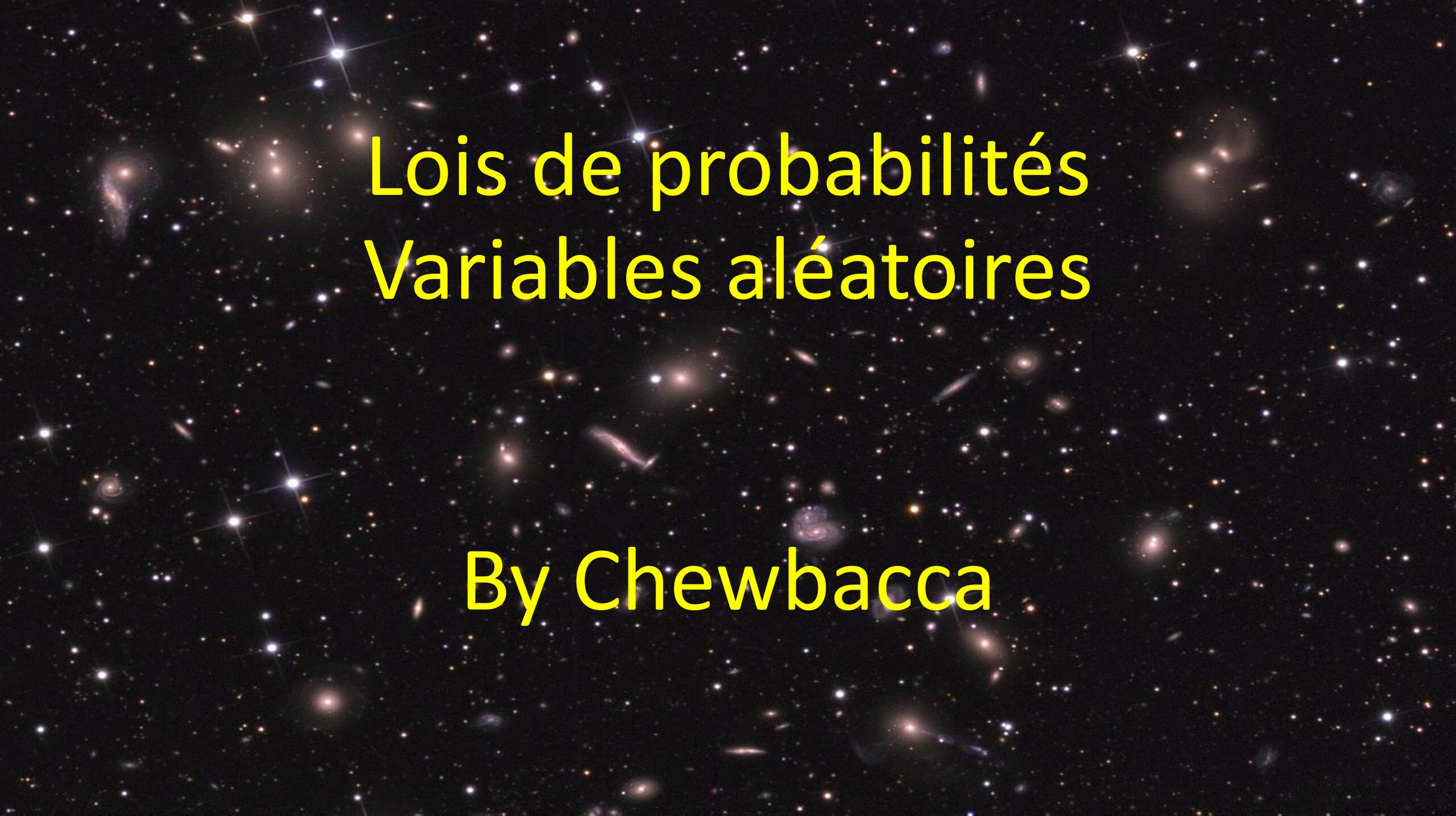


UE 4



PROBABILITES



Lois de probabilités Variables aléatoires

By Chewbacca

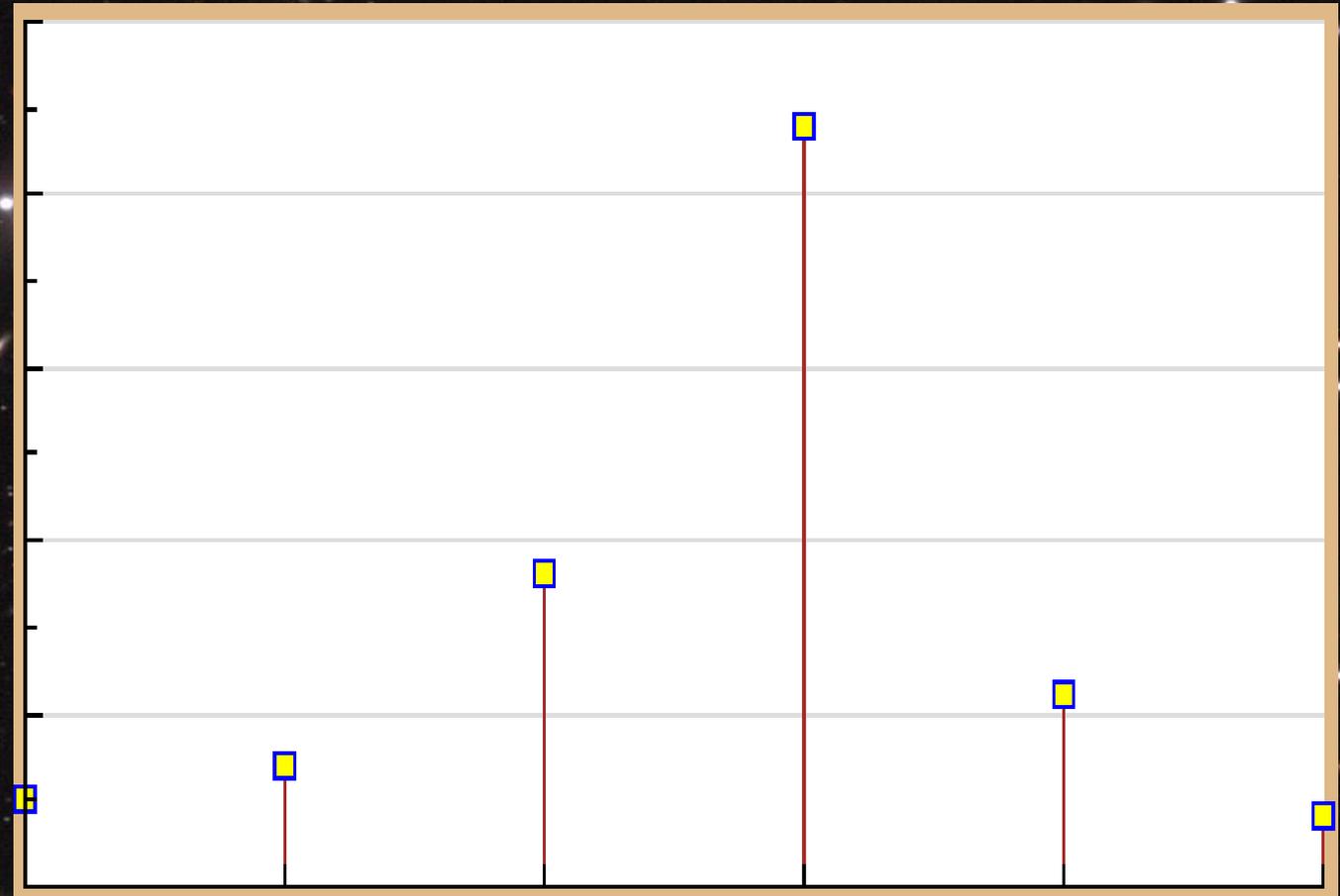
Variable aléatoire discrète:

- 1) Fonction de variable**
- 2) Espérance**
- 3) Variance et écart type**
- 4) Fontions de répartition et de distribution**
- 5) Lois de probabilité**

Variable aléatoire discrète: Epreuve dont le résultat est compris dans un ensemble fini ou infini dénombrable.

Représentations des variables aléatoires discrètes: tableau ou diagramme en bâton

x_1	x_2	...	x_n
p_1	p_2	...	p_n



1) Fonction de variable

$Y=g(X)$ = « Y est fonction de X ».



2) Espérance $E(X)$ ou moyenne μ

L'espérance: Tendance centrale de la variable aléatoire et il s'agit d'un indicateur de position sur la distribution de probabilité de X.

$$\mathbf{E(X) = \mu = \sum (x_i p_i)}$$

Moyenne = μ = Valeur moyenne des résultats de l'épreuve

