

Variables aléatoires

Lois de probabilités

Le Tutorat est gratuit. Toute vente ou reproduction sont interdites.



Comment définir une variable aléatoire ?

- Épreuve aboutissant à des **événements élémentaires**
- Évènement élémentaire = **nombre**
- **Discrète** ou **continue**

Exercice

On tire au sort un étudiant en PACES, à qui on demande certaines informations. Parmi ces propositions, lesquelles sont des variables aléatoires ?

A. Son âge

B. Son nombre de paires de chromosomes

C. Sa mention obtenue au bac

D. Sa taille

E. Son nombre de chromosomes

Correction

On tire au sort un étudiant en PACES, à qui on demande certaines informations. Parmi ces propositions, lesquelles sont des variables aléatoires ?

A. Son âge

B. Son nombre de paires de chromosomes

C. Sa mention obtenue au bac

D. Sa taille

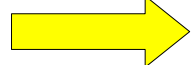
E. Son nombre de chromosomes

Le Tutorat est gratuit. Toute vente ou reproduction sont interdites.

Correction

Le nombre de paires de chromosomes dans l'espèce humaine est un phénomène déterministe : on sait que le caryotype humain est composé de 23 paires de chromosomes.

( B faux)

Cependant, le nombre exact de chromosomes constitue une expérience aléatoire car un individu peut avoir plus ou moins de 46 chromosomes. ( E vrai)

Pour la mention obtenue au bac, il s'agit bien d'une expérience aléatoire mais dont les issues ne sont pas des nombres.

Partie I :

Variables aléatoires
discrètes

*Le Tutorat est gratuit. Toute vente ou reproduction
sont interdites.*

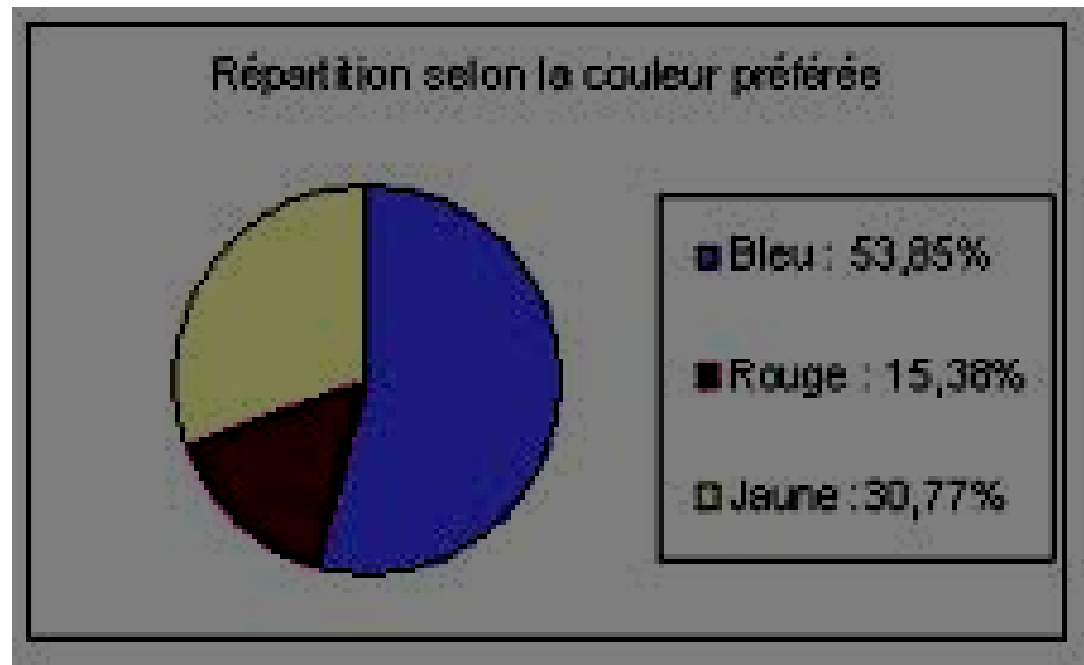
Définitions

Discrète : appartient à un ensemble fini ou infini dénombrable

Loi de probabilité : on associe à chaque éventualité x_i une probabilité p_i

Représentation : tableau ou diagramme

Âge (xi)	17	18	19	20	21
Proportion (pi)	0,2	0,33	0,26	0,12	0,09



Le Tutorat est gratuit. Toute vente ou reproduction sont interdites.

Paramètres

Moyenne / Espérance :

Espérance = moyenne en statistiques

Indicateur de position, traduit la tendance centrale de la variable

$$E(X) = \mu = \sum(x_i p_i)$$

À savoir

Pour tout k dans \mathbb{R} :

$$E(X+k) = E(X) + k$$

$$E(kX) = k E(X)$$

X et Y sont 2 variables aléatoires :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

L'espérance de la somme est la somme des espérances !!

Paramètres

Variance / écart-type :

Variance : - indicateur de dispersion
- noté $\text{Var}(X)$ ou σ^2

Écart-type = σ

$$\text{Var}(X) = \sum(p_i (x_i - \mu)^2)$$

En statistiques :

