faut calculer le taux de sondage n/N

Si n/N $\leq$ 0,10 on doit donc appliquer la loi binomiale pour l'étude de l'échantillon

Si n/N $\geq$ 0,10 on doit donc appliquer la loi hypergéométrique

❖ Loi hypergéométrique H(N;D;n)

$$P(X = k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

Moyenne : $\mu = \frac{nD}{N} = np$

Variance : $\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$ et $\sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) npq$

QCM
Vous avez 1min30

Et pout finir ma vengeance anticipée
Alice votre tutrice de Pharma

Une équipe scientifique fait une commande de 20 microscope à une entreprise. Sur 50 microscope fabriqué au total dans l'entreprise, il y en a 5 défectueux. Mais elle décide tout de même d'envoyer un lot de 20 microscopes aux chercheurs au risque d'envoyer les défectueux. Quelle est la probabilité que les chercheurs ne reçoivent aucun microscope défectueux?

A. $\frac{C_5^5 \times C_{45}^{15}}{C_{50}^{20}}$ B. $1 - \frac{C_5^0 \times C_{45}^{20}}{C_{50}^{20}}$ C. $\frac{C_5^0 \times C_{45}^{20}}{C_{50}^{20}}$ D. $\frac{C_0^5 \times C_{20}^{45}}{C_{20}^{50}}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse B

❖ Loi géométrique G(p)

$$\mathbf{P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}}$$

- $\mu = \frac{1}{p}$
- $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

QCM

Dans une soirée échangiste, Ophélie rejoint les hommes plus jeunes qu'elle. La probabilité qu'elle rencontre un homme plus vieux est de 0,2. Quelle est la probabilité qu'elle s'envoit en l'air avec un homme plus vieux au bout de 3 personnes ?

A.0,13 B. 0,10 C. 0,032 D. La réponse D

E. Toutes les réponses sont fausses

Réponse A


Loi de Poisson P(λ)

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- $\mu = \sigma^2 = \lambda$

QCM

En moyenne, 2 tuteur donnent cours par heure. Quelle est la probabilité que 3 tuteurs donnent cours en une heure?

A. $\mathbf{\frac{3\,e^{-2}}{4}}$ B. $\mathbf{\frac{9\,e^{-3}}{2}}$ C. $\mathbf{\frac{4\,e^{-2}}{3}}$ D. $\mathbf{\frac{2\,e^{-3}}{3}}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