Moyenne de $X = \mu$

Moyenne de X^2 est différente de μ^2

Moyenne de $\frac{1}{X}$ est différente de $\frac{1}{\mu}$

-Théorèmes de l'espérance

$$\mathbf{E(X+k) = E(X) + k}$$

$$\mathbf{E(kX) = k E(X)}$$

$$\mathbf{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$$

A deep space photograph of a galaxy cluster, likely the Coma Cluster, showing a vast field of galaxies and stars. The galaxies are of various shapes and sizes, including spiral, elliptical, and irregular forms. The stars are scattered throughout the field, with some appearing as bright, multi-pointed sources. The background is a dark, blackish space filled with these celestial objects.

3) Variance et écart type

- **La variance : Indicateur de dispersion**

La variance est noté σ^2 ou $\text{Var}(X)$, :

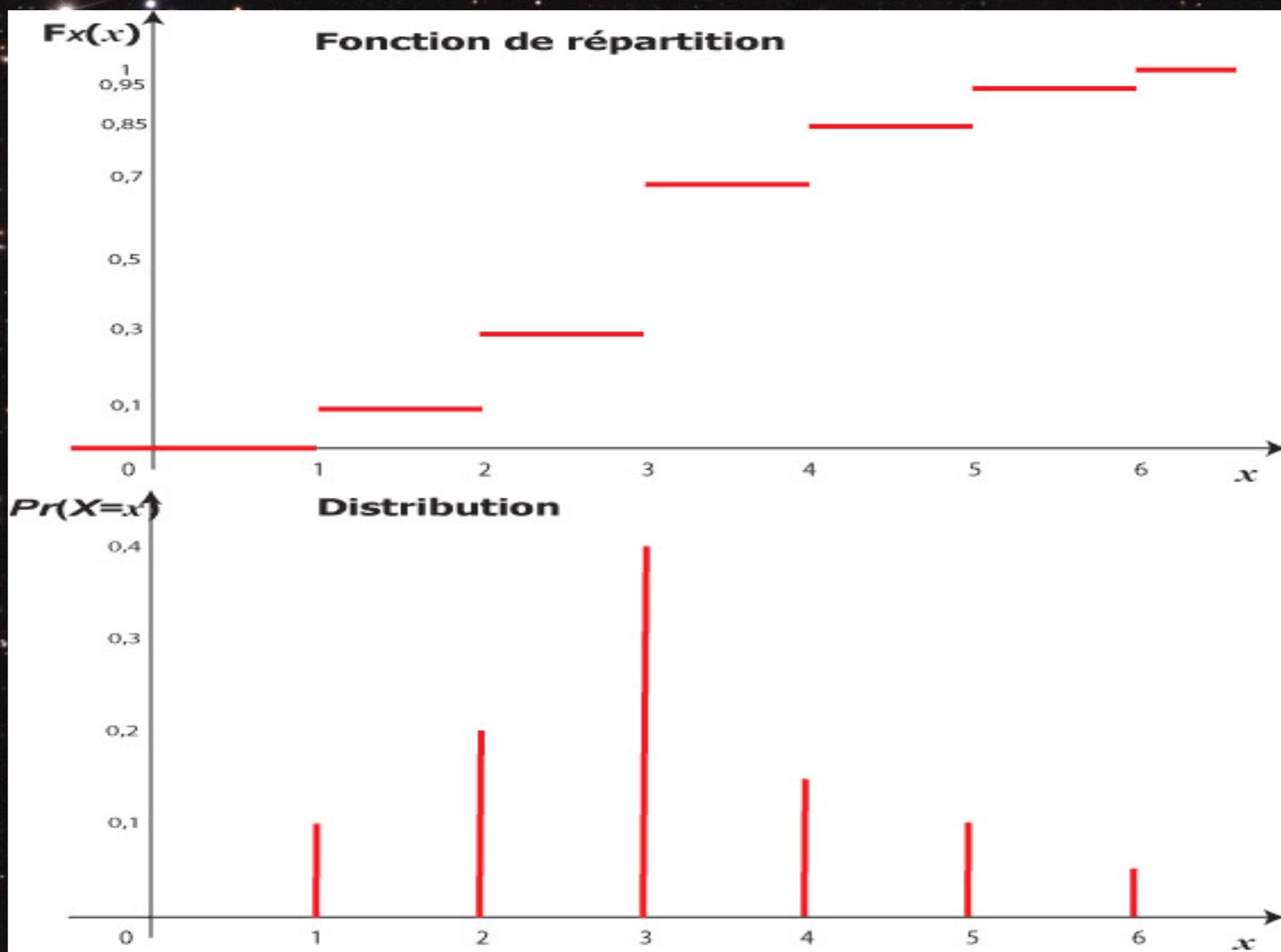
$$\sigma^2 = \mathbf{E}((X-\mu)^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mu^2$$