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

À savoir

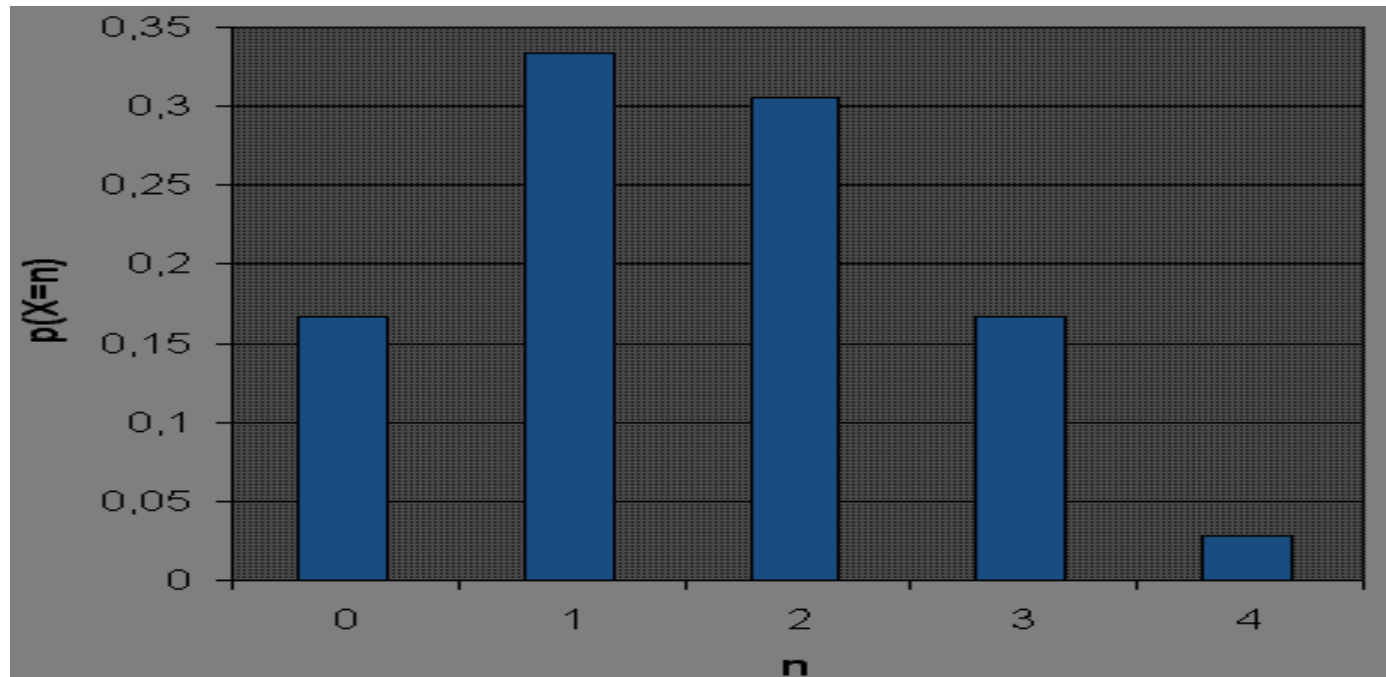
Soit a un réel quelconque :

$$\text{Var}(X + a) = \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$$

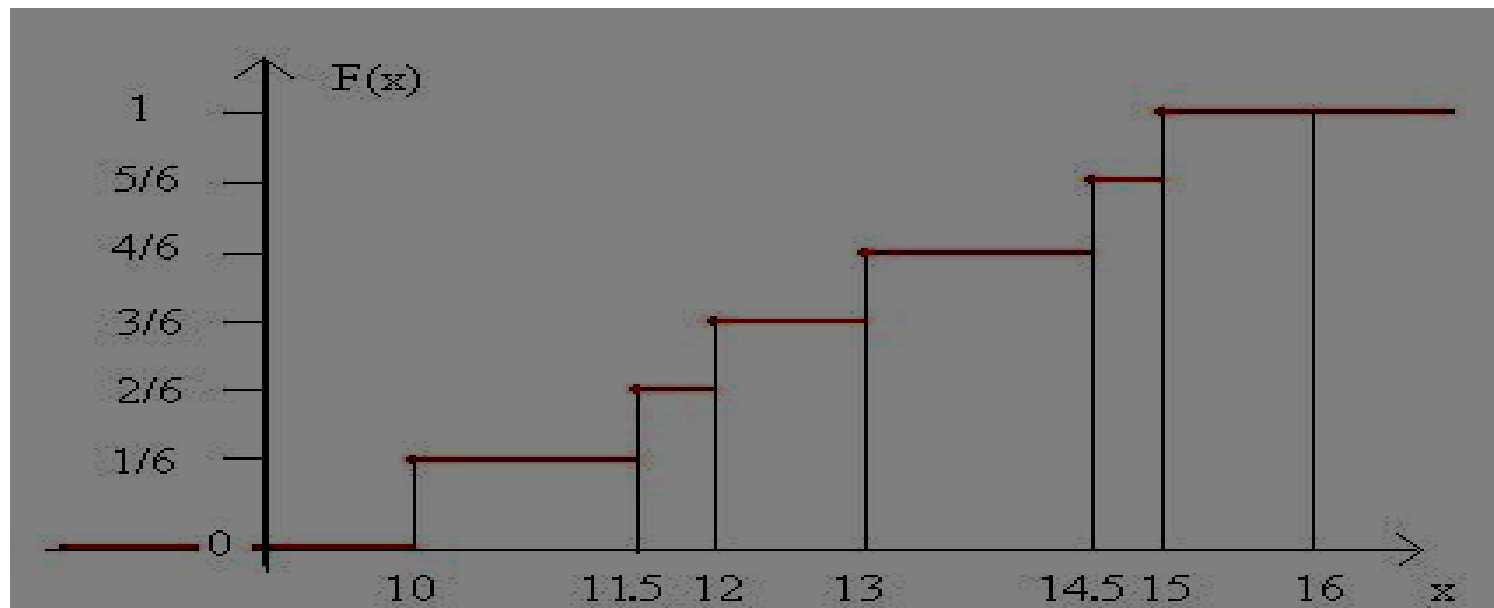
Fonction de distribution

- Modélisée par un **diagramme en bâtons**
- Permet de voir la **distribution des probabilités** de la variable



Fonction de répartition

- Fonction **monotone croissante**
- Représentée par une **fonction en escalier**
- Fonction dite « **cumulative** »



Partie II :

Lois de probabilité
discrètes

Loi de Bernoulli : B(p)

Épreuve unique avec 2 issues possibles :

- **Succès** : $P(X=1) = p$

- **Échec** : $P(X=0) = q = 1-p$

X = nombre de succès au cours de l'épreuve

$$\mu = p$$

$$\sigma^2 = pq$$

Loi Binomiale : B(n,p)

- Épreuve de Bernoulli **répétée n fois**
- Chaque essai est **indépendant**

Pour tout $0 \leq k \leq n$:


$$P(X=k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$$

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = npq$$

Loi Binomiale (2)

Propriétés :