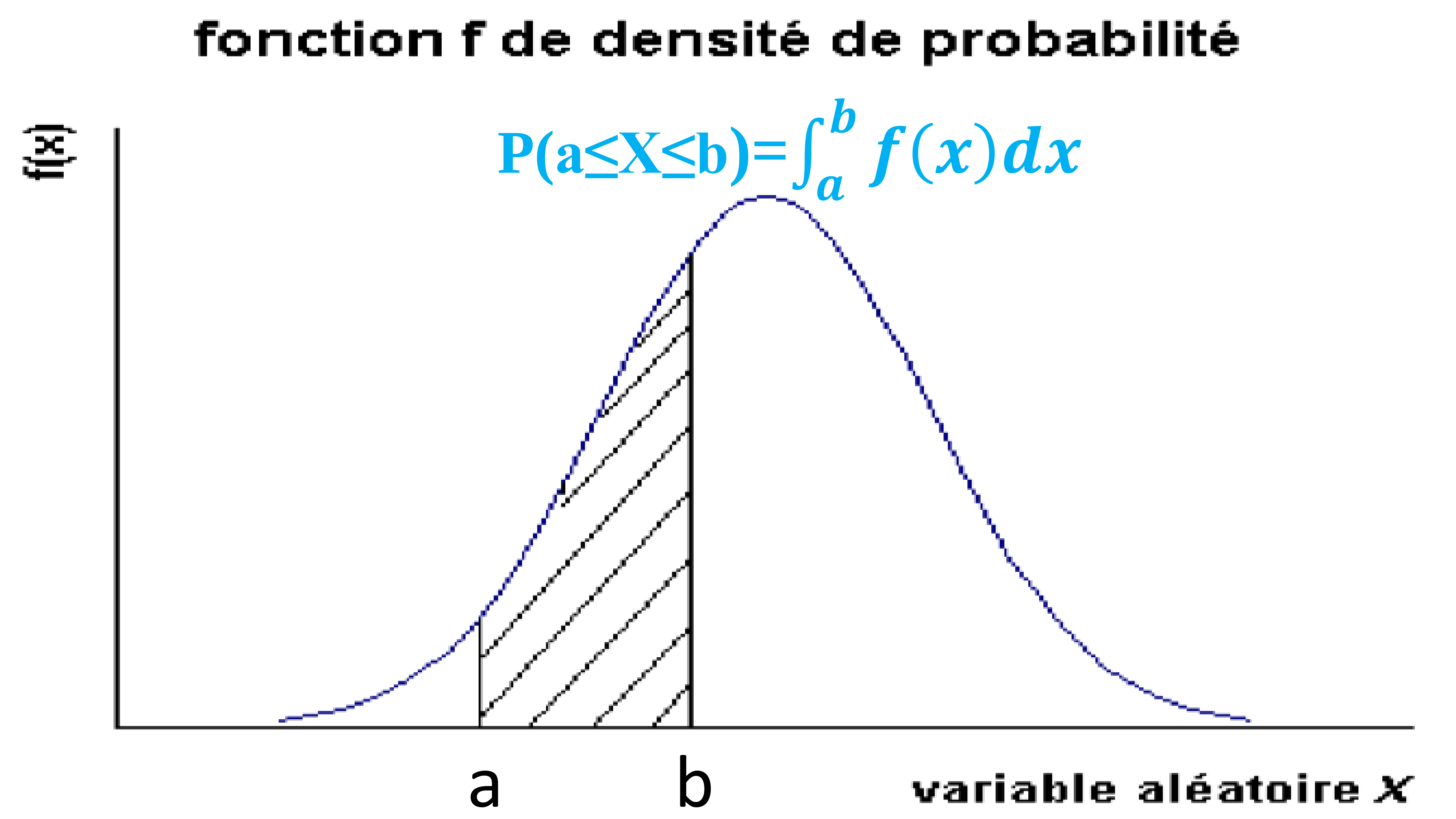
Réponse C

Variable aléatoire continue

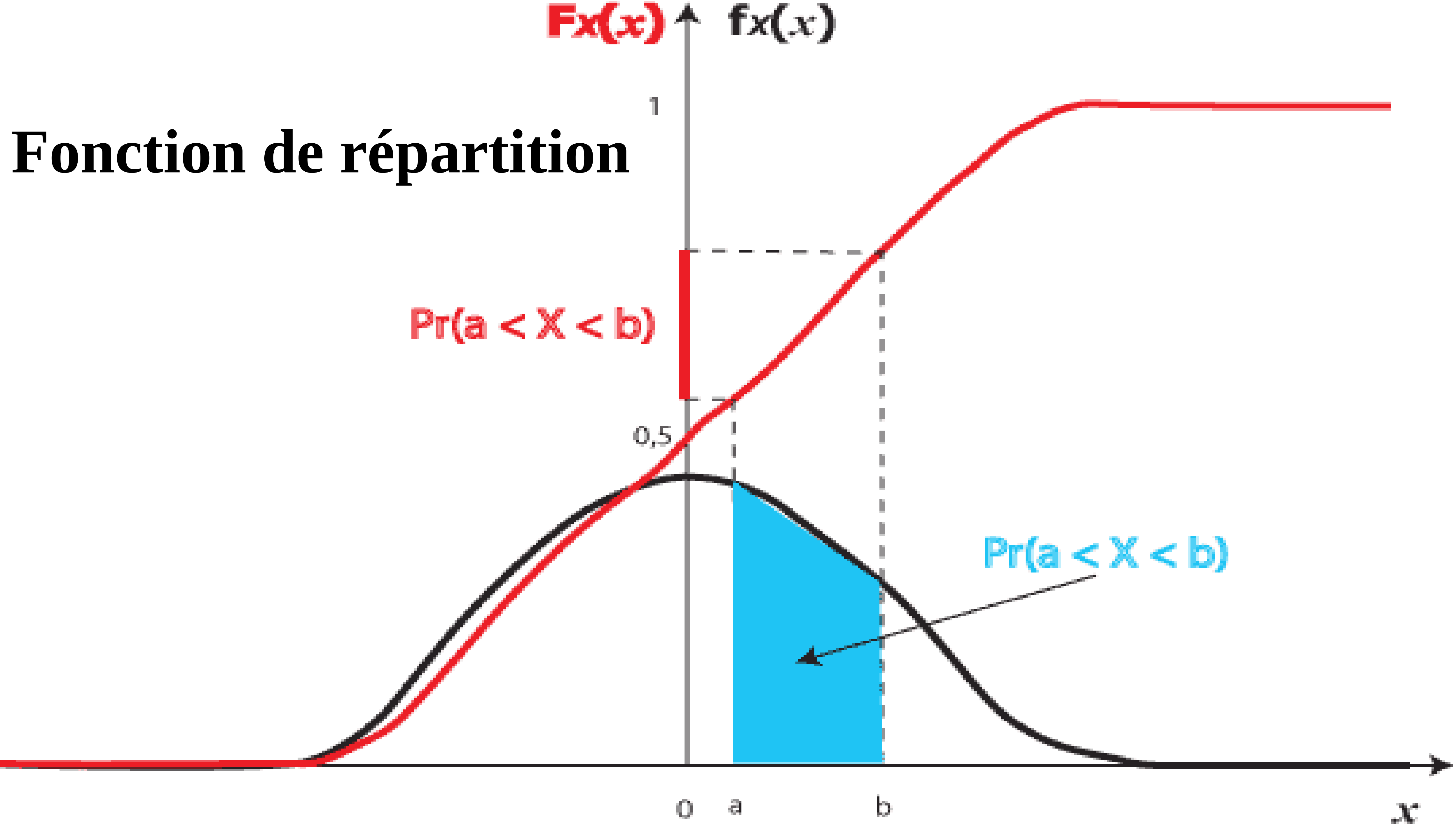
Variaable aléatoire continue: La variable se définit sur un ensemble indénombrable.

