

TTR  
2021

# PROBABILITÉS CONDITIONNELLES, THÉORÈME DE BAYES, INDÉPENDANCE EN PROBABILITÉS :

Tut' rentrée 2021-2022, ECUE 7 : Biostatistiques



# DÉFINITIONS DE BASE EN PROBABILITÉS

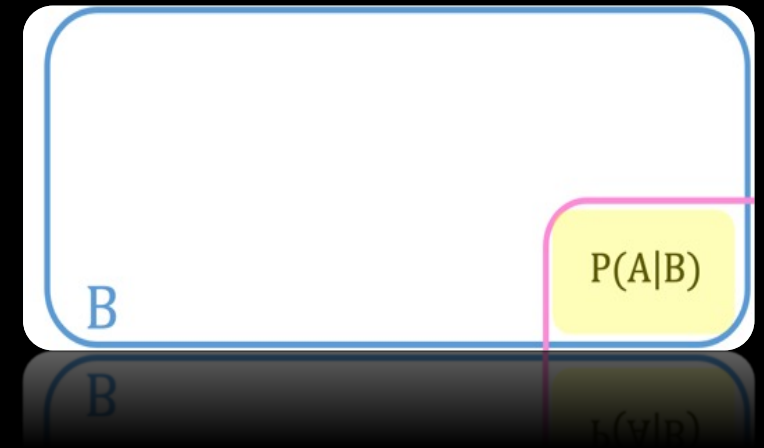
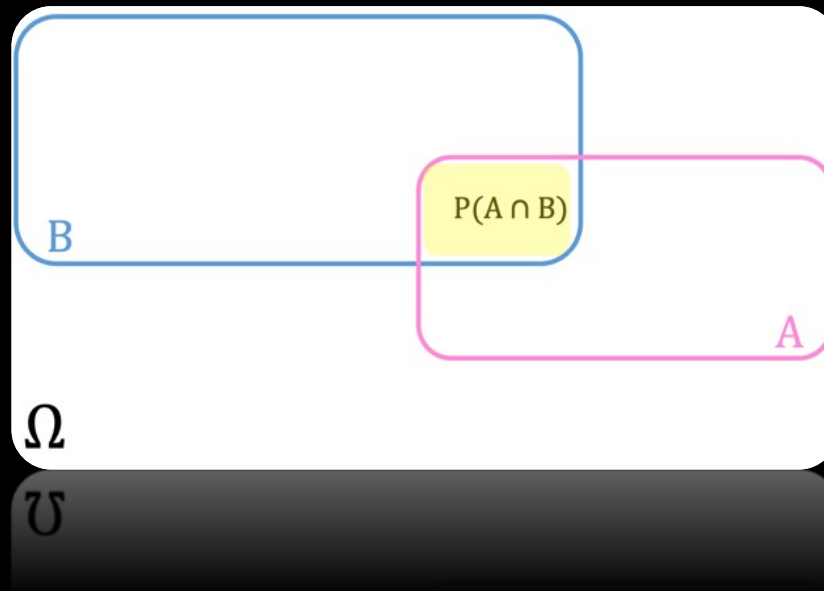
- $\Omega$  Ensemble fondamental, l'univers
- $P(A)$
- $P(\bar{A})$  ou  $P(\bar{A})$
- $P(A \cap B) = P(B \cap A)$



# PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

○ Qu'est-ce qu'une probabilité conditionnelle ?

○  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$



# FORMULE DE LA PROBABILITÉ CONDITIONNELLE :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Manger une glace sachant qu'on est à la plage