- Si $p = 0,5$: distribution normale **symétrique** autour de μ
- Quand n est **grand**, la **distribution** devient **symétrique**
- Pour n grand et p éloigné de 0 et de 1
 **loi Normale**

Loi Géométrique : G(p)

Épreuve de Bernoulli **répétée jusqu'à l'obtention d'un succès**

k = nombre d'essais jusqu'à l'obtention du succès

$$P(X=k) = p \times q^{k-1}$$

$$\mu = 1 / p$$

$$\sigma^2 = (1-p) / p^2$$

Exercice

Un jeu consiste à lancer un dé non truqué à 6 faces. On gagne lorsqu'on obtient un 3 ou un 4. Donner la ou les vraies :

A. La probabilité d'avoir un 3 est de $1/6$, c'est pourquoi la probabilité de gagner à ce jeu est de $1/3$.

B. Si on répète 4 fois cette expérience, la probabilité de gagner 3 fois est $C_4^3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \frac{2}{3}$.

C. La probabilité de gagner au bout de 2 lancer est de $2/9$.

D. Si on jouait un grand nombre de fois à ce jeu, on pourrait utiliser la loi Normale.

E. Toutes les propositions sont fausses.

Correction

Un jeu consiste à lancer un dé non truqué à 6 faces. On gagne lorsqu'on obtient un 3 ou un 4. Donner la ou les vraies :

A. La probabilité d'avoir un 3 est de $1/6$, c'est pourquoi la probabilité de gagner à ce jeu est de $1/3$.

B. Si on répète 4 fois cette expérience, la probabilité de gagner 3

fois est $C_4^3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \frac{2}{3}$.

C. La probabilité de gagner au bout de 2 lancer est de $2/9$.

D. Si on jouait un grand nombre de fois à ce jeu, on pourrait utiliser la loi Normale.

E. Toutes les propositions sont fausses.

Loi Hypergéométrique : H(N,D,n)

- **D individus possèdent un caractère** dans une population de **N individus**.
- On cherche à **déterminer la probabilité** qu'il y ait **X individus possédant ce caractère** dans un **échantillon de n individus** issus de la population.

$$P(X=k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

Loi Hypergéométrique (2)

$$D/N = p$$

$$\mu = nD/N = np$$

$$\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1} = \frac{N-n}{N-1} \times np \times (1-p) = \frac{N-n}{N-1} \times npq$$

Ex : Dans un trou perdu de 40 habitants, 10 sont des enfants. On tire au sort 8 habitants. Quelle est la probabilité que 3 d'entre eux soient des enfants ?

$$P(X=3) = \frac{C_{10}^3 \times C_{40-10}^{8-3}}{C_{40}^8} = \frac{C_{10}^3 \times C_{30}^5}{C_{40}^8}$$

Loi Hypergéométrique et loi Binomiale

Ces deux lois sont proches, elles ont :

- La même espérance
- Une variance différente

Loi de Poisson : P(λ)

- Détermine la probabilité qu'un **certain nombre d'évènements surviennent en une unité de temps**
- Unités possibles : temps, distance, volume, surface ...

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}$$

$$\mu = \sigma^2 = \lambda$$

Attention : $\lambda \leq 25$

Exemple

Au Valrose Café, en 30 minutes, on sert en moyenne 12 étudiants. Quelle est la probabilité pour que 4 étudiants seulement soient servis en 30 minutes ?
Idem pour 15 ?

$$P(X=4) = \frac{e^{-12} \times 12^4}{4!}$$

$$P(X=15) = \frac{e^{-12} \times 12^{15}}{15!}$$

Partie III :

Variables aléatoires **continues**

Définition

Ce qui caractérise une variable aléatoire **continue**, c'est d'avoir une **probabilité nulle** d'être égale à n'importe quel nombre, donc ne peut pas être définie en listant les probabilités de toutes les éventualités.

Ex : un poids de 66,6666666... kg a une probabilité nulle

On parle donc de probabilité pour qu'une variable aléatoire X prenne une valeur entre a et b , qu'on notera

$$P(a \leq x \leq b)$$

Définition

Variable aléatoire **continue** = à densité

Résultats de l'expérience :

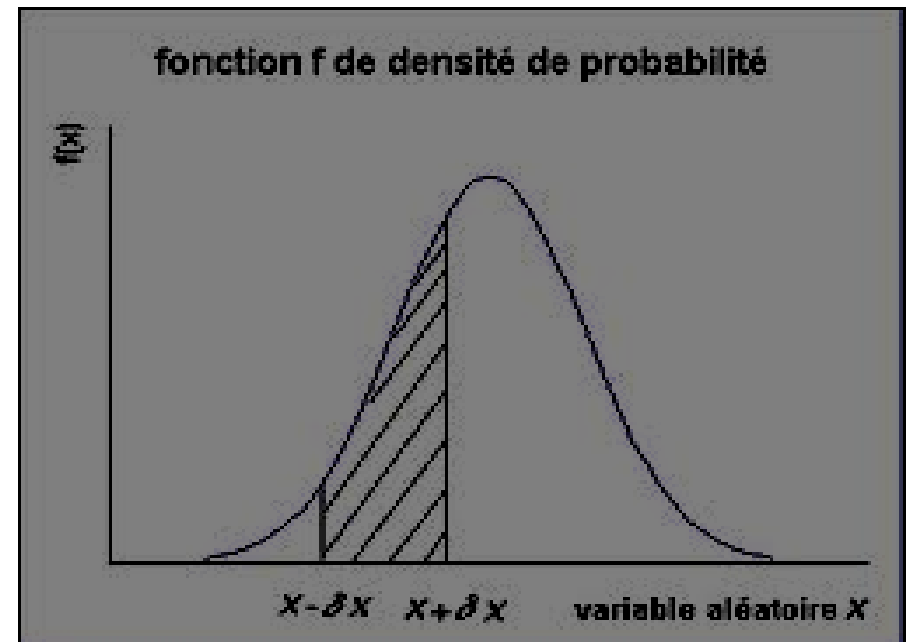
- **indénombrables**
- compris **dans \mathbf{R}** ou **un intervalle de \mathbf{R}**

Ex : la température, la glycémie ...