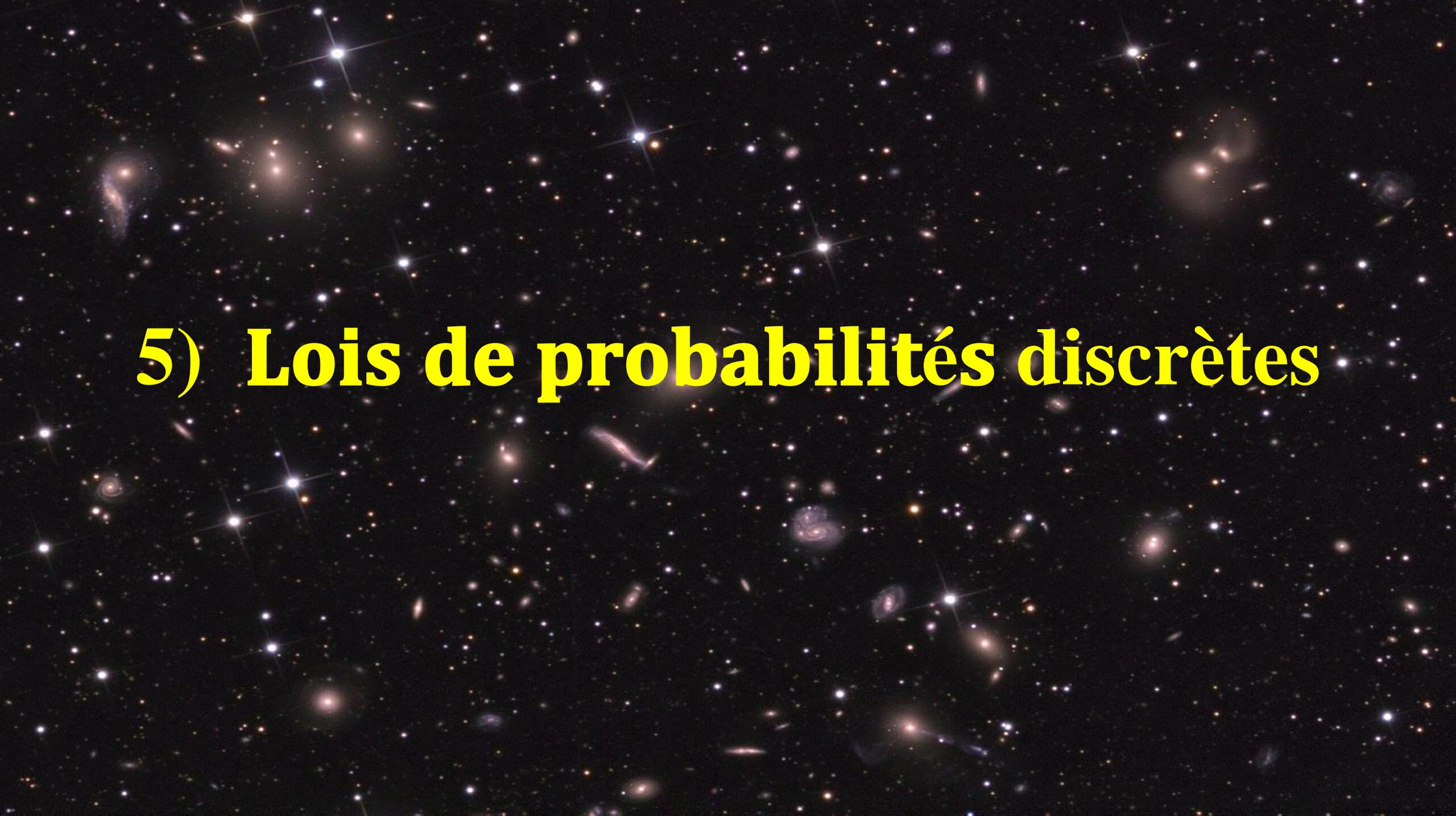
On l'écrit aussi : $\sigma^2 = \sum p_i * (x_i - \mu)^2$

- **L'écart type σ de la distribution est la racine carrée de la variance.**

A deep field image of the universe, showing a vast field of galaxies and stars against a black background. The galaxies are of various shapes and sizes, including spiral, elliptical, and irregular forms. The stars are scattered throughout the field, with some appearing as bright, multi-pointed sources. The overall scene is a rich and diverse representation of cosmic structures.

