Probabilités conditionnelles

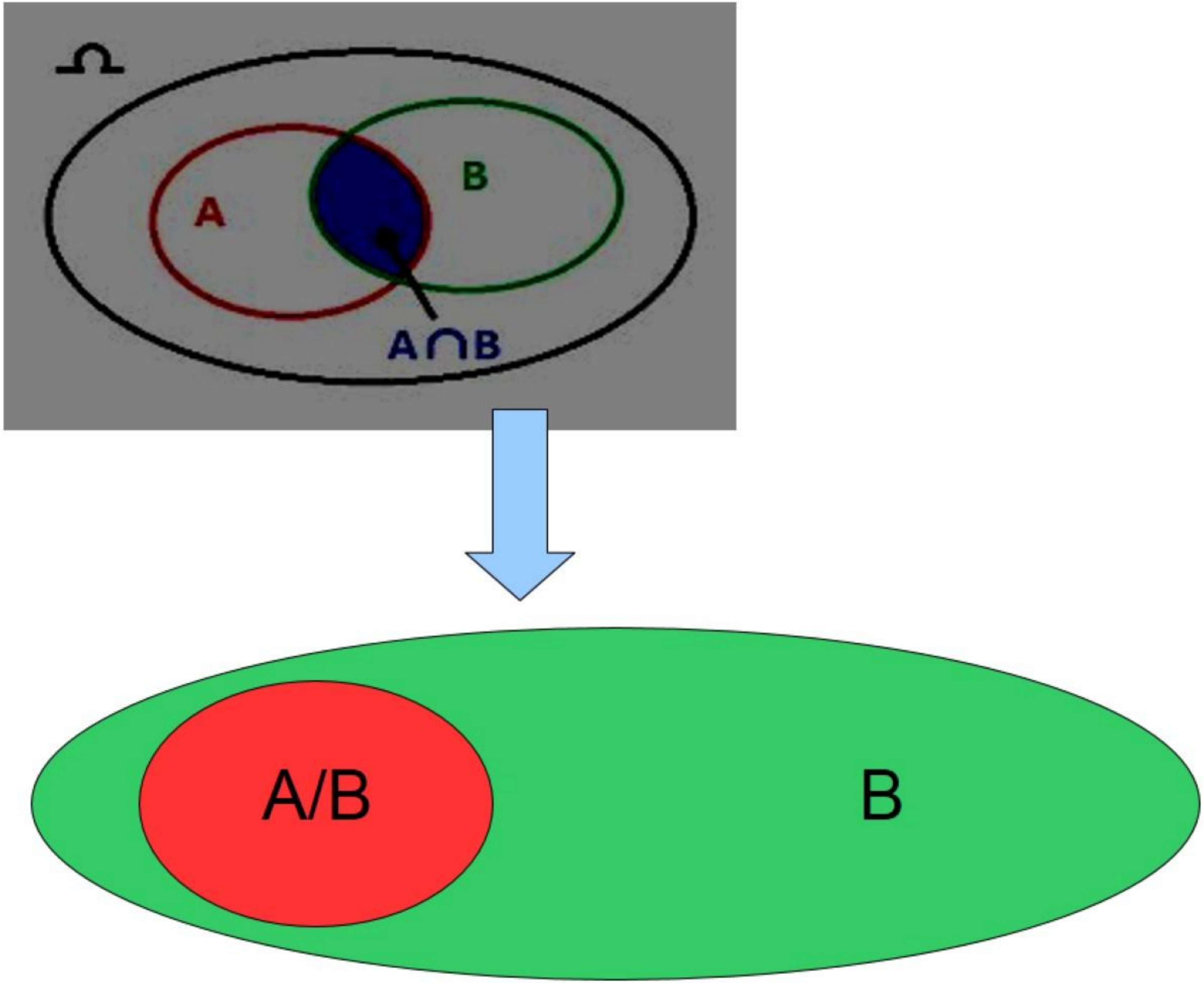
C'est quoi une probabilité conditionnelle ?

- A et B sont 2 évènements

- Probabilité que A survienne **sachant** que B est réalisé

- Noté P(A/B) ou $P_B(A)$

- Formule : $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$



Ω
A
B
A∩B
A/B
B

Exercice

Parmi les élèves en première année de médecine de la promo 2012-2013, 80% des élèves ont été vaccinés contre la grippe H1N1 et 20% de la promo a contracté cette grippe. Au final, la proportion d'élèves vaccinés et ayant contracté la grippe H1N1 est de 5%. Quelle est la probabilité qu'un élève ait contracté la grippe H1N1 en étant vacciné ?

A.5/80
B. 0,05
C. 0,04
D. 0,16
E. 0,0625

Correction

Parmi les élèves en première année de médecine de la promo 2012-2013, 80% des élèves ont été vaccinés contre la grippe H1N1 et 20% de la promo a contracté cette grippe. Au final, la proportion d'élèves vaccinés et ayant contracté la grippe H1N1 est de 5%. Quelle est la probabilité qu'un élève ait contracté la grippe H1N1 en étant vacciné ?

A. 5/80
B. 0,05
C. 0,04
D. 0,16
E. 0,0625

Correction

A = « avoir la grippe H1N1 » B = « être vacciné »

$P(A) = 0,2$ $P(B) = 0,8$ $P(A \cap B) = 0,05$

$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = 0,05 / 0,8 = 5 / 80 = 0,0625$

Attention :

Ne pas confondre $P(A \cap B)$ avec $P(A/B)$!!