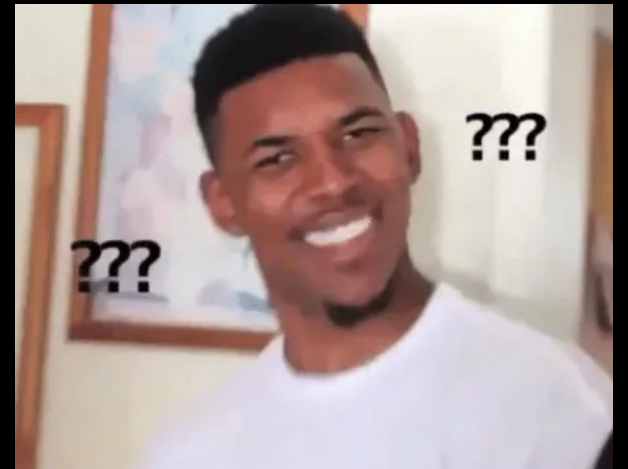
Manger une glace et être à la plage

Être à la plage

# THÉORÈME DE LA MULTIPLICATION :

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B).P(B) = P(B|A).P(A)$$

⚠ *Au nom du théorème ou de la formule* ⚠

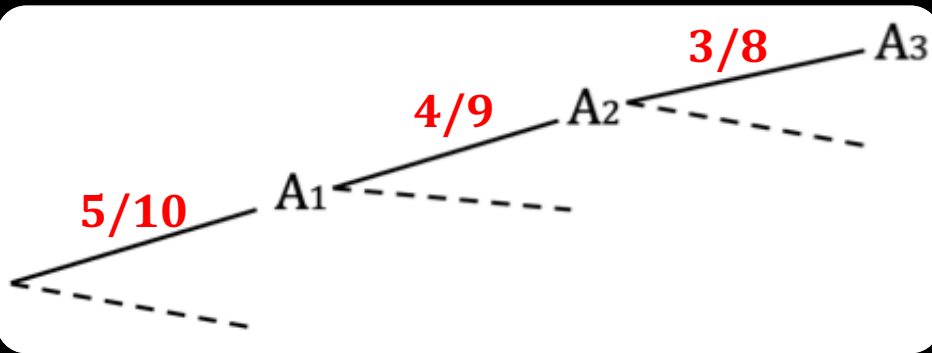




## Exemple d'application du théorème de la multiplication :

*On a une valise avec 10 tee-shirts avec 5 rouges, 2 verts et 3 jaunes.  
On veut connaître la probabilité de tirer 3 rouges d'affilé dans la valise.*

- $A_1$  : tirer un premier rouge
- $A_2$  : tirer un deuxième rouge
- $A_3$  : tirer un troisième rouge



*On a donc :*

$$P(A_1) = 5/10$$

$$P(A_2 | A_1) = 5-1/10-1 = 4/9$$

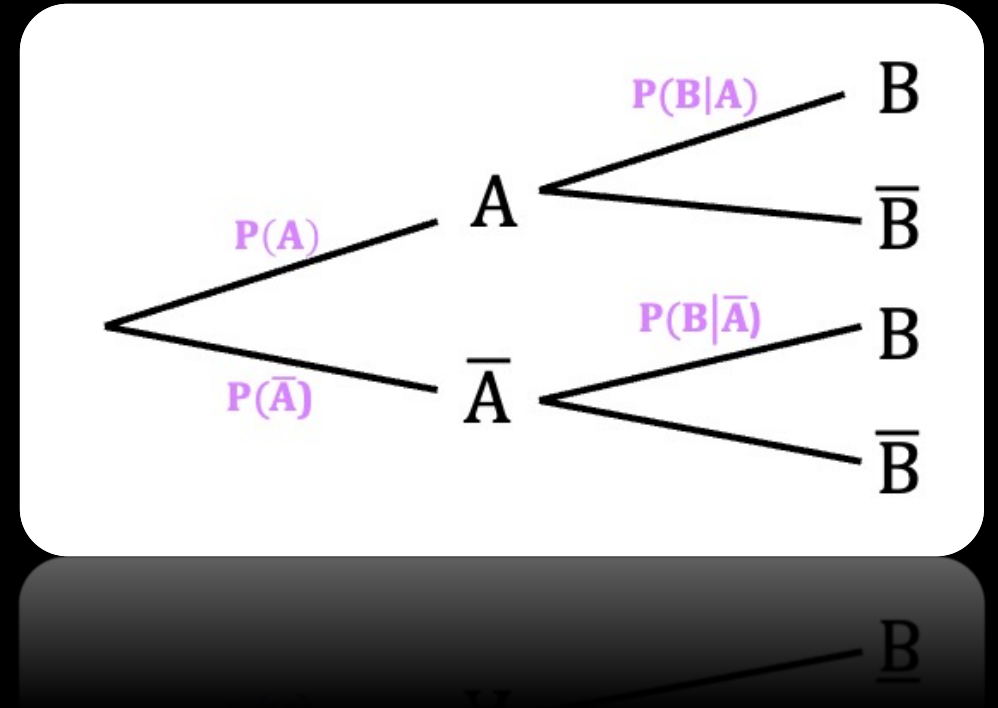
$$P(A_3 | A_1 \cap A_2) = 4-1/9-1 = 3/8$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) = 5/10 \cdot 4/9 \cdot 3/8 = 1/12$$