Densité de probabilité

- $f(X)$ = densité de probabilité de X
- La fonction $f(X)$ définit la loi de probabilité de X

Donc si f est donnée,
la probabilité $P(a \leq x \leq b) =$
surface sous la courbe
entre a et b



Propriétés

On peut admettre les définitions suivantes pour une variable aléatoire X continue de distribution $f(x)$:

- $f(x) \geq 0$

- Si x tend vers $-\infty$, alors f tend vers 0

- Si x tend vers $+\infty$, alors f tend vers 0

Fonction de répartition

-La Fonction de répartition $F(X)$ correspond à l'intégrale de la fonction de densité $f(x)$:

$$F(X) = \int_{-\infty}^X f(x) dx$$

-La Différence **F(b) – F(a)** correspond à la probabilité représentée par l'aire sous la courbe de la **fonction de densité**

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Fonction de Répartition (2)

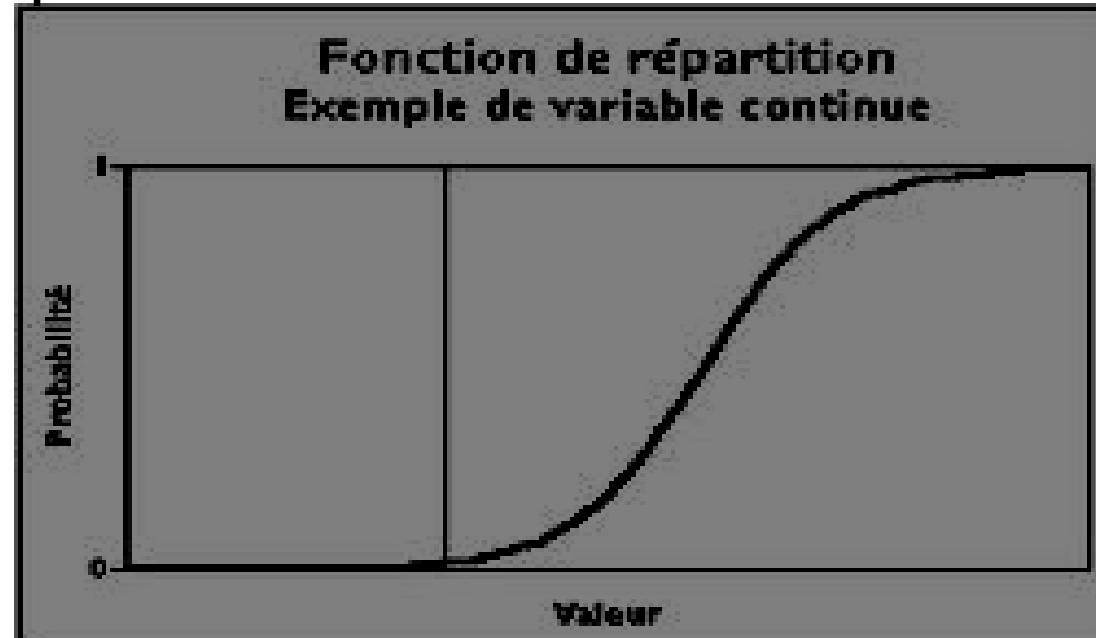
La Fonction de Répartition possède plusieurs propriétés :

-Elle est **Monotone** et **Croissante** (comme pour les variables discrètes)

-Contrairement aux variables discrètes, la fonction de répartition est **continue**

-La probabilité $P(a \leq X \leq b)$ est égale à la différence des hauteurs pour la fonction de répartition

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$



Densité de Probabilité / Fonction de répartition



Variable centrée réduite

Le terme « **centrée** » signifie qu'on **soustrait** la **moyenne** μ de la variable à chacune de ses valeurs initiales.

Le terme « **réduite** » signifie qu'on **divise** toutes les valeurs que prend la variable par son **écart-type** σ .

- Transformation d'une variable X en une variable centrée réduite Y selon la relation :

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Variable Centrée Réduite (2)

- 2 propriétés : $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$
 - On obtient donc des variables avec une moyenne et un écart-type identiques

Cette transformation permet :

- D'obtenir des données indépendantes de l'unité
- Utilisation d'une seule table de probabilité

- N'importe quel problème de probabilité concernant une distribution normale peut donc être ramené à 1 seul cas

Partie IV :

Lois de probabilité
continues

Loi Uniforme : U([a;b])

- Densité de probabilité égale entre a et b et nulle ailleurs
- $[a ; b] \in \mathbb{R}$ et $x \in [a ; b]$ **ET** $f(x) = 0$

$$P(X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx$$

$$\mu = (a+b) / 2$$

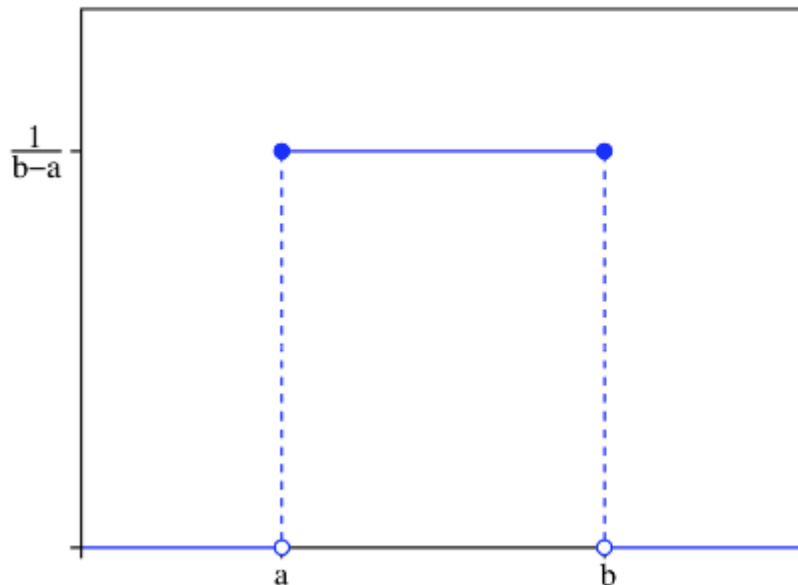
$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Loi Uniforme : U([a;b]) (2)

