EVENEMENT ET PROBABILITE ELEMENTAIRES

La théorie des **probabilités** est une branche des **mathématiques** qui permet de modéliser les phénomènes où le hasard intervient. On sélectionne un **échantillon** de la population **au hasard**, puis on **extrapole** à l'ensemble de la population les résultats obtenus sur cet échantillon.

On appelle **population** un ensemble **d'objets** très grand voire infini. *Ex : L'ensemble des habitants de France.*

On appelle **échantillon** tout **sous-ensemble** de cette population. C'est sur lui que l'on établit généralement les études statistiques (une étude exhaustive d'une population est souvent impossible ou trop coûteuse). *Ex : Les habitants de Nice.*

Mais travailler sur des échantillons ou extraits pose **2 types de problèmes** :

- un problème de **représentativité.** *(A l'issue d'une étude statistique sur les habitants de Nice, peut-on extrapoler une conclusion à l'ensemble de la population Française ?)*
- un problème de **confiance** *(On reproduit, cette étude statistique sur les habitant de Paris, Limoges ou Marseille, obtiendrait on les mêmes résultats ?)*

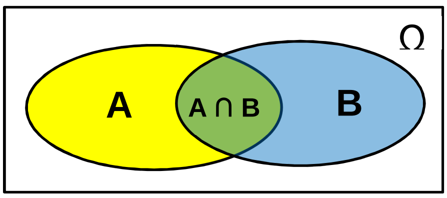
I. Ensembles et éléments:

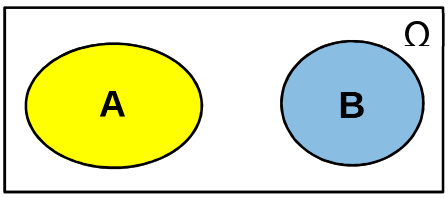
A. Quelques définitions :

- un **ensemble** est une **liste**, une collection d'objets définis
- les **objets** appartenant à cet ensemble sont appelés **éléments**.
- On a les notations suivantes :
  Ω ou E ensemble universel
  ϵ = appartient
  C = inclus
  $\emptyset$ = ensemble vide
- Un ensemble « E » défini en **extension = explicite.** *Exemple : un jeu de 32 cartes : E = { As de pique, Roi de pique, Dame de pique, Valet de pique,…, 8 de cœur, 7 de cœur}*
- Un ensemble « A » défini en **compréhension = implicite.** *Exemple : Dans un jeu de 32 cartes : A = { Couleur cœur }. On ne liste pas l'ensemble des cartes de la couleur cœur !*

B. Les opérations :

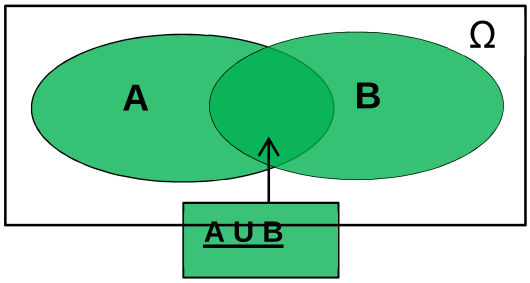
A ∩ B ou intersection, c'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.

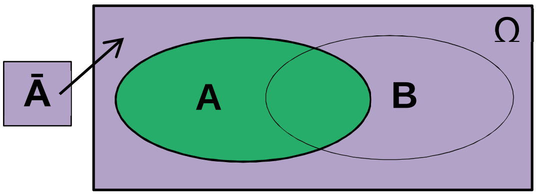




Si l'ensemble A ∩ B est vide ($\emptyset$) on dira que **A et B sont disjoints.**

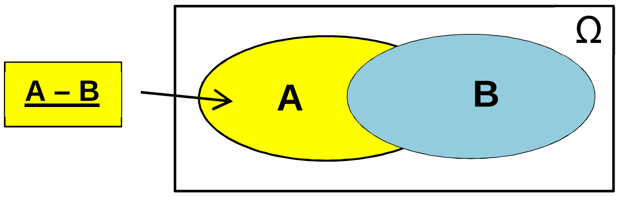
A U B ou **union**, c'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B:

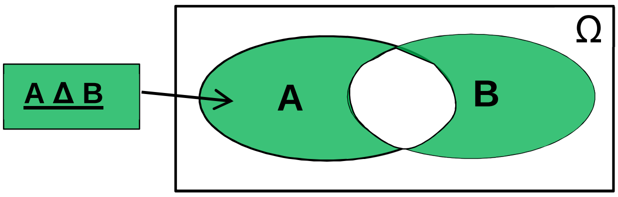




Ā ou **complémentaire** de A ($\complement A$). C'est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

A – B ou **différence**, c'est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B ou **complémentaire de B relatif à A** : **$A - B = \complement B \cap A$**





A Δ B ou **différence symétrique**, c'est l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à A ou à B mais pas à A∩B. C"est un lien de nature **exclusive**.

On peut aussi dire que : **$A \Delta B = A \cup B - A \cap B$**

Nota :

Complémentaire de A U B = **$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$**

Complémentaire de A ∩ B = **$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$**

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

C. Ensembles :

1. Ensembles Finis / Infinis

Un ensemble peut être :

- **Fini** : il contient un nombre fini d'éléments (ex : { 1,2,3,4}) . L'ensemble vide est aussi un ensemble fini. *(Nota : un ensemble fini est forcément dénombrable)*
- **Infini** : il contient un nombre infini d'éléments (ex : {ensemble des entiers naturels}).

Nota : un ensemble infini peut être dénombrable ou indénombrable :

- **Dénombrable** : à chaque éléments de l'ensemble correspond un unique entier naturel. Ex : Ensemble A = { n : n est un entier pair}
- **Indénombrable** (généralement des intervalles de R)

2. Ensemble produits

Soit A et B deux ensembles, on appelle **"ensemble produit" l'ensemble A x B**, c'est l'ensemble des couples **ordonnés** (a,b) où a Є A et b Є B.

Exemple : A = {a,b,c} et B = {1,2}. A x B = {(a,1) (a,2) (b,1) (b,2) (c,1) (c,2) }

On peut généraliser ce produit à n ensembles *(appelé également « produit cartésien »)* :
Ex : $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots \times E_n$.

$$E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots \times E_n = \{\underbrace{(x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n)}_{\text{n-uplet}}\ (y_1, y_2, y_3,\ldots, y_n)\ (z_1, z_2, z_3,\ldots, z_n)\ldots\}$$

Exemple pour **n=2** : A = {a,b,c} et B = {1,2}. A x B = {$\overbrace{(a,1)}^{\text{2-uplet } (= \textit{couple})}$ (a,2) (b,1) (b,2) (c,1) (c,2) }

Nota: Un "n" uplet est ordonné et se note entre parenthèse (a,1) ≠ (1,a). Un ensemble ou une partie d'ensemble non ordonné se note entre accolade { a,1} = {1,a}

3. Cardinal

Le **cardinal** d'un ensemble ou **card (E)** est le nombre d'éléments que contient un ensemble dénombrable.

Exemple : On lance un dé : Soit l'Univers Ω = ensemble des résultats possibles. Ω = {1,2,3,4,5,6}. Donc le Cardinal de Ω = 6.

Dans le cas d'un « ensemble produit » A x B on aura :

Card (A x B) = Card A x Card B

Nota: Le nombre d'éléments contenus dans un « ensemble produit » (A x B) est égal au produit du nombre d'éléments contenus dans chacun des ensembles A et B.

Exemple : On lance 2 dés différents (que l'on peut distinguer : dé n°1 et dé n°2):
Soit l'Univers Ω_1=ensemble des résultats possibles pour le dé n°1, Ω_1={1,2,3,4,5,6} et Card Ω_1 = 6.

Soit l'Univers Ω_2 =ensemble des résultats possibles pour le dé n°2 Ω_2={1,2,3,4,5,6}et Card Ω_2 = 6.