*Il y a donc 1/12 chance de tirer 3 tee-shirts rouges d'affilé.*



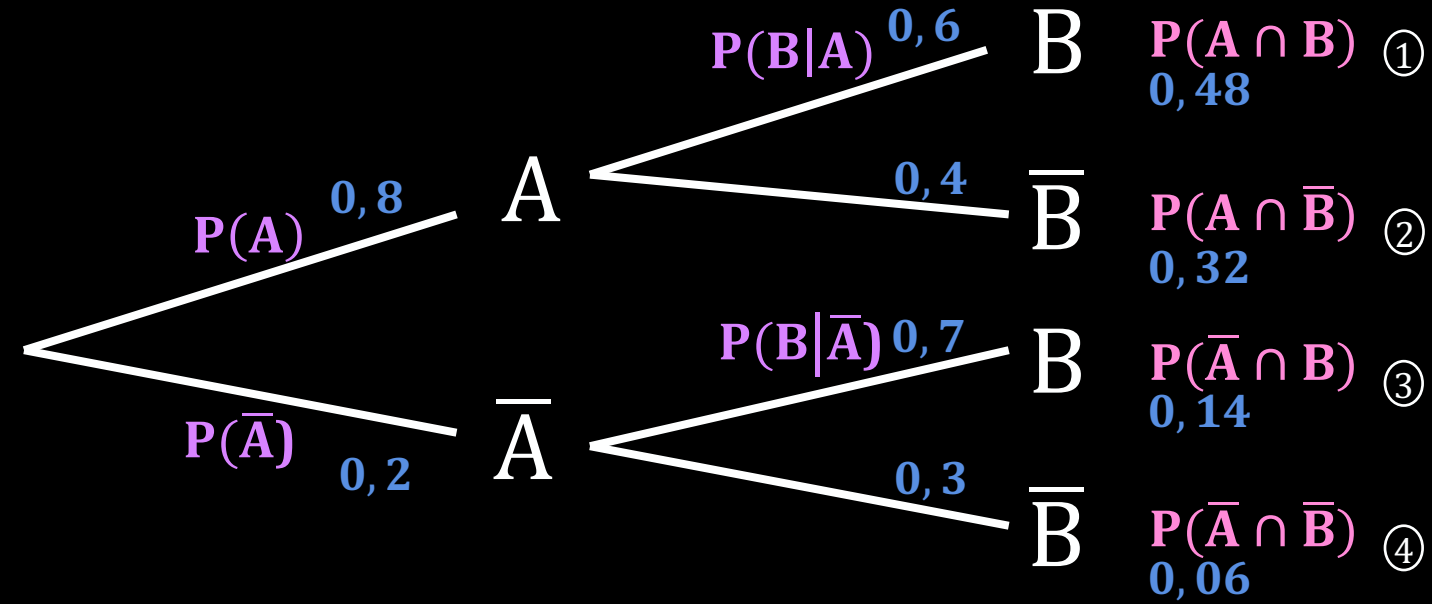
1. Selon le théorème de la multiplication, la probabilité d'un chemin est le produit de chaque branche du chemin
2. Les chemins s'excluent mutuellement
3. La somme de toutes les probabilités des finalités doit être égale à 1



## DIAGRAMME EN ARBRE

Complétez l'arbre :

- $P(\bar{A})$
- $P(B|\bar{A})$
- $P(\bar{B}|\bar{A})$
- $P(B|A)$
- $P(A \cap \bar{B})$



Exemple d'application avec diagramme en arbre



# FORMULE DE BAYES :

**Définition d'une probabilité conditionnelle :**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{ou} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