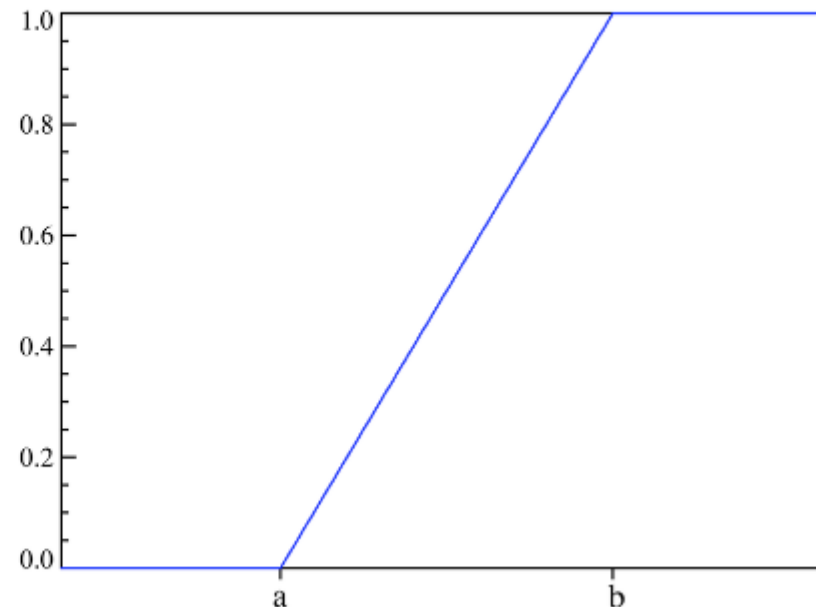
Les probabilités de chaque évènement ont la même probabilité

Exemple : un dé, les 6 valeurs (1, 2, 3, 4, 5, 6) ont la même probabilité

Densité de probabilités (f):



Fonction de répartition (F):

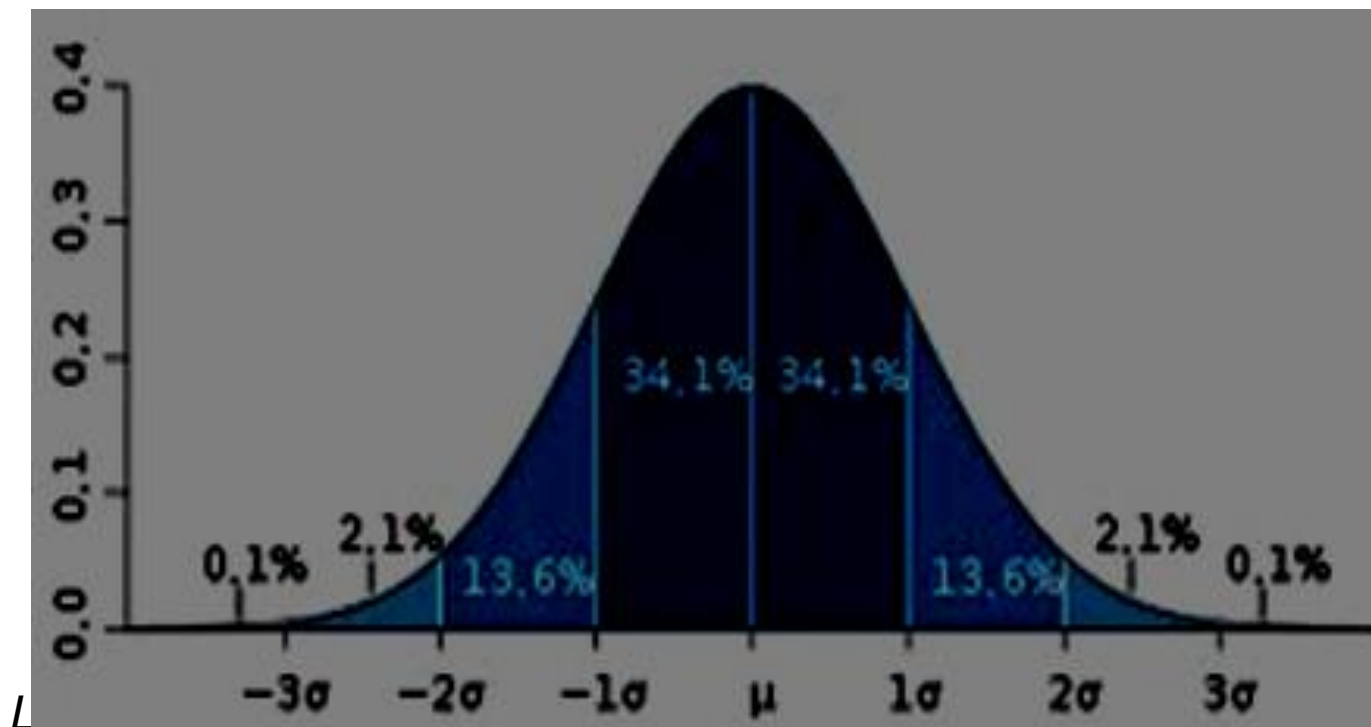


Loi Normale : $N(\mu, \sigma)$

- Est utilisé pour quantifier les erreurs de mesure des appareils

-Principale distribution de probabilité

La courbe représentative de la fonction de densité est appelée courbe de Gauss.