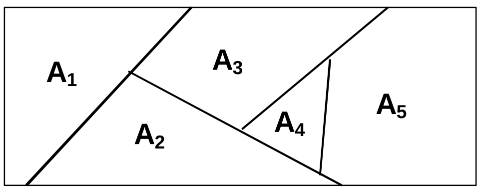
Soit l'Univers Ω, l'ensemble des résultats possibles à l'issue du lancer des 2 dés :
Card Ω = Card ($\Omega_1 \times \Omega_2$) = Card Ω_1 x Card Ω_2 = 6x6 = 36

4. Famille d'Ensemble

Soit A un ensemble quelconque.
L'ensemble des sous-ensembles de A constitue la **famille des parties de A.**
Le **nombre de partie** d'un ensemble de p élément est $\mathbf{2^p}$

Exemple : Soit une pièce de monnaie dont l'ensemble A est {pile, face}. Un sous ensemble B : {pile}, un autre sous ensemble C : {face} et un sous ensemble D : {∅}
L'ensemble des parties de A est P(A) = { ∅ , {pile}, {face}, {pile,face} }.
Le nombre de parties de A est : 2^2 = 4

Partition de A = subdivision de A en sous-ensemble disjoints dont la réunion forme A.
$\mathbf{A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5}$



D. Dénombrements :

<table>
<tr><th>Type de dénombrement</th><th>Ordonné / Non ordonné</th><th>Remise / Sans Remise</th><th>Formule</th></tr>
<tr><td><u>p-liste</u> avec remise</td><td>Ordonné</td><td>Remise</td><td>Card (E^p) = (Card E)^p</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Exemple</u> : Soit un jeu de 32 cartes: on tire successivement 3 cartes en remettant à chaque fois la carte dans le paquet (= avec remise). Le cardinal de l'Univers Ω de l'ensemble des résultats possibles = 32^3. On souhaite ici connaître le nombre triplet de cartes possibles <u>en tenant compte de l'ordre</u>. Ex : (As de cœur, Roi de pique, Dame de trèfle), (Dame de trèfle, Roi de pique, As de cœur),…, (10 de carreau, As de pique, valet de carreau)</td></tr>
<tr><td>Arrangement de n éléments pris p à p</td><td>Ordonné</td><td>Sans Remise</td><td>$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Exemple</u> : On dispose de 3 cartes : As, Roi , Dame. On tire <u>SUCCESSIVEMENT</u> (≠simultanément !) 2 cartes <u>sans remise</u>. Le nombre d'arrangements possibles (cad le nombre de couples de cartes possibles <u>en tenant compte de l'ordre</u> de tirage) est égal à :
$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3\times2\times1}{1}$ = 6, soit (As,Roi) (As,Dame) (Roi, As) (Dame, As) (Dame, Roi) (Roi, Dame)</td></tr>
<tr><td>Arrangement avec répétition</td><td>Ordonné</td><td>Avec Remise</td><td>p^n</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Exemple</u> : Combien de noms (même improbables) à 3 lettres peut-on écrire avec l'ensemble de l'alphabet (26 lettres) ? Réponse : 26^3 (ex : ACH, CHA, CJK, VBN, …)</td></tr>
<tr><td>Permutation d'un ensemble fini à n éléments</td><td>Avec Ordre</td><td>Sans Remise</td><td>$P_n = n\,!$</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Exemple</u> : On dispose de 4 cartes : As, Roi, Dame et Valet de cœur. On les tire une à une <u>sans les remettre</u> jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus.
Le nombre de suite de cartes (= permutations) possibles est donc :
$P_4 = 4\,! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ permutations. (R, D, V, As) (D, R, V, As) (V, As, R, D)….</td></tr>
<tr><td>Permutations avec « répétition »</td><td>Avec Ordre</td><td>Sans Remise</td><td>$P_n = \frac{n!}{(k1!k2!k3!\ldots kr!)}$</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Exemple</u>: 9 chevaux sont au départ d'une course hippique : 2 chevaux bleus (B_1 et B_2), 3 Rouges (R_1, R_2 et R_3) et 4 Jaunes (J_1, J_2, J_3 et J_4). Le nombre de classements possibles à l'arrivée en ne <u>tenant compte que des catégories est</u> :
$P_9 = \frac{n!}{(k1!k2!k3!)} = \frac{9!}{(2!3!4!)} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(2\times1\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1)} = \frac{7\times6\times5\times3\times2}{1} = 42 \times 30 = 1260$ classements possibles,
l'ordre au sein d'une même catégorie n'étant pas important :
(R_1, B_2, J_3, J_4, R_3, B_1, J_2, R_2, J_1) = (R_2, B_1, J_4, J_1, R_1, B_2, J_3, R_3, J_2) par exemple.
n = Nombre total de chevaux au départ de la course.
Il y a 3 catégories de chevaux : Bleu, Rouge et Jaune.
k1 = nombre de chevaux bleus, k2 = nombre de chevaux Rouge, k3 = nombre de chevaux Jaunes.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Combinaison de n éléments pris p à p parties d'un ensemble</td><td>Sans Ordre</td><td>Sans Remise</td><td>$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Exemple</u> : Soit le même exemple que pour les arrangements de n éléments pris p à p : On dispose de 3 cartes : As, Roi, Dame. On tire <u>SIMULTANEMENT</u> (≠ successivement !) 2 cartes sans remise. Le nombre de combinaisons possibles (cad le nombre de paires de cartes possibles <u>en ne tenant pas compte de l'ordre</u> de tirage) est égal à :
$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2} = 3$, soit : (As,Roi) = (Roi, As), (As,Dame) = (Dame, As), (Dame, Roi) = (Roi, Dame)</td></tr>
</table>