+

**Théorème de la multiplication :**

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

=

**Formule de Bayes :**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

+++

+++



Toi devant cette diapo

Toi devant cette diapo

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

*A : PaperMate  $\rightarrow P(A) = 5/20$*

*B : Stylo Bleu  $\rightarrow P(B) = 12/20$*

*$P(B|A) = 4/5$*

*Dans une trousse on a 20 stylos. On a 15 stylos Bic et le reste des stylos sont des PaperMate. On sait aussi que 12 sont bleus, 4 sont rouges et le reste sont noirs.*

*Parmi les PaperMate, 4 sont bleus, et celui restant est rouge.*

*On veut savoir quelle est la probabilité si on tire un stylo au hasard parmi ceux qui sont bleus et de tomber sur un PaperMate ?*



Exemple d'application de la formule de Bayes :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$A : \text{PepperMate} \rightarrow P(A) = 5/20$

$B : \text{Stylo Bleu} \rightarrow P(B) = 12/20$

$P(B|A) = 4/5$

$$P(A|B) = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{20}}{\frac{12}{20}}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{20}}{\frac{12}{20}} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 20}{5 \cdot 20 \cdot 12} = \frac{1}{3}$$

Exemple d'application de la formule de Bayes :

Quand t'as tout  
compris avec l'exemple

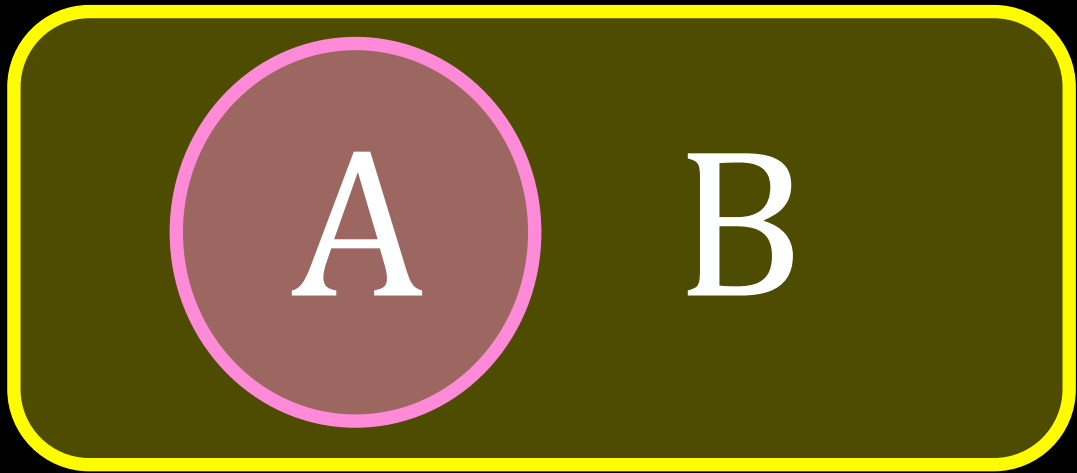


# ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

- $P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B)$
- La probabilité de réalisation de A ne change pas avec la réalisation de B
- Soient A, B, et C : s'ils sont indépendants 2 à 2 (A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B) **ET** si  $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ , alors ces 3 événements sont **indépendants** !

# INDÉPENDANCE ET INCLUSION :

**ACB** : A est inclus dans B donc  $P(A \cap B) = P(A)$



Formule de Bayes quand **ACB** :

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

⚠ A et B ne sont PAS indépendants ⚠



# INDÉPENDANCE ET EXCLUSION :

$A \cap B = \emptyset ; P(A \cap B) = 0$  : A et B sont **exclusifs, disjoints, incompatibles**, donc  $P(A|B) = P(B|A) = 0$



Toi qui va  
perfect la  
biostat à  
l'EB

⚠ A et B ne sont PAS indépendants ⚠

# INCOMPATIBILITÉ ET INDÉPENDANCE :

Incompatibles = exclusifs = disjoints	Indépendants
Ne fait PAS intervenir leur probabilité	Liés à leur probabilité
Ne peuvent PAS se produire en même temps	Peuvent se produire en même temps
Défini par : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

✨💪🥰 Courage à tous, on croit en vous 🥰💪✨



💖 La Team Biostat 💖