4) Fonctions de répartition et de distribution



A deep space photograph showing a vast field of galaxies and stars against a black background. The galaxies are scattered across the frame, some appearing as bright, irregular shapes, while others are more distant and faint. The stars are numerous, appearing as small, bright points of light, some with prominent diffraction spikes. The overall scene is a rich, multi-colored cosmic landscape.

5) Lois de probabilités discrètes



❖ **Loi de Bernoulli $B(p)$**

$$P(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k}$$

- **Moyenne** : $\mu = p$
- **Variance** : $\sigma^2 = p(1-p) = pq$



QCM

Vous avez 1min!

Voici Elise votre tutrice de Bioch!!

En France, la « navette » Air-France permettant de se déplacer entre Nice et Paris est généralement en retard une fois sur vingt-cinq. Sachant que j'ai un rendez-vous tout suite après mon vol, un éventuel retard me ferait rater mon rendez-vous. Quelle est la probabilité que j'arrive à l'heure à ce rendez-vous?

- A.0,04 B.0,96 C.0,038 D.0,4
E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse B!!!!

- $P(X = 0) = 0,04^0(0,96)^1$

The image features a dark, star-filled sky as a background. A faint grid of white lines is overlaid on the stars. The text "Loi Binomiale B(n;p)" is centered in a bold, yellow, serif font. The text is the primary focus, set against the cosmic backdrop.

Loi Binomiale $B(n;p)$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

- La moyenne s'écrit : $\mu = np$
- La variance s'écrit : $\sigma^2 = np(1-p)$



QCM

Vous avez 1min30

**Et oui c'est Amaury l'autre
prof de Bioch!**

Un médicament A donné, entraîne 90% de guérison.. On donne ce médicament 3 fois au même individu, de façon totalement indépendante pour chaque administration. Quelle est la probabilité que le médicament soit efficace 2 fois lors de nos administrations?

- A. 0,027
- B. 0,081
- C. 0,24
- D. On utilise une loi binomiale $B(2 ; 0,9)$
- E. Toutes les réponses sont fausses

Réponse C!!

Loi binomiale ou loi hypergéométrique ?

Pour le savoir, il faut calculer le taux de sondage n/N

Si $n/N \leq 0,10$ on doit donc appliquer la loi binomiale pour l'étude de l'échantillon

Si $n/N \geq 0,10$ on doit donc appliquer la loi hypergéométrique



❖ **Loi hypergéométrique $H(N;D;n)$**

$$P(X = k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

Moyenne : $\mu = \frac{nD}{N} = np$

Variance : $\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$ et $\sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) npq$



2

... mais j'm trop caaa !

QCM

Vous avez 1min30

Et pout finir ma vengeance anticipée
Alice votre tutrice de Pharma

Une équipe scientifique fait une commande de 20 microscope à une entreprise. Sur 50 microscope fabriqué au total dans l'entreprise, il y en a 5 défectueux. Mais elle décide tout de même d'envoyer un lot de 20 microscopes aux chercheurs au risque d'envoyer les défectueux. Quelle est la probabilité que les chercheurs ne reçoivent aucun microscope défectueux?

A. $\frac{C_5^5 \times C_{45}^{15}}{C_{50}^{20}}$ B. $1 - \frac{C_5^0 \times C_{45}^{20}}{C_{50}^{20}}$ C. $\frac{C_5^0 \times C_{45}^{20}}{C_{50}^{20}}$ D. $\frac{C_0^5 \times C_{20}^{45}}{C_{20}^{50}}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse B

A deep space photograph showing a vast field of galaxies and stars against a black background. The galaxies are scattered across the frame, some appearing as bright, diffuse clouds, others as more compact, structured objects. The stars are numerous, appearing as bright points of light with some showing diffraction patterns.

❖ **Loi géométrique $G(p)$**

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}$$

- $\mu = \frac{1}{p}$
- $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

QCM

Dans une soirée échangiste, Ophélie rejoint les hommes plus jeunes qu'elle. La probabilité qu'elle rencontre un homme plus vieux est de 0,2. Quelle est la probabilité qu'elle s'envoie en l'air avec un homme plus vieux au bout de 3 personnes ?

- A. 0,13 B. 0,10 C. 0,032 D. La réponse D
E. Toutes les réponses sont fausses

Réponse A

The background of the image is a deep black space filled with numerous stars of varying brightness and colors, including white, yellow, and blue. Some stars exhibit prominent diffraction spikes. Interspersed among the stars are several faint, distant galaxies, some appearing as spiral or elliptical shapes. The overall scene is a rich field of celestial objects.

Loi de Poisson $P(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- $\mu = \sigma^2 = \lambda$

QCM

En moyenne, 2 tuteur donnent cours par heure. Quelle est la probabilité que 3 tuteurs donnent cours en une heure?

A. $\frac{3 e^{-2}}{4}$

B. $\frac{9 e^{-3}}{2}$

C. $\frac{4 e^{-2}}{3}$

D. $\frac{2 e^{-3}}{3}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse C

The background of the image is a deep black space filled with a vast field of stars. Some stars are bright and sharp, while others are faint and blurry. Several galaxies are visible, including a prominent one in the lower-left quadrant and another in the lower-right. The overall scene is a rich, multi-colored stellar population.

Variable aléatoire continue

Variable aléatoire continue: La variable se définit sur un ensemble indénombrable.