II. Eléments de probabilités :

A. Définitions :

<u>Phénomène aléatoire</u> : phénomène dont **on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance**, dont le résultat est lié au hasard*. Les calculs des probabilités modélisent les phénomènes aléatoires.*

≠

<u>Phénomène déterministe</u> : phénomène dont **on peut prévoir le résultat à l'avance** grâce aux lois de la physique. Ils observent une certaine régularité de comportement

1. Epreuve

On appelle « épreuve » une expérience aléatoire.
<u>Exemple</u> : On lance 3 fois une pièce. Les 3 lancers de la pièce (pile ou face) constituent une épreuve.

2. Evènement certain

On appelle Ω l'ensemble des résultats possibles de cette épreuve, c'est **l'évènement certain**. Chaque résultat sera donc forcément un élément de Ω.
<u>Exemple</u> : On réalise l'épreuve citée ci-dessus.
L'ensemble des résultats possibles (Ω) est : ((f,f,f) ; (f,p,f);(f,f,p) ;(f,p,p);(p,f,f);(p,p,f);(p,p,p) ;(p,f,p)).
Donc Card Ω = 2^3 = 8 (arrangement avec répétition).
A l'issue des trois lancers, on obtiendra forcément un de ces 3 triplets.

3. Evènement

Un sous-ensemble de Ω est appelé un évènement. Il s'agit d'un ensemble de résultats. (si Ω est dénombrable).
<u>Exemple</u> : « Obtenir pile au 2^{ème} lancer » constitue un évènement de Ω. Il est composé des résultats de l'expérience suivants : (f,p,f) ;(f,p,p) ;(p,p,f) ;(p,p,p).
Donc ((f,p,f) ;(f,p,p) ;(p,p,f) ;(p,p,p)) = sous ensemble ou évènement « obtenir pile au 2^{ème} lancer ».

4. Evènement élémentaire

Un évènement élémentaire {a} est un résultat unique de Ω. C'est un évènement défini par un résultat précis pour chaque lancer (1^{er} lancer = pile, 2^{ème} lancer = pile, 3^{ème} lancer = face) à contrario de l'évènement « obtenir pile au 2^{ème} lancer » qui contient plusieurs évènements élémentaires.
<u>Exemple</u> : ($\underbrace{(f,f,f)}_{\text{Evènement élémentaire}}$; (f,p,f) ;(f,f,p) ;(f,p,p) ;(p,f,f) ;(p,p,f) ;(p,p,p) ;(p,f,p))

5. Evènement impossible

Ø est appelé événement impossible.
Exemple : (p,p,p,p) est un évènement impossible.