Théorème de la multiplication

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$$

$$P(B/A) = P(B \cap A) / P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = \mathbf{P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)}$$

Formule de Bayes

- Issue du théorème de la multiplication

$$\mathbf{P(A/B)} = P(A \cap B) \;/\; P(B) = \mathbf{P(A) \times P(B/A) \;/\; P(B)}$$

$$P(B/A) = P(A \cap B) \;/\; P(A) = P(B) \times P(A/B) \;/\; P(A)$$

Théorème de Bayes

A1, A2 et A3 forment une partition de Ω.

$A1 \cup A2 \cup A3 = \Omega$

B = événement quelconque inclus dans Ω.

Théorème des probabilités totales appliqué à B :

$$\mathbf{P(B) = P(A1 \cap B) + P(A2 \cap B) + P(A3 \cap B)}$$

Théorème de Bayes

Application du théorème de la multiplication :

$$P(B) = P(B/A1) \times P(A1) + P(B/A2) \times P(A2) + P(B/A3) \times P(A3)$$

Application de la formule de Bayes pour A1 :

$$P(A1/B) = P(A1 \cap B) / P(B) = P(B/A1) \times P(A1) / P(B)$$

Théorème de Bayes

Le théorème de Bayes :

- on remplace P(B) par P(B/A1) x P(A1) + P(B/A2) x P(A2) + P(B/A3) x P(A3) dans la formule de Bayes

$$P(A1/B) = \frac{P(B/A1) \times P(A1)}{P(B/A1) \times P(A1) + P(B/A2) \times P(A2) + P(B/A3) \times P(A3)}$$

Exercice (Partie 1)

Une étude indique que 50% de la population est composée de buveurs réguliers. Cependant, 10% de la population sont des buveurs réguliers souffrant de cirrhose. Quelle est la probabilité pour un buveur régulier de souffrir d'une cirrhose ?

A. 0,1

B. 0,25

C. 0,5

D. 0,2

E. A, B, C et D sont fausses

Correction (Partie 1)

Réponse D :

A = « Cirrhose » B = « Buveur régulier »

$P(B) = 0,5$ $P(A \cap B) = 0,1$

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = 0,1 / 0,5 = 0,2$$

Exercice (Partie 2)

Cette même étude indique que 15 % de la population sont des buveurs occasionnels et que 20% d'entre eux souffrent d'une cirrhose. On rappelle que : 50% de la population boit régulièrement, et 10% de la population sont des buveurs réguliers atteints. Quelle est la probabilité d'être un buveur régulier sachant qu'on a une cirrhose ?

A. 0,03 B. 0,10 C. 0,13 D. 0,5

E. Aucune proposition n'est juste

Correction (Partie 2)

B2 = « Buveur occasionnel »

P(B2) = 0,15   P(A/B2) = 0,2

Selon le théorème de Bayes :

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B) \times P(B)}{P(A/B) \times P(B) + P(A/B2) \times P(B2)}$$

$$= \frac{0,1}{0,1 + 0,15 \times 0,2} = \frac{0,1}{0,1 + 0,03} = \frac{0,1}{0,13} = 0,77$$

Correction (Partie 2)

Cette même étude indique que 15 % de la population sont des buveurs occasionnels et que 20% d'entre eux souffrent d'une cirrhose. On rappelle que : 50% de la population boit régulièrement, et 10% de la population sont des buveurs réguliers atteints. Quelle est la probabilité d'être un buveur régulier sachant qu'on a une cirrhose ?

A. 0,03 B. 0,10 C. 0,13 D. 0,5

E. Aucune proposition n'est juste

Diagramme en arbre

- Les résultats de l'expérience n dépendent de ceux de n-1

- **Probabilités conditionnelles**

- Théorème de la multiplication pour chaque feuille

Exercice (1)

Au cours des soldes de l'été 2013, 70% des articles mis en vente ont été soldés. 90% de ces articles ont été vendus et 40% des articles non soldés n'ont pas été vendus.