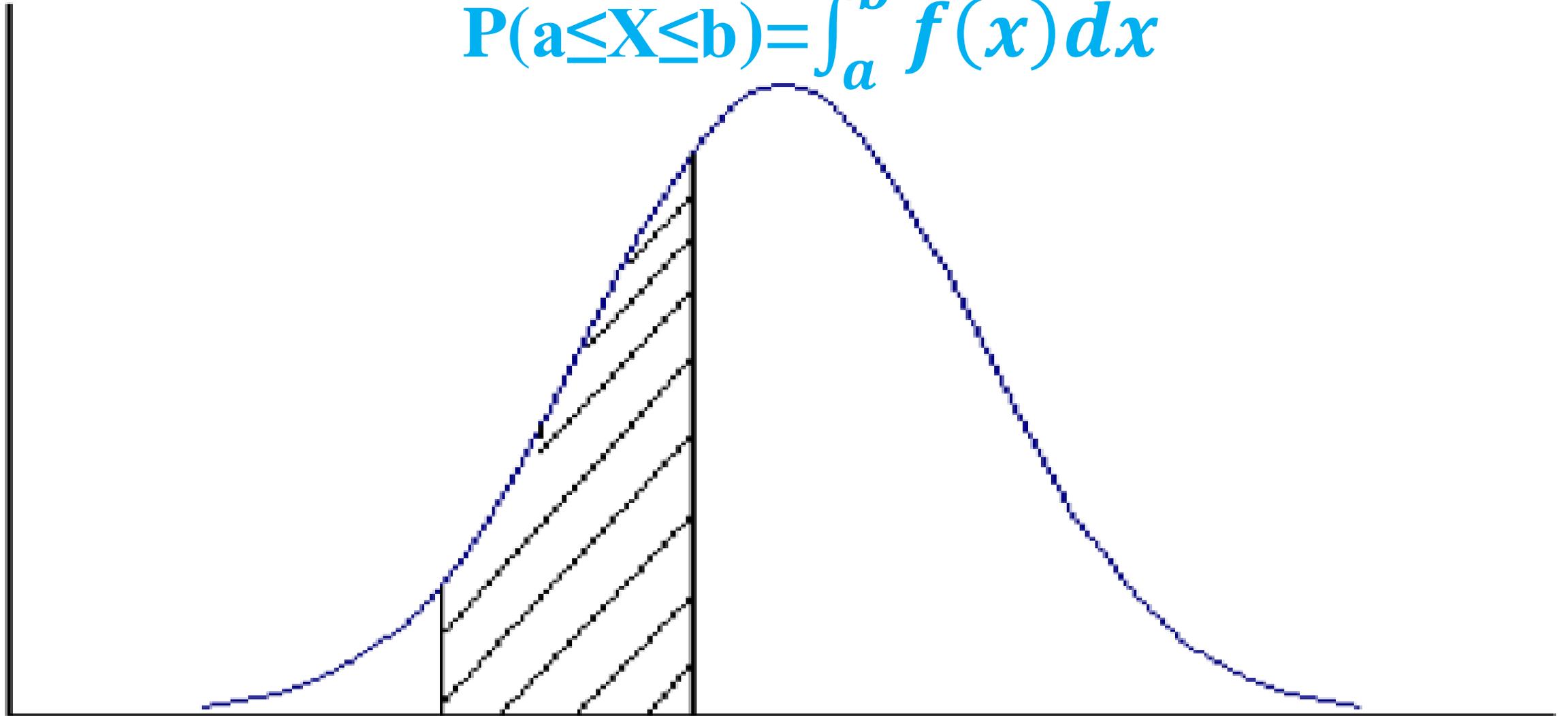
Particularités des v-a continues:

$$P(X=k)=0$$

fonction f de densité de probabilité

$f(x)$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

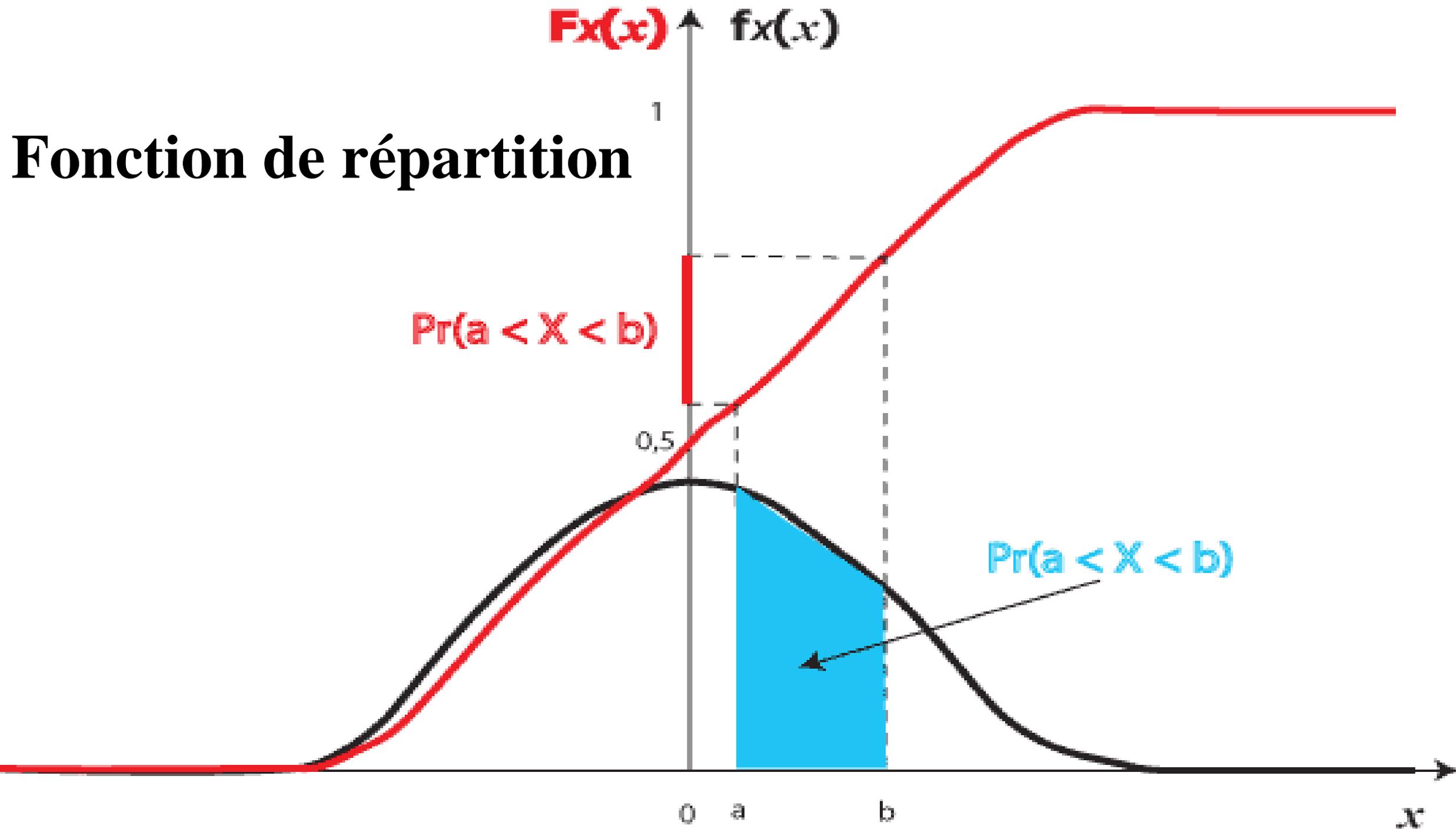


a

b

variable aléatoire X

Fonction de répartition



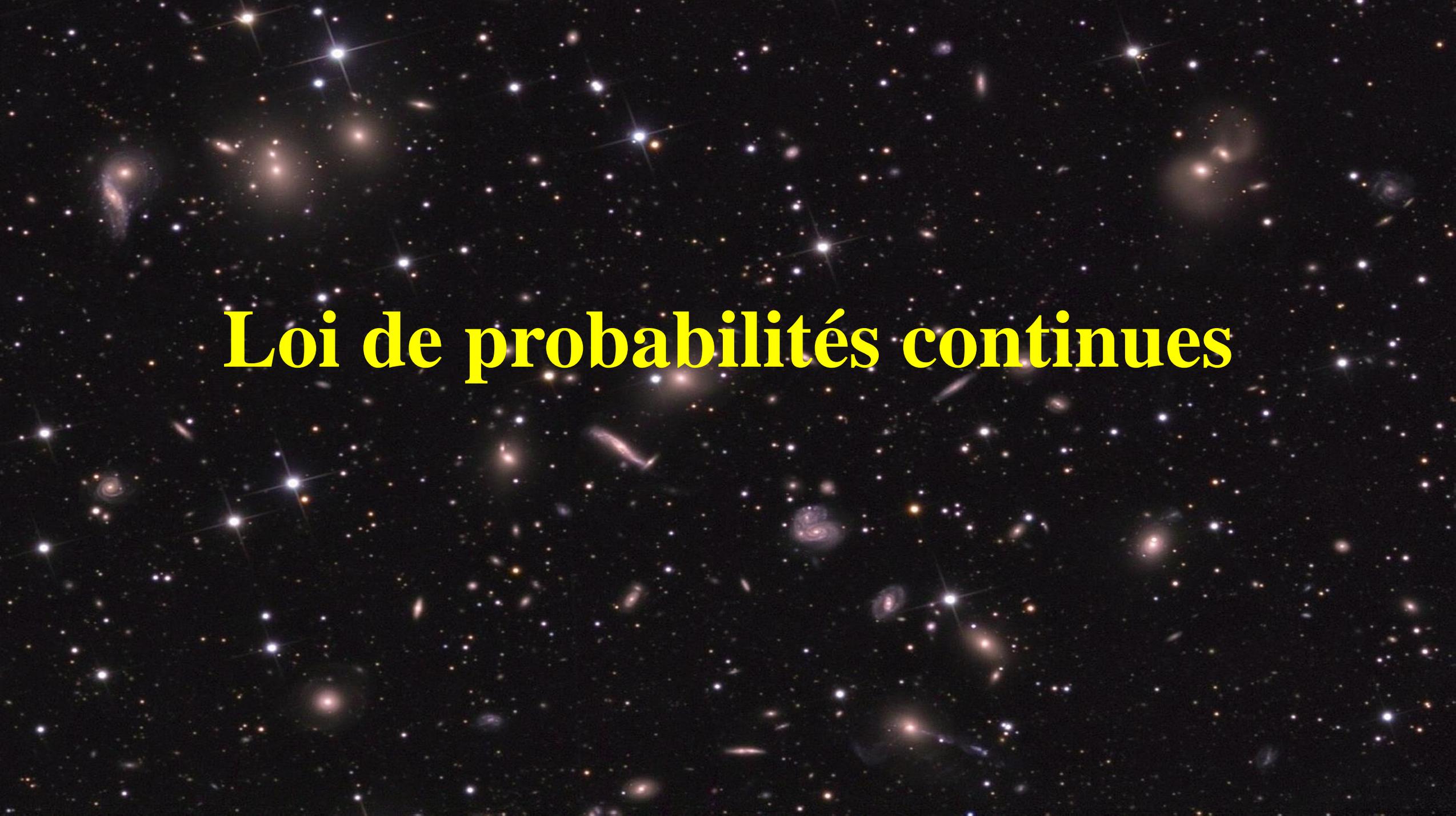


Variable centrée réduite

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Moyenne = $E(Z) = 0$

Variance = $\sigma^2 = 1$

A deep space photograph of a galaxy cluster, likely the Coma Cluster, showing numerous galaxies of various shapes and sizes, including spirals and ellipticals, set against a dark background filled with stars. The text "Loi de probabilités continues" is overlaid in a bold, yellow, serif font in the center of the image.