Particularités des v-a continues:

$$P(X=k)=0$$


fonction f de densité de probabilité
f(x)
$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$
a
b
variable aléatoire X

Fonction de répartition

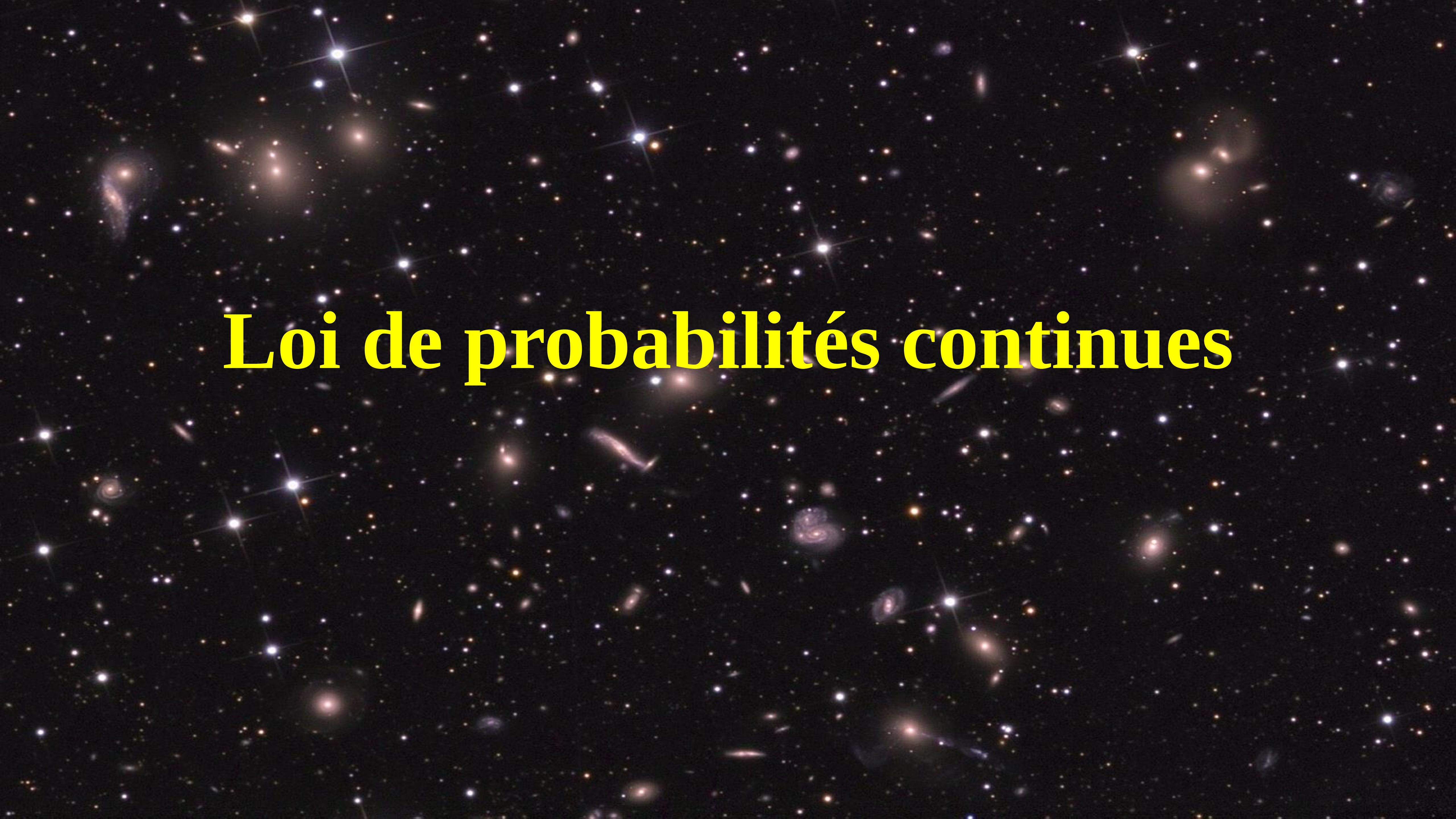


Variable centrée réduite

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Moyenne=E(Z)=0

Variance= σ^2 **=1**



Loi de probabilités continues

❖Loi exponentielle E(λ)

La loi exponentielle permet de décrire un processus de « mortalité » dans lequel le risque instantané (ou taux de défaillance λ) de décès est constant.

- **Fonction de densité : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$**
- $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- $P(X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$
- **Espérance=** $\mu = \frac{1}{\lambda}$
- **Variance=** $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

QCM

On étudie la durée de vie d’un canard borgne. Son taux de défaillance est égal à 2. Quelle est la probabilité qu’il meurt avant 3 ans?

A. $\mathbf{1-e^{-2}}$ B. $\mathbf{1-e^{-3}}$ C. $\mathbf{e^{-3}}$ D. $\mathbf{1-e^{-6}}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse D

Lien entre la loi de Poisson et la loi exponentielle:

Si un évènement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ, alors le temps qui s'écoulera entre deux réalisations consécutives de l'évènement est distribué selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\lambda}$. Le temps qui s'écoule entre deux réalisations est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