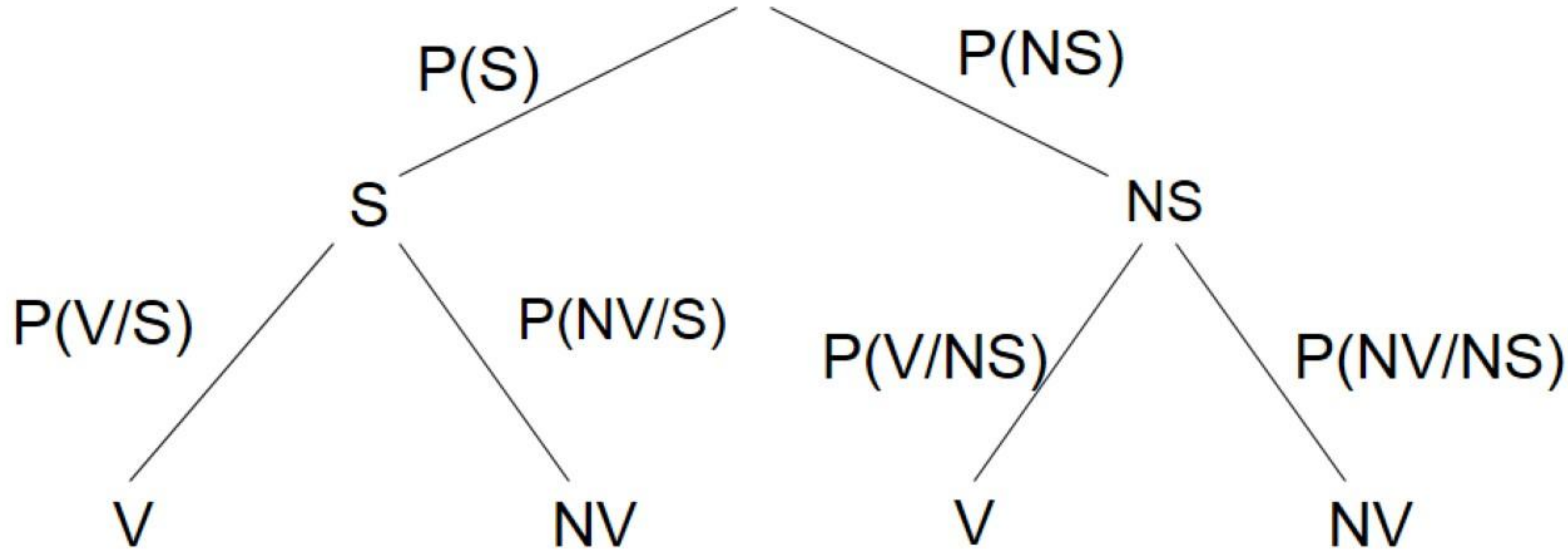
Faire un arbre de probabilité afin de calculer :

- la proportion d'articles non soldés parmi les vendus
- la proportion d'articles soldés parmi les non-vendus

Correction

S = «Soldé» V = «Vendu» NS = «Non Soldé»
NV = «Non Vendu »

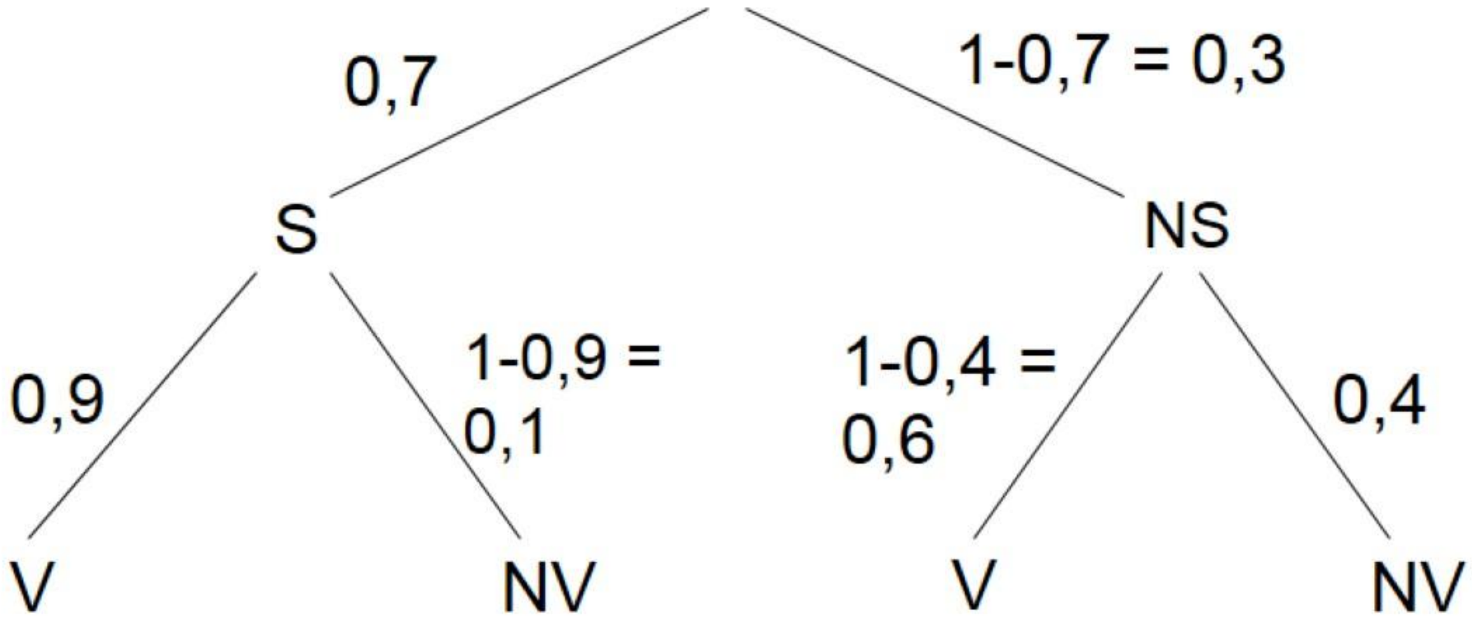
P(S) = 0,7 P(V/S) = 0,9 P(NV/NS) = 0,4



Correction

S = «Soldé» V = «Vendu» NS = «Non Soldé»
NV = «Non Vendu »