Loi de probabilités continues

❖ Loi exponentielle $E(\lambda)$

La loi exponentielle permet de décrire un processus de « mortalité » dans lequel le risque instantané (ou taux de défaillance λ) de décès est constant.

- **Fonction de densité** : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- $P(X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$
- **Espérance** = $\mu = \frac{1}{\lambda}$
- **Variance** = $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

QCM

On étudie la durée de vie d'un canard borgne. Son taux de défaillance est égal à 2. Quelle est la probabilité qu'il meurt avant 3 ans?

A. $1 - e^{-2}$

B. $1 - e^{-3}$

C. e^{-3}

D. $1 - e^{-6}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse D

Lien entre la loi de Poisson et la loi exponentielle:

Si un évènement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ , alors le temps qui s'écoulera entre deux réalisations consécutives de l'évènement est distribué selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\lambda}$. Le temps qui s'écoule entre deux réalisations est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

QCM

Le nombre de personnes qui consultent aux urgences se distribue selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda=2$ visites toutes les 20 minutes. Combien de temps en minutes s'écoulera t'il entre deux visites?

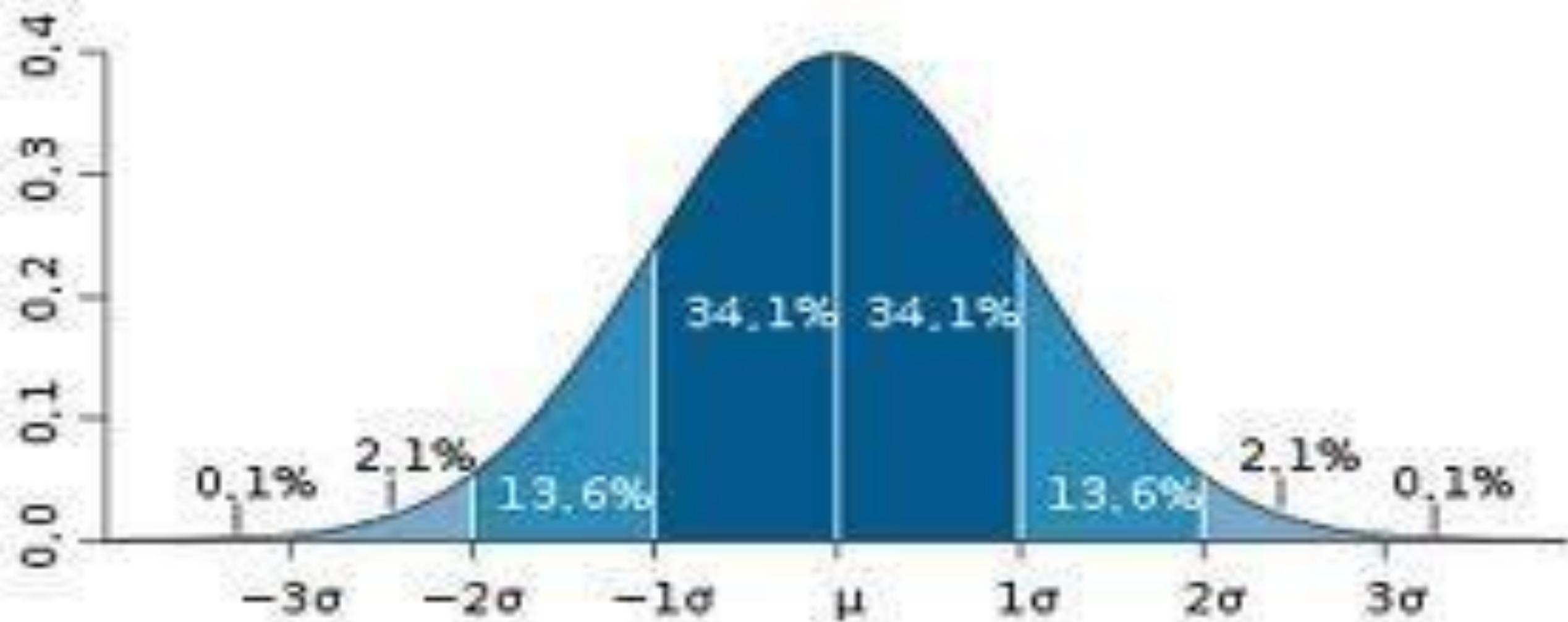
A. 10 B. 15 C. 20 D. 30

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse A

The background of the image is a deep space scene filled with numerous stars of varying brightness and colors, some appearing as bright white points with diffraction spikes. Scattered throughout are several galaxies, including a prominent spiral galaxy on the left, a central galaxy with a bright core, and various other distant galaxies in different orientations and colors. The overall color palette is dark, with highlights from the stars and galaxies.

Loi normale $N(\mu ; \sigma)$



Soit la loi normale de paramètres $(\mu ; \sigma)$, il faut connaître certaines valeurs :