6. Quelques Notations

A C B : La survenue de A implique la survenue de l'événement B
A U B : A OU B (ou inclusif)
A ∩ B : A ET B (réalisation simultanée)
Ā ou A^C : événement contraire à A
A ∩ B = Ø : A et B sont incompatibles

B. Probabilités et propriétés :

1. Propriétés générales

On associe à une probabilité sur Ω une **fonction P** qui à chaque **évènement A** de Ω associe **un réel de l'intervalle [0,1]**. **Une probabilité est donc forcément comprise entre 0 et 1**. La probabilité P est censée mesurer les chances de réalisation de cet événement.

$$\textbf{Probabilité de A = P(A) = } \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Exemple : Soient 3 gobelets ($card(\Omega)$ = 3). Une boule est cachée sous l'un des gobelets. L'événement A : « trouver la boule en soulevant un gobelet » card (A) = 1. La probabilité de trouver la boule en retournant un seul gobelet est de $\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ = 1/3 = 0,33.

P doit vérifier certaines propriétés :

- **P(Ω) = 1**

Exemple : P (« trouver la boule en retournant les 3 gobelets ») =1

- **P (Ø) = 0**

Exemple : P (« ne trouver aucune boule en retournant les 3 gobelets ») = 0

- **Si A ∩ B = Ø** alors, **P(AUB) = P(A) + P(B).** On dit que **A et B sont incompatibles**. On peut généraliser à 3,4, …, n évènements incompatibles entre eux.

Exemple : Soient les évènements A : « la boule se trouve sous le gobelet 1 » et B : « la boule se trouve sous le gobelet 2 ».
A ∩ B = Ø, la boule ne peut pas être à la fois sous le gobelet 1 et le gobelet 2
P (A U B) = P (« la boule est sous le gobelet 1 ou 2)
= P(A) + P(B) = P (« la boule est sous le gobelet 1 ») + P (« la boule est sous le gobelet 2 »)
= 1/3 + 1/3 = 2/3 = 0,67

- Généralisation : **P(CUB) = P(C) + P(B) – P(C∩B)** (théorème des probabilités totales)

Exemple : Soient les évènements C : « la boule se trouve sous le gobelet 1 ou 2 » et B : « la boule se trouve sous le gobelet 2 ».
L'évènement C∩B est « la boule se trouve sous le gobelet 2 »
P(CUB) = P(C) + P(B) – P(C∩B) = P (« la boule se trouve sous le gobelet 1ou 2 ») + P (« la boule se trouve sous le gobelet 2 » - P(« la boule se trouve sous le gobelet 2) = 2/3 +1/3 – 1/3 = 2/3 = 0,67

- **P (Ā) = 1 – P(A)**

<u>Exemple</u> : soit A l'évènement : « la boule se trouve sous le gobelet 1 ». Ā est l'évènement : « la boule se trouve sous le gobelet 2 ou 3 »
P (Ā) = P (« la boule soit sous le gobelet 2 ou 3)
= 1 – P(A) = 1 – P (« la boule soit sous le gobelet 1)
= 1 – 1/3 = 2/3