Loi Normale (2)

- **L'aire sous la courbe** délimitée par un intervalle représente la **proportion d'individu** (ou probabilité de la survenue d'un évènement) **dans cet intervalle.**

-La Courbe de Gauss est **symétrique autour de μ**

- Valeurs à connaître :

$$P(X < \mu - 1,65 \sigma \text{ ou } X > \mu + 1,65 \sigma) = 10\%$$

$$P(X < \mu - 1,96 \sigma \text{ ou } X > \mu + 1,96 \sigma) = 5\%$$

$$P(X < \mu - 2,58 \sigma \text{ ou } X > \mu + 2,58 \sigma) = 1\%$$

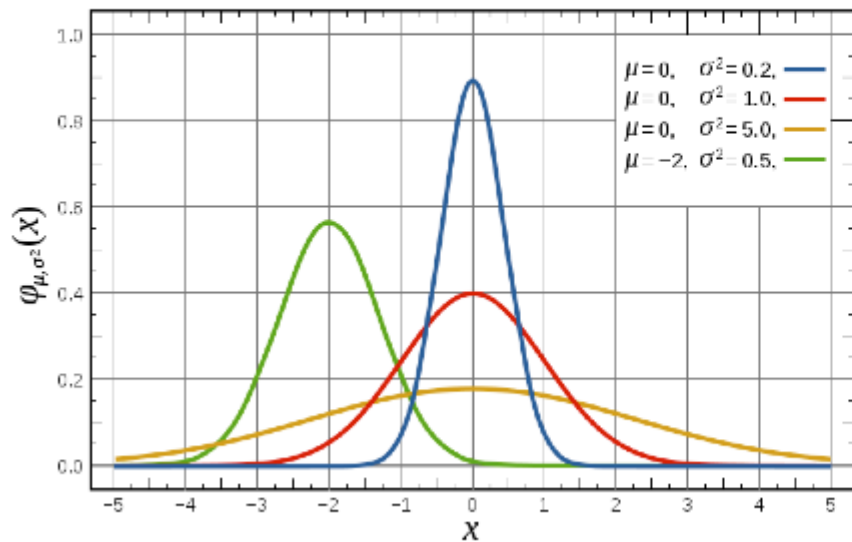
$$P(X < \mu - 3,30 \sigma \text{ ou } X > \mu + 3,30 \sigma) = 0,1\%$$

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 68\%$$

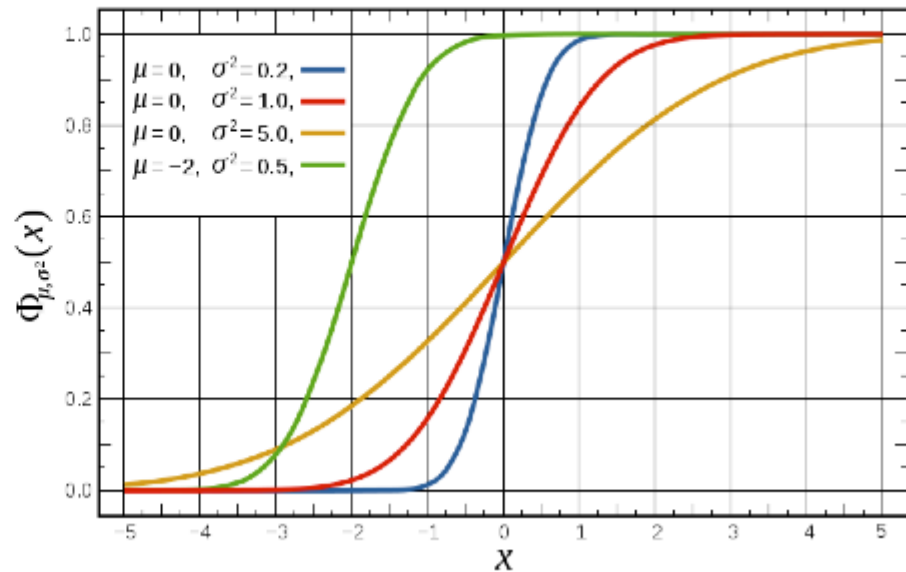
Loi Normale (3)

- En changeant la moyenne et l'écart-type, on peut changer la forme de la courbe

Densité de probabilités (f):



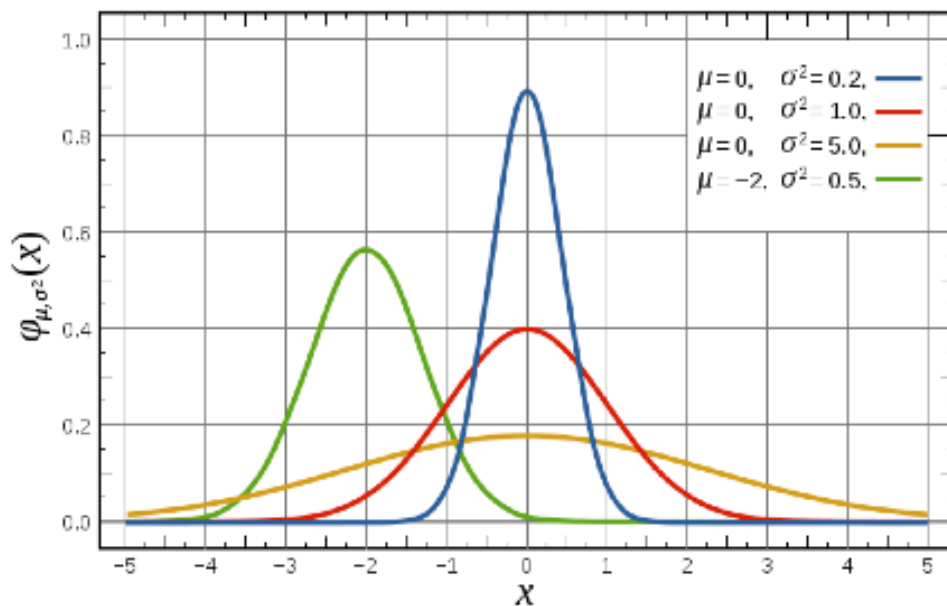
Fonction de répartition (F):