P(S) = 0,7 P(V/S) = 0,9 P(NV/NS) = 0,4



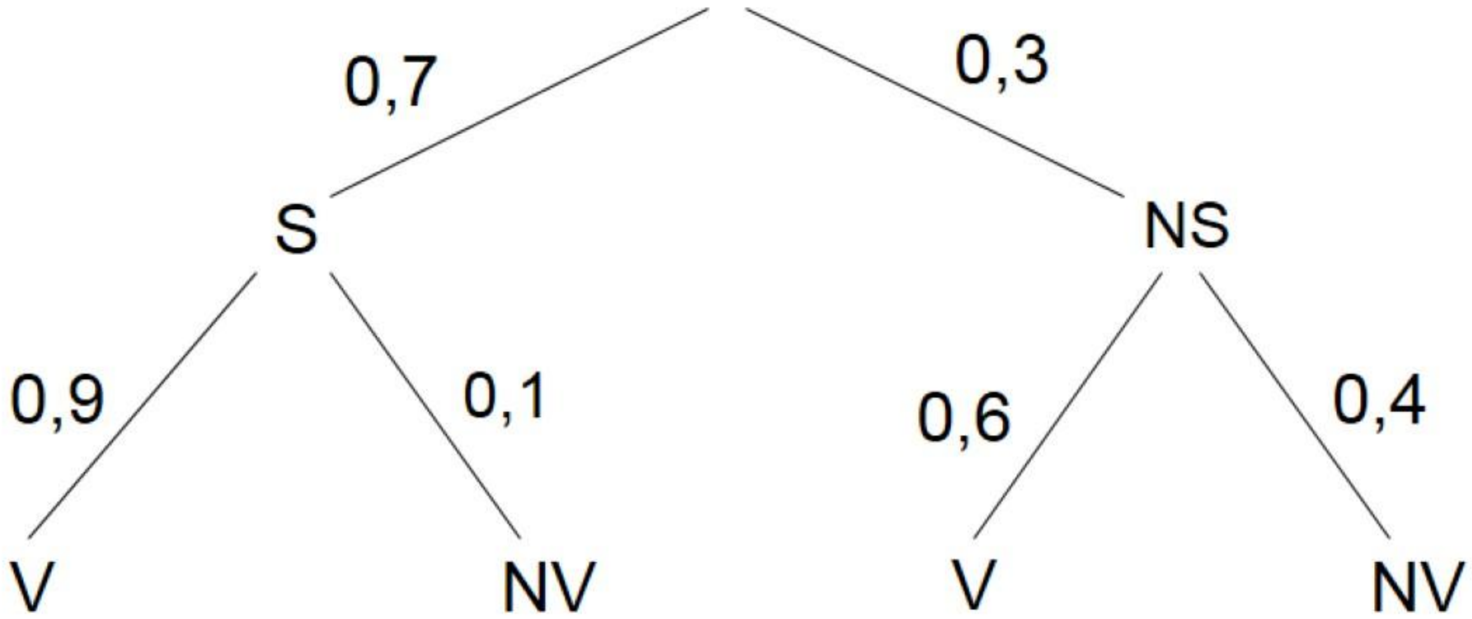
Correction

$P(V \cap S) = P(S) \times P(V/S) = 0{,}7 \times 0{,}9 = 0{,}63$

$P(NV \cap S) = P(S) \times P(NV/S) = 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}07$

$P(V \cap NS) = P(NS) \times P(V/S) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$

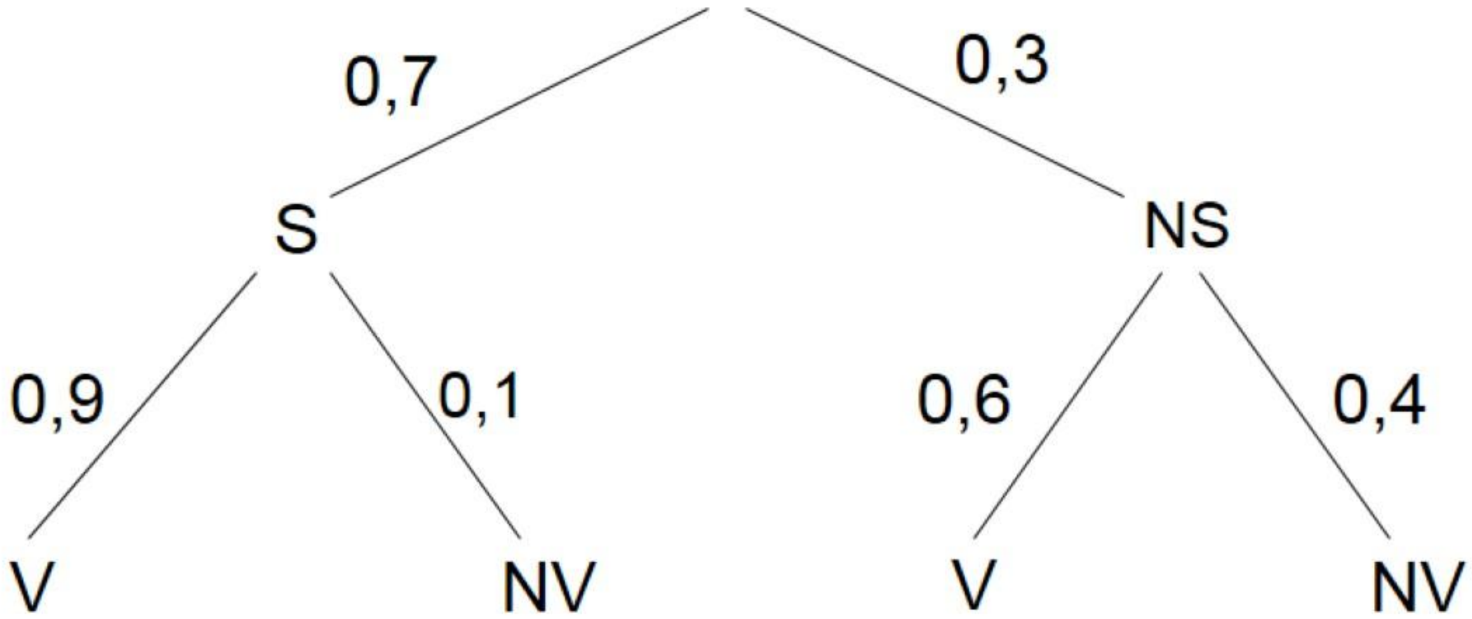
$P(NV \cap NS) = P(NS) \times P(NV/NS) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$