- $P(X < \mu - 1,65\sigma) = 5\%$ et $P(\mu + 1,65\sigma < X) = 5\%$

- $P(X < \mu - 1,96\sigma) = 2,5\%$ et $P(\mu + 1,96\sigma < X) = 2,5\%$

- $P(X < \mu - 2,58\sigma) = 0,5\%$ et $P(\mu + 2,58\sigma < X) = 0,5\%$

- $P(X < \mu - 3,30\sigma) = 0,05\%$ et $P(\mu + 3,30\sigma < X) = 0,05\%$



- **Loi normale centrée réduite : $N(0 ; 1)$**

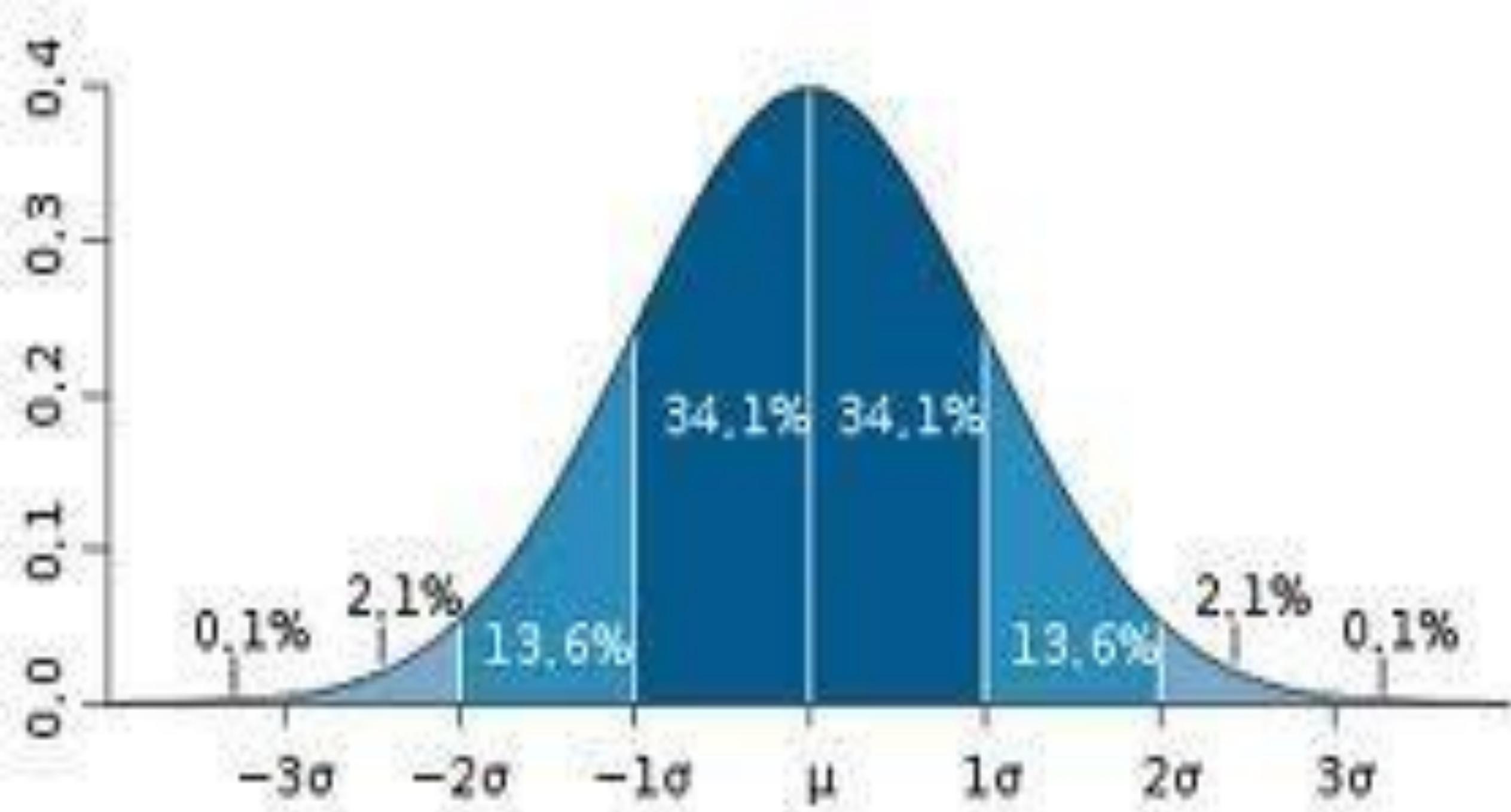
-

- **La loi Normale centrée réduite a pour paramètres : moyenne = 0 et variance = 1**

- $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Table de la loi normale centrée réduite: $P(Z \leq d)$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577



Approximations

A deep space photograph of a star field with the word "Approximations" centered in a bold, yellow, serif font. The background is a dark, black sky filled with numerous stars of varying brightness and colors, including white, yellow, and blue. Some stars exhibit prominent diffraction spikes. Scattered throughout the field are several galaxies, including a prominent spiral galaxy in the lower-left quadrant and several elliptical and irregular galaxies in other regions. The overall composition is a rich, multi-colored stellar population.

**Soit un phénomène qui suit une loi Binomiale
 $B(n ; p)$**

Si : $n > 50$, $p \leq 0,1$ et $np < 5$

**Alors la loi de Poisson permet d'approximer la loi
Binomiale de la manière suivante :**

$B(n,p) \rightarrow P(\lambda = np)$

**Soit un phénomène qui suit une loi Binomiale
 $B(n ; p)$**

Si $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, (avec $q=1-p$)

**Alors la loi Normale permet d'approximer la loi
Binomiale de la manière suivante :**

$$\mathbf{B(n ; p) \longrightarrow N(np ; \sqrt{npq})}$$

Soit un phénomène qui suit une loi de Poisson $P(\lambda)$

Si $\lambda > 25$

Alors la loi Normale permet d'approximer la loi de Poisson de la manière suivante :

$$P(\lambda) \rightarrow N(\lambda ; \sqrt{\lambda})$$

QCM

On demande à un chirurgien en urologie de réaliser un « allongement de chybre » (terme non scientifique) 10 fois d'affilée de manière totalement indépendante. La probabilité d'avoir un pénis allongé de plus de 3cm est de 0,5. La probabilité d'avoir 5 bites allongées de plus de 3cm est donnée par quelle loi?

- A. Elle peut être approximer par la loi normale $N(5 ; 5)$
- B. Elle peut être approximer par la loi normale $N(5 ; 25)$
- C. Elle peut être approximer par la loi de poisson $P(5)$
- D. Elle peut être approximer par la loi de poisson $P(\sqrt{5})$
- E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse A

C'est la fin!!!!

BB-8