QCM

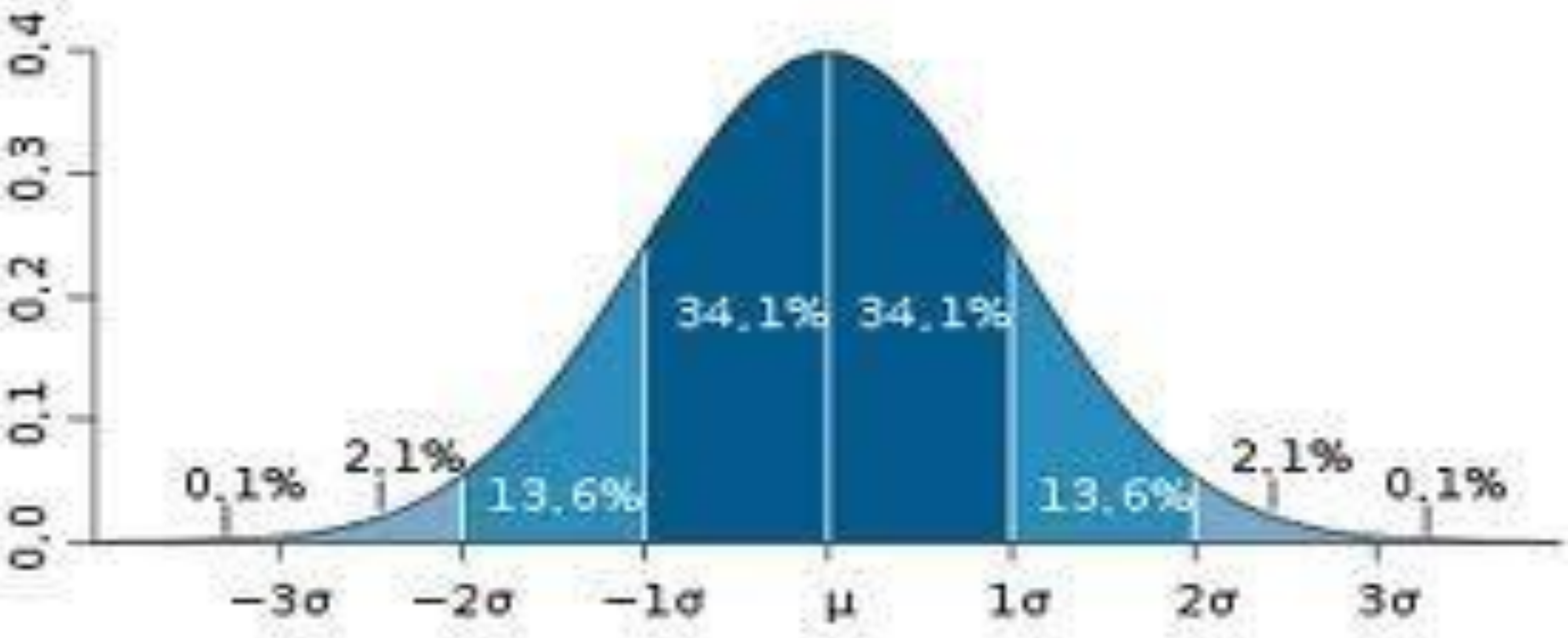
Le nombre de personnes qui consultent aux urgences se distribue selon une loi de Poisson de paramètre λ=2 visites toutes les 20 minutes. Combien de temps en minutes s'écoulera t'il entre deux visites?

A. 10 B. 15 C. 20 D. 30

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse A

Loi normale $N(\mu\ ;\ \sigma)$


0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
34,1%
34,1%
13,6%
13,6%
2,1%
2,1%
0,1%
0,1%
−3σ
−2σ
−1σ
μ
1σ
2σ
3σ

Soit la loi normale de paramètres (μ ; σ), il faut connaître certaines valeurs :

- $P(X < \mu - 1,65\sigma)$=5% **et** $P(\mu + 1,65\sigma < X) = 5\%$

- $P(X < \mu - 1,96\sigma)$=2,5% **et** $P(\mu + 1,96\sigma < X) = 2,5\%$

- $P(X < \mu - 2,58\sigma)$=0,5% **et** $P(\mu + 2,58\sigma < X) = 0,5\%$

- $P(X < \mu - 3,30\sigma)$=0,05% **et** $P(\mu + 3,30\sigma < X) = 0,05\%$

- Loi normale centrée réduite : N(0 ;1)