Correction

$$P(V) = P(V \cap S) + P(V \cap NS) = 0{,}63 + 0{,}18 = 0{,}81$$

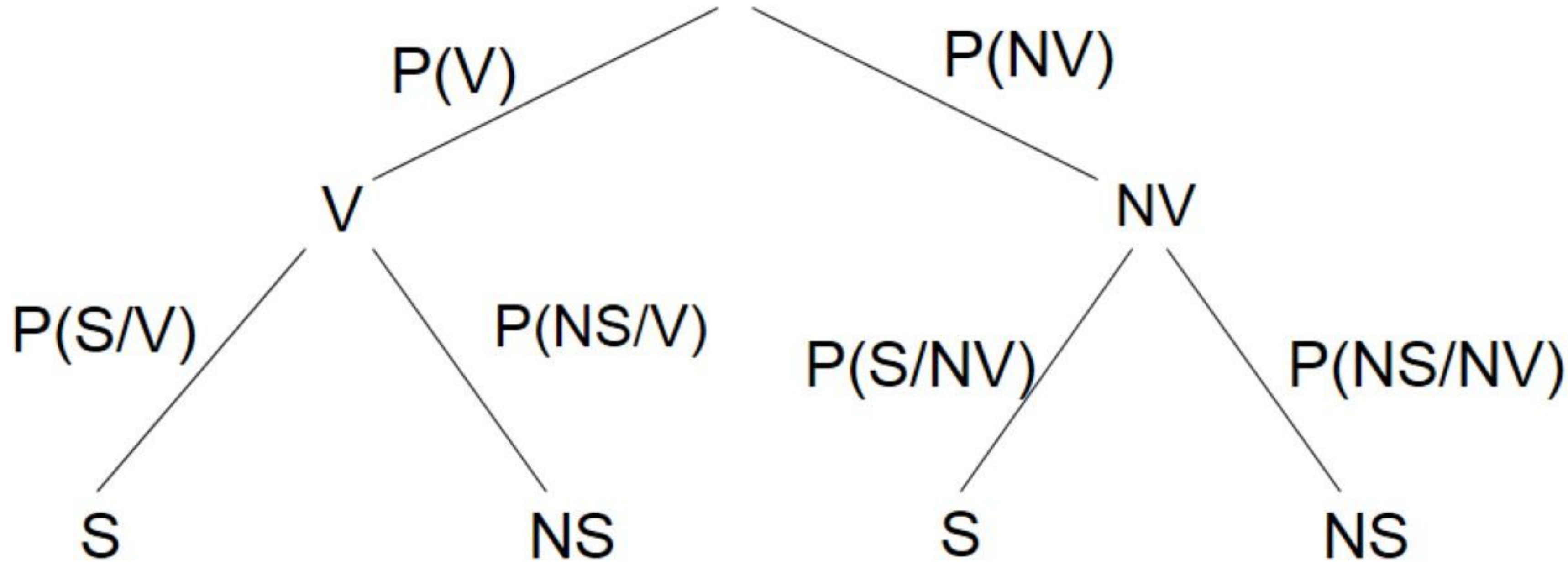
$$P(NV) = P(NV \cap S) + P(NV \cap NS) = 0{,}07 + 0{,}12 = 0{,}19$$



