Probabilités et évènements

Les **probabilités** forment une branche des **mathématiques** permettant de modéliser les phénomènes où le hasard intervient. On sélectionne un **échantillon** de la population **au hasard** (par tirage au sort), puis on **extrapole** à l'ensemble de la population les résultats obtenus sur cet échantillon.

Une **population** est un ensemble **d'objets** très grand voire infini. *Ex : L'ensemble des habitants de France.*

Un **échantillon** correspond à un **sous-ensemble** de cette population. C'est sur lui que l'on établit généralement les études statistiques (une étude exhaustive d'une population est souvent impossible ou trop coûteuse). *Ex : Les habitants de Nice.*

Mais travailler sur des échantillons pose **2 types de problèmes** :

-un problème de **représentativité** *(A l'issue d'une étude statistique sur les habitants de Nice, peut-on extrapoler une conclusion à l'ensemble de la population Française ?)*

-un problème de **confiance** *(Si on reproduisait cette étude statistique sur les habitants de Paris, Limoges ou Marseille, obtiendrait-on les mêmes résultats ?)*

_-

Ensembles et éléments :

1. Définitions et notations :

- Un **ensemble** est une liste ou collection d'objets définis et les objets d'un ensemble sont appelés **éléments.**

- On note : ¤ E ou Ω est « l'ensemble universel »
¤ $\in$ se lit « appartient »
¤ $\emptyset$ correspond à « l'ensemble vide »
¤ $\subset$ signifie « inclus »

- Un ensemble A défini en **extension** est dit **explicite**, c'est-à-dire qu'on fait une liste de tous les éléments de l'ensemble. *Ex : A = {1;2;3;4;5;6} pour un lancer de dé.*

- Un ensemble B défini en **compréhension** est dit **implicite**, c'est-à-dire qu'on ne liste pas les éléments de l'ensemble mais qu'on les définit par une propriété. *Ex : B = {Couleur pique} dans un jeu de carte.*

2. Opérations :

Soient 2 sous-ensembles A et B de Ω.

- **A ∩ B** ou ***intersection*** : C'est l'ensemble des **éléments communs** à A **et** à B. On dit que A et B sont **disjoints** si l'ensemble A ∩ B est vide (∅).

- **A ∪ B** ou ***union*** : C'est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B.

- **Ā** ou **∁A** ou **complémentaire de A** : C'est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

- **A – B** ou **différence** : C'est l'ensemble des éléments qui **appartiennent à A sans appartenir à B**. On l'appelle aussi le **complémentaire de B relatif à A**.

- **A Δ B** ou **différence symétrique** : C'est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A soit à B sans appartenir à A ∩ B. Ce lien est de nature **exclusive** (on ne peut pas appartenir aux 2). Par ailleurs, **A Δ B = A ∪ B - A ∩ B.**

- Complémentaire de A ∪ B = **∁(A∪B) = ∁A ∩ ∁B**

- Complémentaire de A ∩ B = **∁(A∩B) = ∁A ∪ ∁B**

- **A ∩ (B∪C) = (A∩B) ∪ (A∩C)**

- **A C B** : La survenue de l'évènement A provoque celle de l'évènement B (A est compris dans B).

3. Ensembles finis / infinis :

- **Ensemble fini** : Il contient un **nombre fini d'éléments**. L'ensemble vide est aussi un ensemble fini. Un ensemble fini est **toujours dénombrable**.

- **Ensemble infini** : Il contient un **nombre infini d'élément**. Il peut être :

    - **dénombrable** : à chaque éléments de l'ensemble correspond un unique entier naturel.
    - **indénombrable**

4. Ensemble produit et cardinal :

- Soit A et B deux ensembles, on appelle « **ensemble produit » l'ensemble A x B**, c'est-à-dire l'ensemble des couples **ordonnés** (a,b) où a $\in$ A et b $\in$ B.

On peut généraliser ce produit à n ensembles, on parle alors de produit cartésien.

- Le cardinal d'un ensemble ou **Card(E)** correspond au **nombre d'éléments** que contient un ensemble dénombrable.

- Pour un ensemble produit, **Card(A x B) = Card(A) x Card(B)**

5. Familles d'ensembles :

Soit A un ensemble quelconque.
L'ensemble des sous-ensembles de A constitue la **famille des parties de A.**
Le **nombre de parties** d'un ensemble de p éléments est **2^p**.

Exemple : Soit une pièce de monnaie dont l'ensemble A est {pile, face}.Un sous ensemble B : {pile}, un autre sous ensemble C : {face} et un sous ensemble D : {∅}
L'ensemble des parties de A est P(A) = { ∅ , {pile}, {face}, {pile,face} }.
Le nombre de parties de A est : $2^2 = 4$

Partition de A = subdivision de A en sous-ensemble disjoints dont la réunion forme A.
$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$

Eléments de probabilité :

Phénomène aléatoire = phénomène dont **on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance**, celui-ci est lié au hasard. Les calculs de probabilité modélisent les phénomènes aléatoires.

Phénomène déterministe = phénomène dont **on peut prévoir le résultat à l'avance** grâce aux lois de la physique. Ils observent une certaine régularité de comportement.