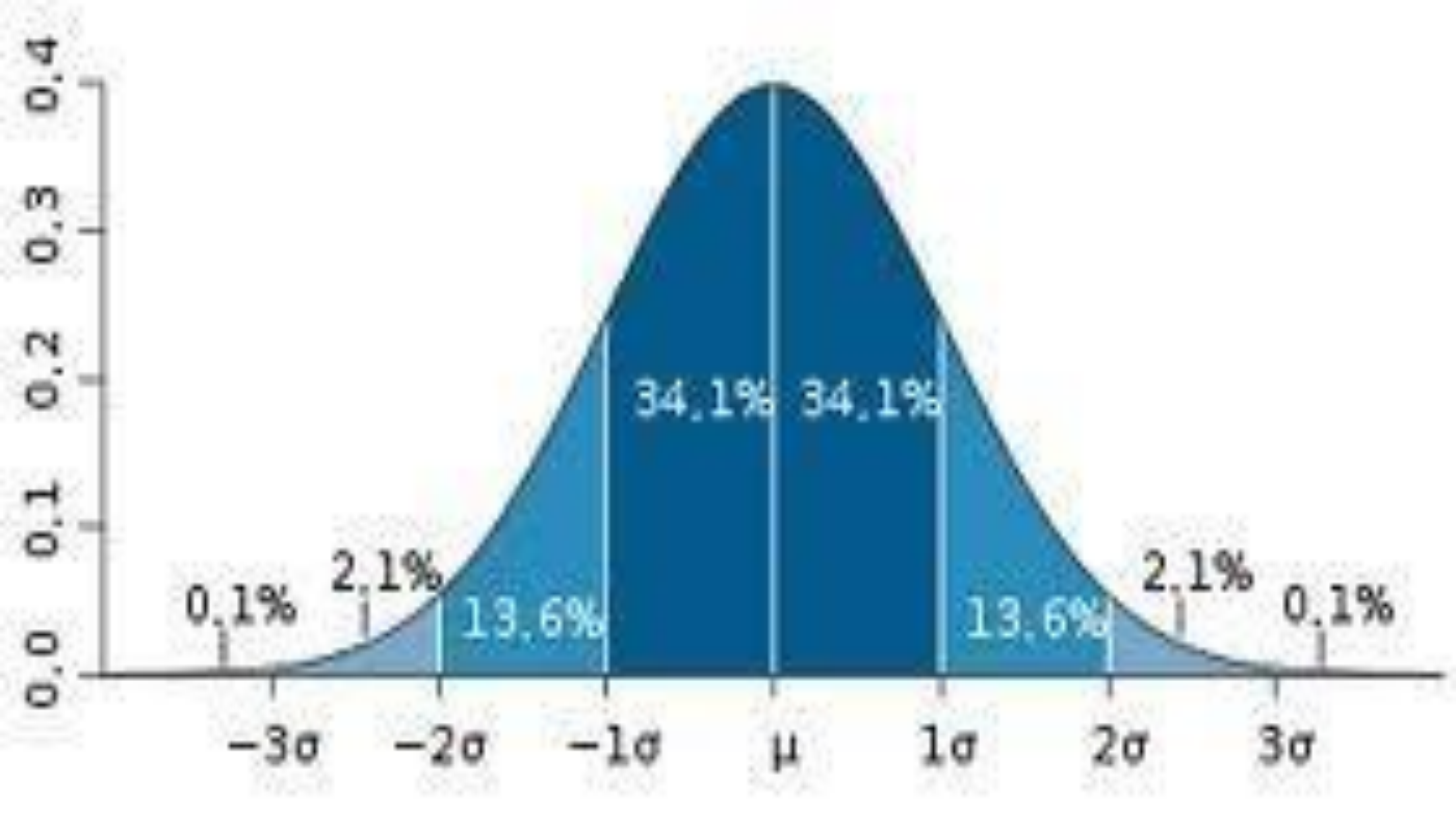
-

- **La loi Normale centrée réduite a pour paramètres : moyenne = 0 et variance = 1**

- $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

Table de la loi normale centrée réduite: $P(Z \leq t)$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577


0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
34,1%
34,1%
13,6%
13,6%
2,1%
2,1%
0,1%
0,1%
−3σ
−2σ
−1σ
μ
1σ
2σ
3σ

Approximations

Soit un phénomène qui suit une loi Binomiale B(n ;p)

Si : $n > 50$, $p \leq 0,1$ et $np < 5$

Alors la loi de Poisson permet d'approximer la loi Binomiale de la manière suivante :

$B(n,p) \rightarrow P(\lambda = np)$

Soit un phénomène qui suit une loi Binomiale B(n ;p)

Si np ≥ 5 et nq ≥ 5, (avec q=1-p)

Alors la loi Normale permet d'approximer la loi Binomiale de la manière suivante :

B(n ;p) → N(np ; $\sqrt{npq}$)

Soit un phénomène qui suit une loi de Poisson $P(\lambda)$

Si $\lambda > 25$

Alors la loi Normale permet d'approximer la loi de Poisson de la manière suivante :

$P(\lambda) \rightarrow N(\lambda\ ;\ \sqrt{\lambda})$

QCM

On demande à un chirurgien en urologie de réaliser un « allongement de chybre » (terme non scientifique) 10 fois d’affilée de manière totalement indépendante. La probabilité d’avoir un pénis allongé de plus de 3cm est de 0,5. La probabilité d’avoir 5 bites allongées de plus de 3cm est donnée par quelle loi?

A. Elle peut être approximer par la loi normale N(5 ; 5)
B. Elle peut être approximer par la loi normale N(5 ; 25)
C. Elle peut être approximer par la loi de poisson P(5)
D. Elle peut être approximer par la loi de poisson P($\sqrt{5}$)
E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse A

C’est la fin!!!!