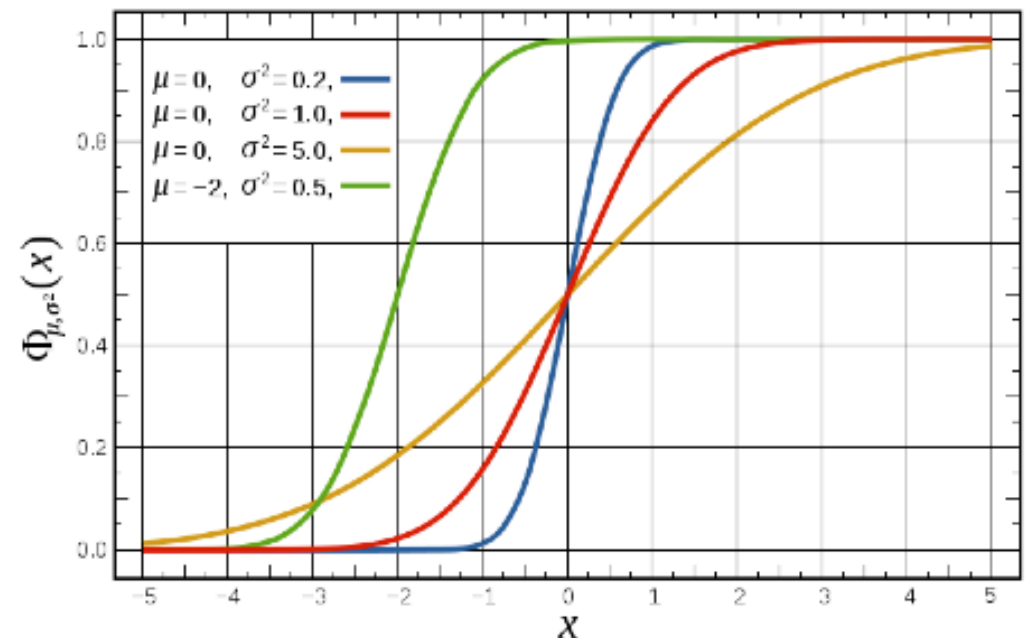
Loi normale (4)

- Plus l'écart-type est grand, plus la courbe de la densité de probabilité est aplatie
- Plus l'écart-type est grand, plus la fonction de répartition atteint le maxima lentement

Densité de probabilités (f):



Fonction de répartition (F):



Loi Normale centrée réduite : N(0,1)

- Utilisée lorsqu'une variable X suit un comportement inconnu

- Variable Z telle que

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- Utilisation de la table de la loi normale centrée réduite

- $P(X \leq x) = P(Z \leq z)$

- La table ne donne que les probabilités de Z pour $0 \leq z \leq 3,999$

Loi Exponentielle : $E(\lambda)$

- Décrit un phénomène de mortalité où le « risque instantané » ou « taux de défaillance » est **constant**
- La **durée de vie au-delà de l'instant t est indépendante de l'instant t**
- $P(X \leq x)$: probabilité que l'événement survienne avant l'instant $t = x$

Loi Exponentielle (2)

λ = taux de défaillance instantanée

x = nombre réel

$$P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\mu = 1 / \lambda$$

$$\sigma^2 = 1 / \lambda^2$$

Loi Exponentielle(3)

Si un **évènement** se réalise selon une **Loi de Poisson de paramètre λ** alors le **temps entre 2 réalisations** successives de l'évènement suit une **loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$**

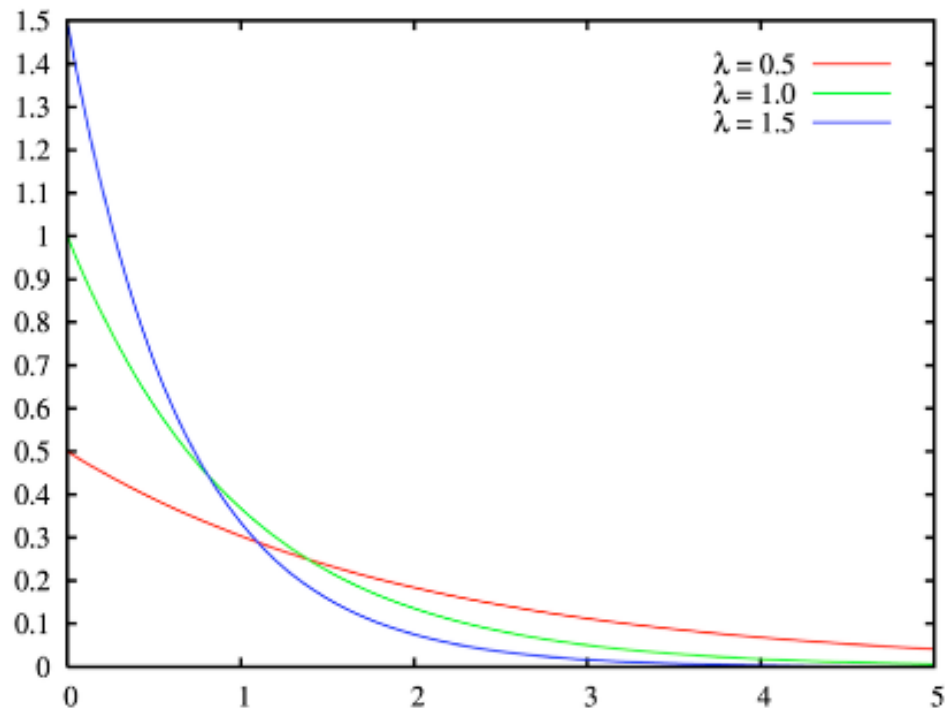
Loi Exponentielle (4)