Epreuve = expérience aléatoire. *Exemple : un lancer de dé à 6 faces.*

Evènement certain : **On appelle Ω** l'ensemble des résultats possibles de cette épreuve, c'est **l'évènement certain**. Chaque résultat sera donc forcément un élément de Ω. *Exemple : lors d'un lancer de dé, Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}*

Evènement : **Un sous-ensemble de Ω est appelé un évènement**. Il s'agit d'un ensemble de résultats (si Ω est dénombrable). *Exemple : A est l'évènement « avoir un nombre pair » lors d'un lancer de dé.*

Evènement élémentaire : C'est **un résultat unique de Ω**, défini par un résultat précis. *Exemple : « Obtenir un 6 ».*

Evènement impossible : **noté ∅** . *Exemple : « Obtenir un 7 »*

Probabilité :

On associe à une probabilité sur Ω une **fonction P** qui à chaque **évènement A** de Ω associe **un réel de l'intervalle [0,1]**. **Une probabilité est donc forcément comprise entre 0 et 1**. La probabilité P est censée mesurer les chances de réalisation de cet événement.

1. Propriétés :

$P(\Omega) = 1$
$P(\emptyset) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que les évènements A et B sont incompatibles

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Si A C B, alors $P(A) \leq P(B)$

2. Propriété d'additivité forte :

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - (P(A\cap C) + P(A\cap B) + P(B\cap C)) + P(A\cap B\cap C)$$
$$P(A\cup B\cup C) = P(A\cup B) + P(A\cup C) + P(C\cup B) - (P(A) + P(B) + P(C)) + P(A\cap B\cap C)$$

3. Equiprobabilité :

Tous les évènements élémentaires ont la même probabilité égale à 1/Card(Ω).

4. Probabilité sur un ensemble fini :

La somme des probabilités des évènements de Ω vaut 1.

Dénombrements:

A. p-liste avec remise (Ordonné, avec remise) :

Formule : $Card(E^p) = (Card(E))^p$

On prend un élément au hasard dans E et on le remet dans E. On répète p fois cette expérience.
Exemple : on tire 3 cartes successivement dans un jeu de 32 cartes en remettant à chaque fois la carte dans le paquet.
Pour le premier tirage on a 32 possibilités ; pour le second tirage on a encore 32 possibilités puisqu'on a remis la carte ; idem pour le troisième.
Le nombre de possibilités est donc de $32 * 32 * 32 = 32^3 = Card(E)^p$

B. Arrangement de n éléments pris p à p (Ordonné, sans remise) :

Formule : $A_n^p = n\,!\,/\,(n-p)\,!$

*Exemple : On dispose de 3 cartes : As, Roi, Dame. On tire **SUCCESSIVEMENT** (≠simultanément !) 2 cartes sans remise. Le nombre d'arrangements possibles (= le nombre de couples de cartes possibles en tenant compte de l'ordre de tirage) est égal à :*

$A_3^2 = 3\,!\,/\,(3-2)\,! = 3*2*1\,/\,1 = 6$, *soit (As, Roi) (As, Dame) (Roi, As) (Dame, As) (Dame, Roi) (Roi, Dame)*

C. Arrangement avec répétition (Ordonné, avec remise) :

Formule : n^p

Exemple : On veut savoir combien de mot de 4 lettres peuvent être formés avec les 26 lettres de l'alphabet. On a 26 possibilités pour la première lettre, 26 pour la seconde, 26 pour la troisième et idem pour la quatrième. On peut donc faire 26^4 mots de 4 lettres.

D. Permutation d'un ensemble fini à n éléments (Ordonné, sans remise) :

Formule : $P_n = n\,!$

Ici, on prend les éléments 1 par 1 sans les remettre jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus.

Exemple : On dispose de 4 cartes : As, Roi, Dame et Valet de coeur. On les tire une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus.
Le nombre de suite de cartes (= permutations) possibles est donc :
$P_4 = 4\,! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ permutations.

E. Permutation avec répétition (Ordonné, sans remise) :

Formule : $P_n = n\,! / (k_1\,! \times k_2\,! \times k_3\,!)$

Les éléments sont classés par catégorie et on les tire 1 à 1 en tenant compte que de la catégorie.

Exemple: 6 chevaux sont au départ d'une course hippique : 2 chevaux bleus (B_1 et B_2), 3 Rouges (R_1, R_2 et R_3) et 1 Jaune (J_1). Le nombre de classements possibles à l'arrivée en ne tenant compte que des catégories est :
*Pn = 6 ! / (2 ! * 3 ! * 1 !) = 6*5*4*3*2*1 / (2*1*3*2*1*1) = 5*4*3 = 60*

L'ordre au sein d'une même catégorie n'est pas important :
(R_1, B_2, J_1, R_3, B_1, R_2) = (R_2, B_1, J_1, R_1, B_2, R_3) par exemple.
n = Nombre total de chevaux au départ de la course.
Il y a 3 catégories de chevaux : Bleu, Rouge et Jaune.
k1 = nombre de chevaux Bleus, k2 = nombre de chevaux Rouge, k3 = nombre de chevaux Jaunes.

F. Combinaison de n éléments pris p à p parties d'un ensemble (Non ordonné, sans remise) :

Formule : $C_n^p = n\,! / (p\,! * (n-p)\,!)$

On prend p éléments dans n **SIMULTANEMENT** et on en laisse donc n-p. On crée ainsi 2 séries complémentaires

*Exemple : On dispose de 3 cartes : As, Roi, Dame. On tire **SIMULTANEMENT** (≠successivement !) 2 cartes sans remise. Le nombre de combinaisons possibles (= le nombre de couples de cartes possibles) est égal à :*

$\boldsymbol{C_3^2 = 3\,! / (2\,! * (3-2)\,!) = 3*2*1 / 2*1*1 = 3}$, *soit {As, Roi} {As, Dame} {Dame, Roi}*