Correction

P(V) = 0,81 P(NV) = 0,19 P(V ∩ NS) = 0,18

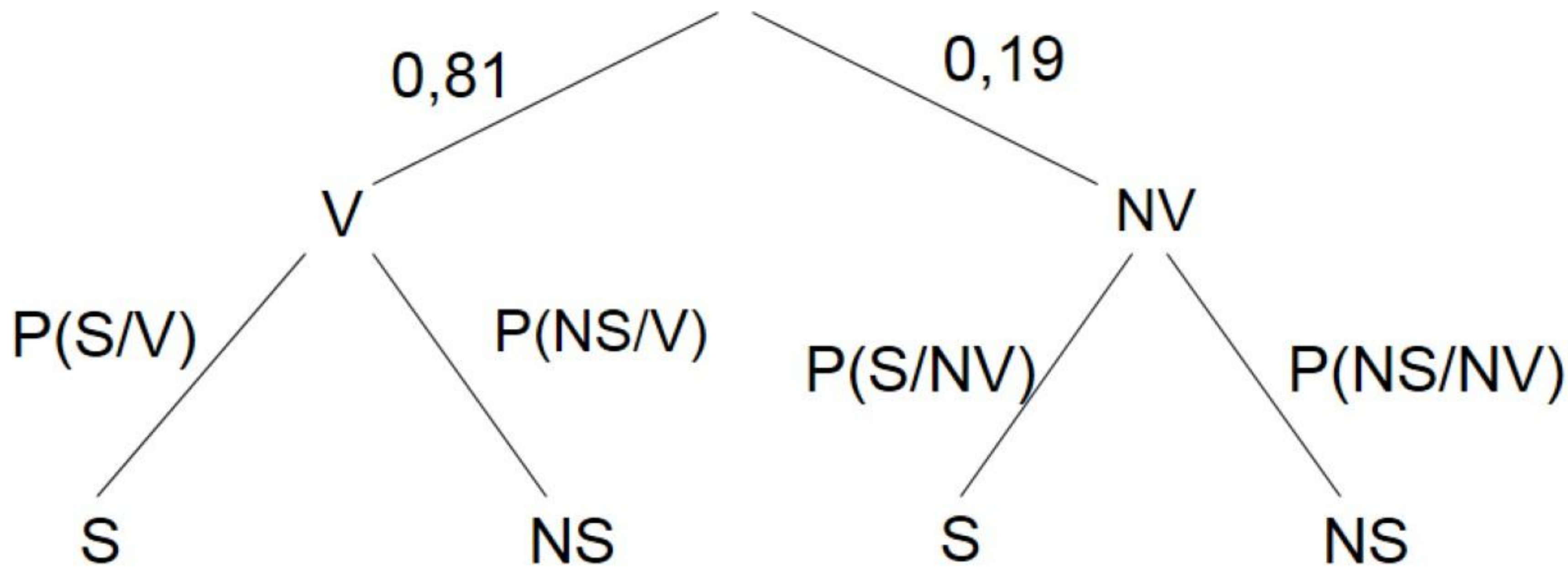
P(NV ∩ S) = 0,07



Correction

$P(S/NV) = P(S \cap NV) / P(NV) = 0{,}07 / 0{,}19 = 7/19$

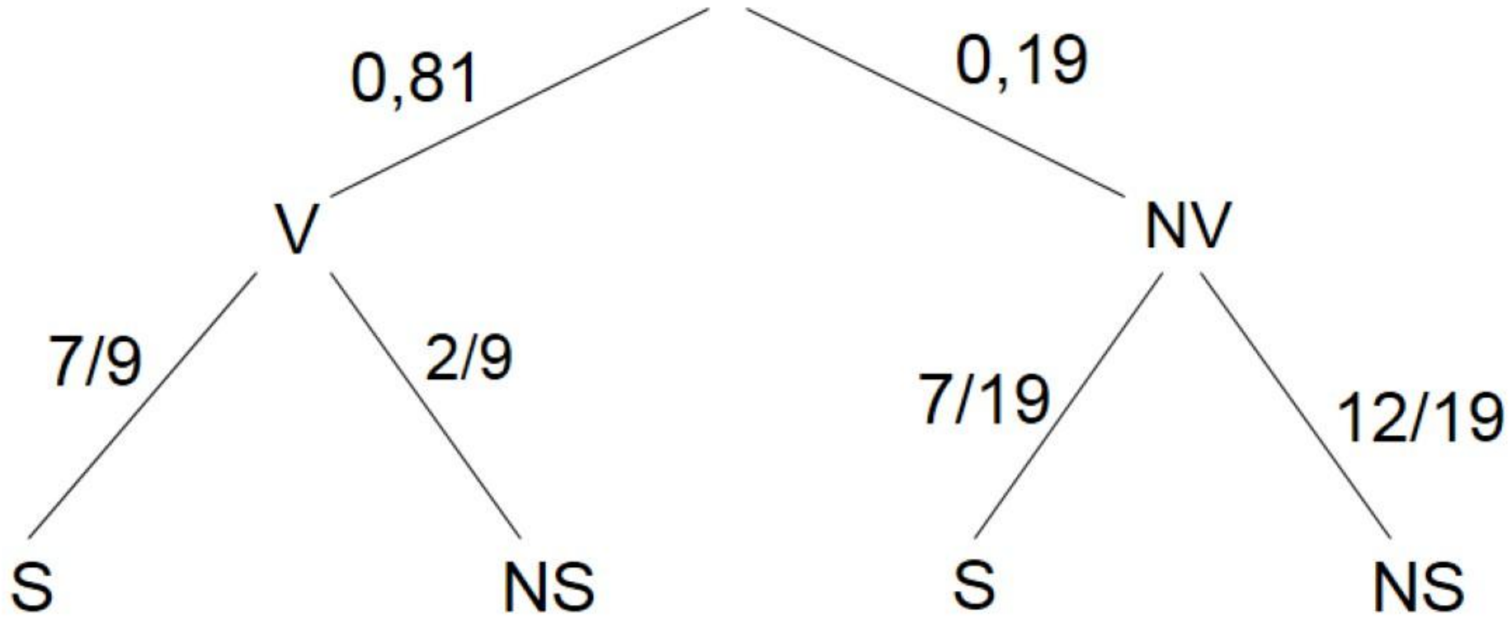
$P(NS/V) = P(NS \cap V) / P(V) = 0{,}18 / 0{,}81 = 2/9$



Correction

P(S/NV) = P(S ∩ NV) / P(NV) = 0,07 / 0,19 = 7/19

P(NS/V) = P(NS ∩ V) / P(V) = 0,18 / 0,81 = 2/9



Exercice (2)

Une urne contient 3 boules Blanches, 4 boules Vertes et 2 boules Mauves. On tire successivement au hasard 3 boules dans cette urne.