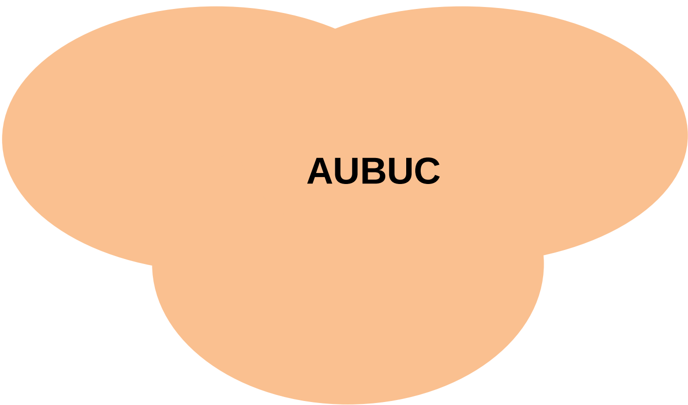
- **B c C alors P(B) ≤ P(C)**

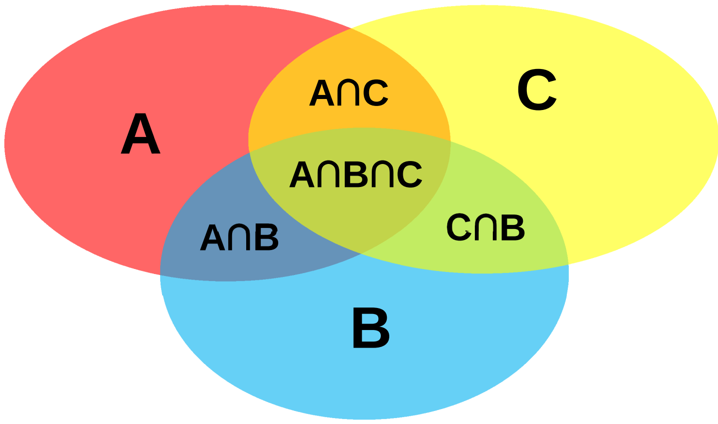
<u>Exemple</u> : Soit C l'évènement : « la boule se trouve sous le gobelet 1 ou 2 » et B l'évènement : « la boule se trouve sous le gobelet 2 ».
Or B c C
Donc P(B)=P(«la boule soit sous le gobelet 2»)=1/3 ≤ P(C)=P(«la boule soit sous le gobelet 1 ou 2»)=2/3

- **Propriétés d'additivité forte :**

P(AUBUC) = P(A) + P(B) + P(C) – (P(A∩C) + P(A∩B) + P(B∩C)) + P(A∩B∩C)

<u>Nota</u> :P(AUBUC) = P(AUB) + P(AUC) + P(CUB) – (P(A) + P(B) + P(C)) + P(A∩B∩C)





2. <u>Equiprobabilité</u>

- **Equiprobabilité :** Tous les événements élémentaires ont la même probabilité égale à **1 / card(Ω)**.

<u>Exemple</u> : je lance un dé non pipé (card (Ω)=6). Les Evénements élémentaires et leur probabilité sont :

Evénement élémentaire	**Obtenir « 1 »**	**Obtenir « 2 »**	**Obtenir « 3 »**	**Obtenir « 4 »**	**Obtenir « 5 »**	**Obtenir « 6 »**
Probabilité	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

- **Application du principe d'équiprobabilité au contrôle qualité d'une production :**

Un échantillon de « **k** » pièces est prélevé dans une production totale de « **N** » pièces comprenant « **n** » pièces défectueuses. On cherche à connaître la probabilité pour qu'il y ait « **j** » pièces défectueuses dans l'échantillon.

k = taille de l' « échantillon »
N = taille de la « production » = « population »
n = nombre de pièces défectueuses dans la production
j = nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon

Soit l'événement A_j = {exactement **j** pièces défectueuses dans l'échantillon} = $P(A_j) = \frac{C_n^j \times C_{N-n}^{k-j}}{C_N^k}$

3. *Probabilité sur un ensemble fini*

Exemple : je lance un dé biaisé. Les Evénements élémentaires et leur probabilité sont :

Evénement élémentaire	**Obtenir « 1 »**	**Obtenir « 2 »**	**Obtenir « 3 »**	**Obtenir « 4 »**	**Obtenir « 5 »**	**Obtenir « 6 »**
Probabilité	1/3	1/6	1/12	1/12	1/4	P6

P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1

D'où : P6 = 1 – (P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)) = 1 – (1/3 + 1/6 + 1/12 +1/12 + 1/4) = 1/12