Plus λ est grand, plus la fonction de répartition monte vite

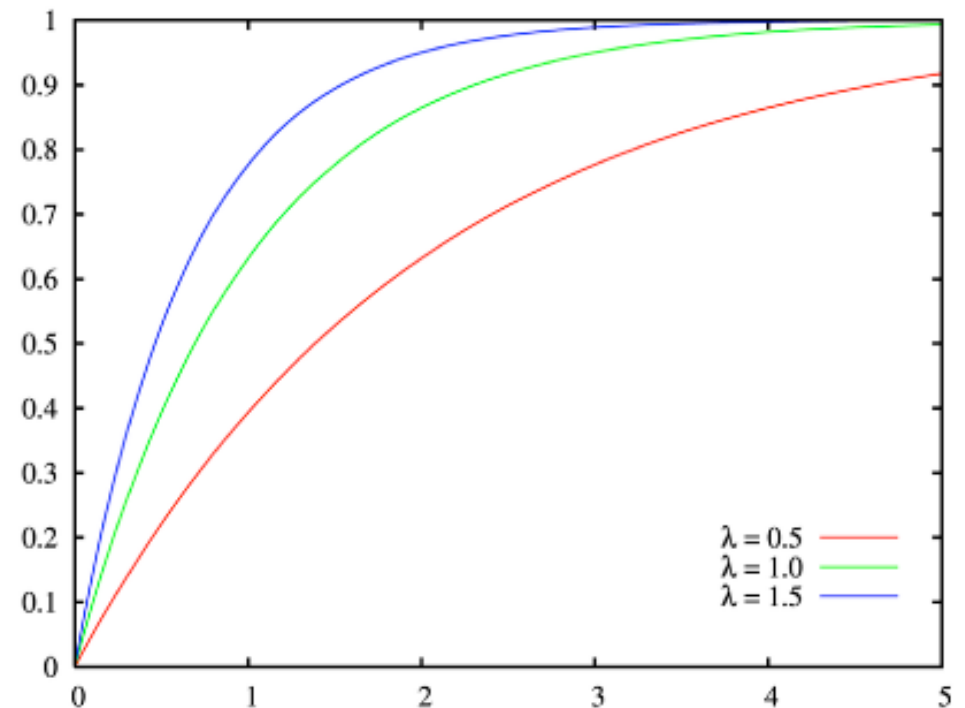
et plus la densité de probabilité descend vite

Lorsque $x = 0$, $f(x) = \lambda$ (car $e^0 = 1$)

Densité de probabilités (f):



Fonction de répartition (F):



Partie V :

Approximations

Loi Binomiale \rightarrow Loi de Poisson

3 conditions :

$$n \geq 50$$

$$p \leq 0,1$$

$$np \leq 5$$

$$B(n,p) \rightarrow P(\lambda = np)$$

Loi Binomiale \rightarrow Loi Normale

2 conditions :

$$np \geq 5$$

$$nq \geq 5$$

$$B(n,p) \rightarrow N(np, \sqrt{npq})$$

Loi de Poisson \rightarrow Loi Normale

1 seule condition :

$$\lambda > 25$$

$$P(\lambda) \rightarrow N(\lambda, \sqrt{\lambda})$$

Lecture de la Table de la LNCR (1)

Soit $\pi(x)$ la valeur que l'on veut trouver dans la table

Pour calculer $\pi(x)$ avec un nombre positif

Il suffit d'utiliser directement la table

Ex : $\pi(0,55)$

Dans la table $0,55 = 0,5 + 0,05$

On cherche la valeur correspondante

$\pi(0,55) = 0,7088$

Lecture de la Table de la LNCR (2)

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9494	0,9504	0,9514	0,9523	0,9532	0,9541

Lecture de la Table de la LNCR (3)

Exemple : Pour être mannequin féminin, la taille minimale est de 175 cm. Si la taille moyenne des femmes françaises est de 165 cm, et qu'elle a un écart type de 4 cm, alors quel est le pourcentage de femmes ne pouvant être mannequin, à 5% près ?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{175 - 165}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

On cherche alors dans le tableau de la loi normale centrée réduite $P(Z \leq 2,5)$ et on trouve 0,9938. Donc 99,38% des femmes françaises ne peuvent être mannequin car sont trop petites.

Lecture de la Table de la LNCR (4)

2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Lecture de la Table de la LNCR (5)

Pour calculer $\pi(x)$ avec un nombre négatif

On utilise la propriété :

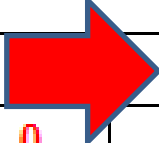

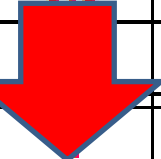
$$\pi(-x) = 1 - \pi(x)$$

Exemple : $\pi(-1,1) = 1 - \pi(1,1)$

$$\pi(1,1) = 0,8643$$

$$\text{Donc } \pi(-1,1) = 1 - 0,8643 = 0,1357$$

Lecture de la Table de la LNCR (6)

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9494	0,9504	0,9514	0,9523	0,9532	0,9541

Lecture de la Table de la LNCR (7)

Pour calculer $\mathbf{P(X \leq x)}$

Où X est une variable aléatoire suivant la loi Normale $N(\mu ; \sigma)$

Il suffit de faire le changement de variable, c'est-à-dire de la transformer en une loi normale centrée réduite grâce à la relation :

$$Z = (X - \mu)/\sigma$$

Exemple : Calcul de $P(X \leq 1,27)$ sachant que X suit une loi Normale $N(0,27 ; 2)$

$$P(X \leq 1,27) = P\left(\frac{X - 0,27}{2} \leq \frac{1,27 - 0,27}{2}\right) = P(Y \leq 0,5)$$

$$\pi(0,5) = 0,6915$$

Lecture de la Table de la LNCR(8)

Pour calculer **P (X>x)**

Il faut utiliser la propriété :

$$P(X>x) = 1 - P(X\leq x)$$

Exemple : La variable X suit une loi N(0,1)

Quel est la valeur de P(X>1,32) ?

$$P(X > 1,32) = 1 - P(X \leq 1,32) = 1 - \pi\left(\frac{1,32 - 0}{1}\right) = 1 - \pi(1,32)$$

$$\pi(1,32) = 0,9066$$

$$P(X>1,32) = 1 - 0,9066 = 0,0934$$

Lecture de la Table de la LNCR (9)

Pour calculer $\pi(\mathbf{x})$ si c'est un intervalle

Si on veut $P = P(\mathbf{x1} < X \leq \mathbf{x2})$ alors on fait

$$P = \pi(\mathbf{x2}-\mu/\sigma) - \pi(\mathbf{x1}-\mu/\sigma)$$

Exemple : Calculons $P = P(9,5 < X \leq 14)$, sachant que X suit une loi Normale $N(12,2)$

$$\begin{aligned} P &= \pi\left(\frac{14 - 12}{2}\right) - \pi\left(\frac{9,5 - 12}{2}\right) \\ &= \pi(1) - \pi(-1,25) = \pi(1) - [1 - \pi(1,25)] \\ &= \pi(1) - 1 + \pi(1,25) = 0,8413 + 0,8944 - 1 = 0,7357 \end{aligned}$$