Quelle est la probabilité de n'avoir pris aucune boule verte parmi les 3 ?

A. 5/42

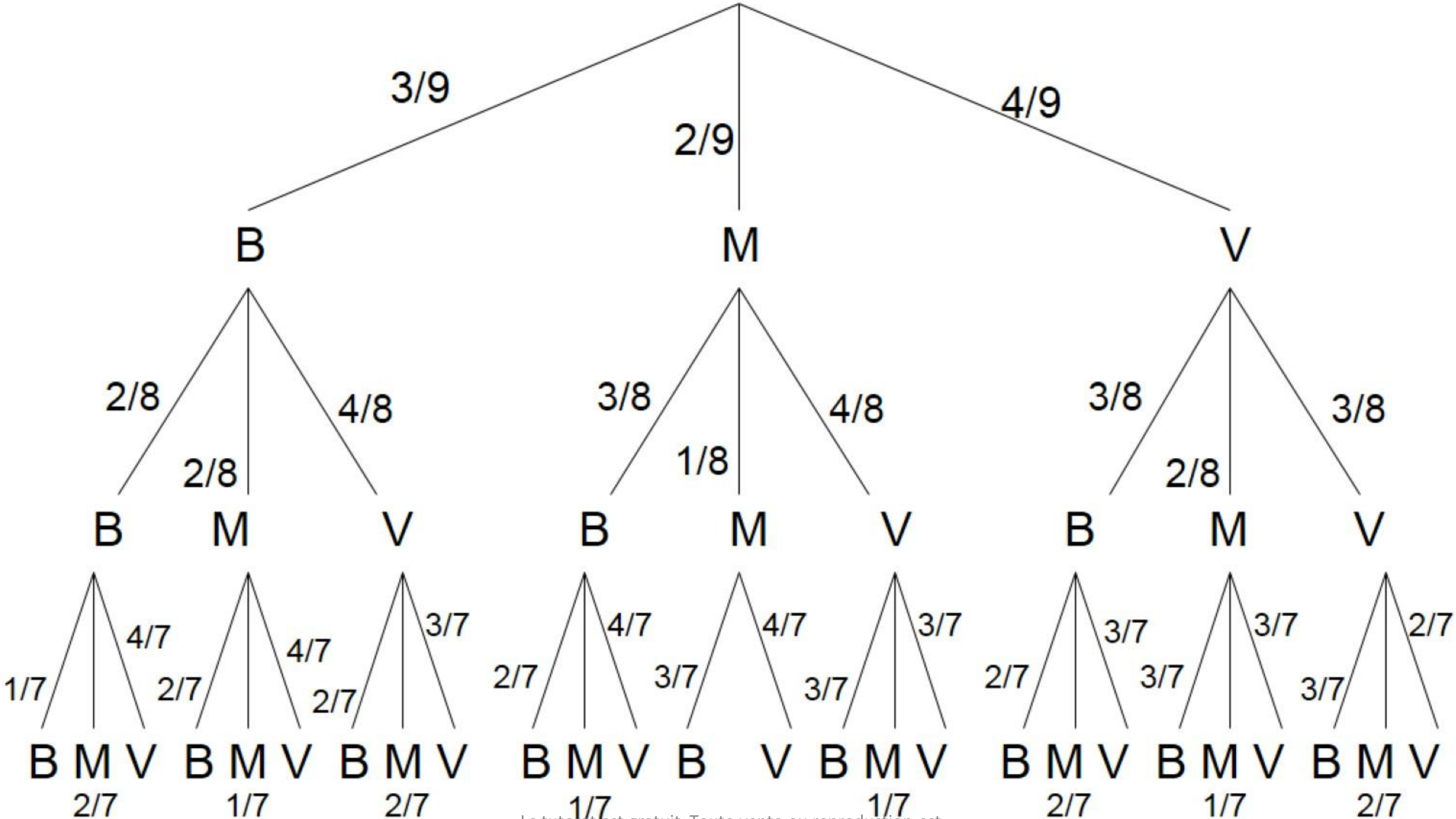
B. 37/42

C. $(5/9)^3$

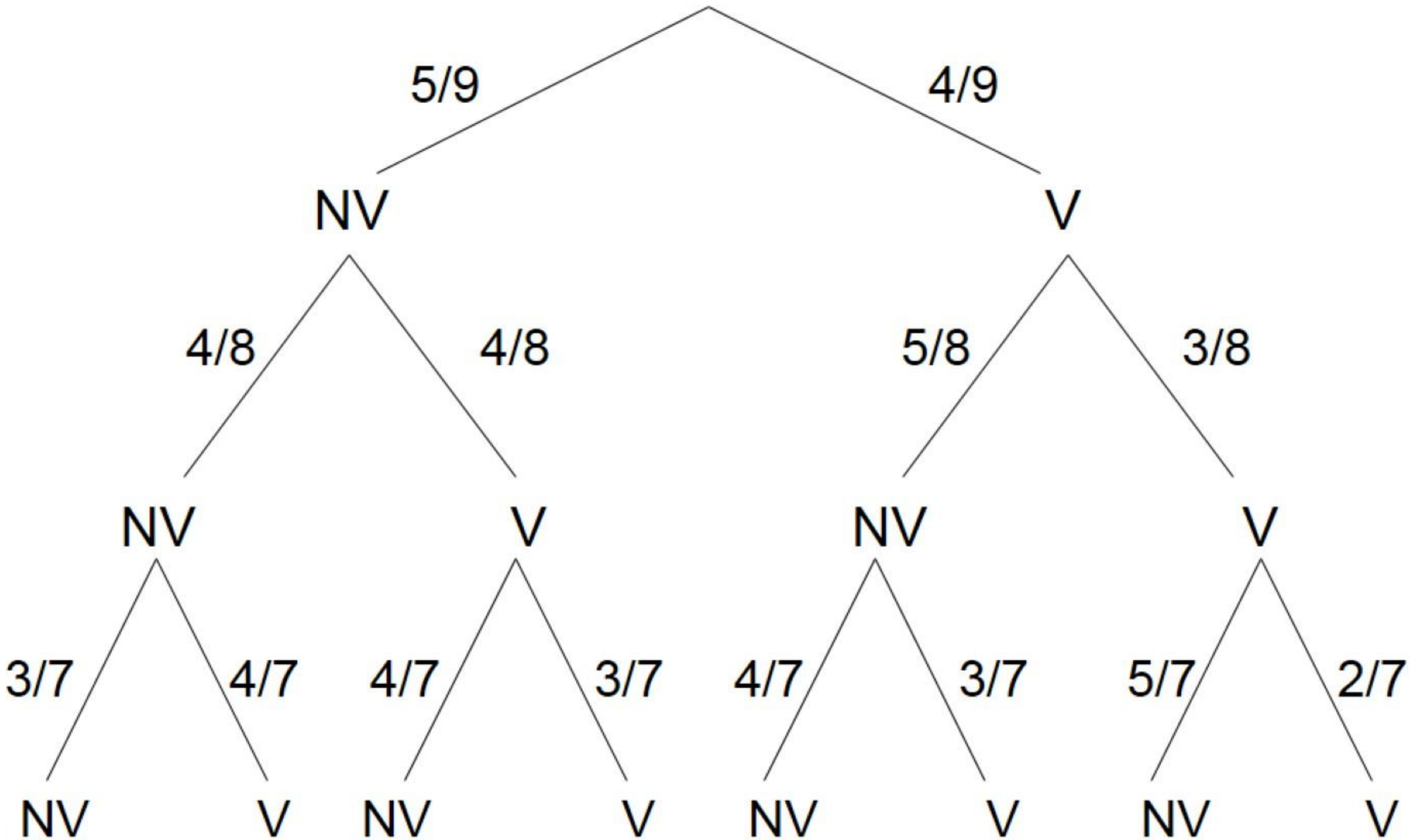
D. $(4/9)^3$

E. 0

Correction


3/9
2/9
4/9
B
M
V
2/8
2/8
4/8
3/8
1/8
4/8
3/8
2/8
3/8
B M V B M V B M V
1/7 4/7 2/7 4/7 2/7 3/7 2/7 4/7 3/7 4/7 3/7 3/7 2/7 3/7 3/7 3/7 3/7 2/7
B M V B M V B M V B M V B V B M V B M V B M V B M V
2/7 1/7 2/7 1/7 1/7 2/7 1/7 2/7

Correction



Correction

La probabilité de n'avoir aucune boule verte parmi les 3 boules tirées est :

P(3 NV)

= P(NV au 1° tirage **ET** NV au 2° tirage **ET** NV au 3° tirage)

$= P\,(NV1 \cap NV2 \cap NV3)$

$= 5/9 \times 4/8 \times 3/7 = 60/504 = 5/42$

Correction

Une urne contient 3 boules Blanches, 4 boules Vertes et 2 boules Mauves. On tire successivement au hasard 3 boules dans cette urne.

Quelle est la probabilité de n'avoir pris aucune boule verte parmi les 3 ?

A. 5/42

B. 37/42

C. $(5/9)^3$

D. $(4/9)^3$

E. 0

A retenir !!!

1. Les chemins s'excluent mutuellement.

2. La probabilité d'un chemin particulier est le produit des probabilités de ses branches.

3. La somme de toutes les probabilités finales obtenues doit être de 1.

Évènements indépendants

Indépendance si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\Rightarrow P(A/B) = P(A) \text{ et } (B/A) = P(B)$$

Ex : Cet hiver, 50% des gens ont eu la grippe, 10% ont eu une rhino-pharyngite et 5% ont eu les 2. Les survenues de ces 2 maladies sont-elles indépendantes ?

$P(G) = 0,5$ $P(R) = 0,1$ $P(G \cap R) = 0,05$

$P(G) \times P(R) = 0,5 \times 0,1 = 0,05 = P(G \cap R)$

Indépendance et inclusion

Si A c B :

$\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)$

$\Rightarrow$ $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = P(A) / P(B)$

$\Rightarrow$ $P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) = P(A) / P(A) = 1$

Conclusion : A et B ne sont pas indépendants

Indépendance et incompatibilité

Si A et B disjoints :

$P(A \cap B) = 0$ $P(A/B) = P(B/A) = 0$

Conclusion : A et B ne sont pas indépendants

ATTENTION !!!

- Incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$