Probabilités et Événements

Introduction

Les probabilités :

- Branche des mathématiques

- Modélisation des phénomènes liés au hasard

Partie 1

Ensembles

Quelques définitions

Population = ensemble d'objets très grand voire infini

Échantillon = sous-ensemble de la population

Études statistiques sur les échantillons

Représentativité ?

Confiance ?

Ensembles et éléments

Ensemble = liste, collection d'objets définis

Éléments = objet d'un ensemble

Ensemble défini en **extension** = explicite

Ensemble défini en **compréhension** = implicite

Exercice

Donnez la (les) proposition(s) vraie(s) :

A. On appelle population un sous-ensemble d'un échantillon.

B. Un élément est un objet appartenant à un ensemble.

C. Dans un ensemble défini en compréhension, on fait une liste de tous les éléments qui le composent.

D. Un ensemble défini en extension est dit implicite.

E. Toutes les propositions sont fausses.

Correction

Donnez la (les) proposition(s) vraie(s) :

A. On appelle population un sous-ensemble d'un échantillon.

B. Un élément est un objet appartenant à un ensemble.

C. Dans un ensemble défini en compréhension, on fait une liste de tous les éléments qui le composent.

D. Un ensemble défini en extension est dit implicite.

E. Toutes les propositions sont fausses.

Opérations

- Union

- Intersection

- Complémentaire

- Différence

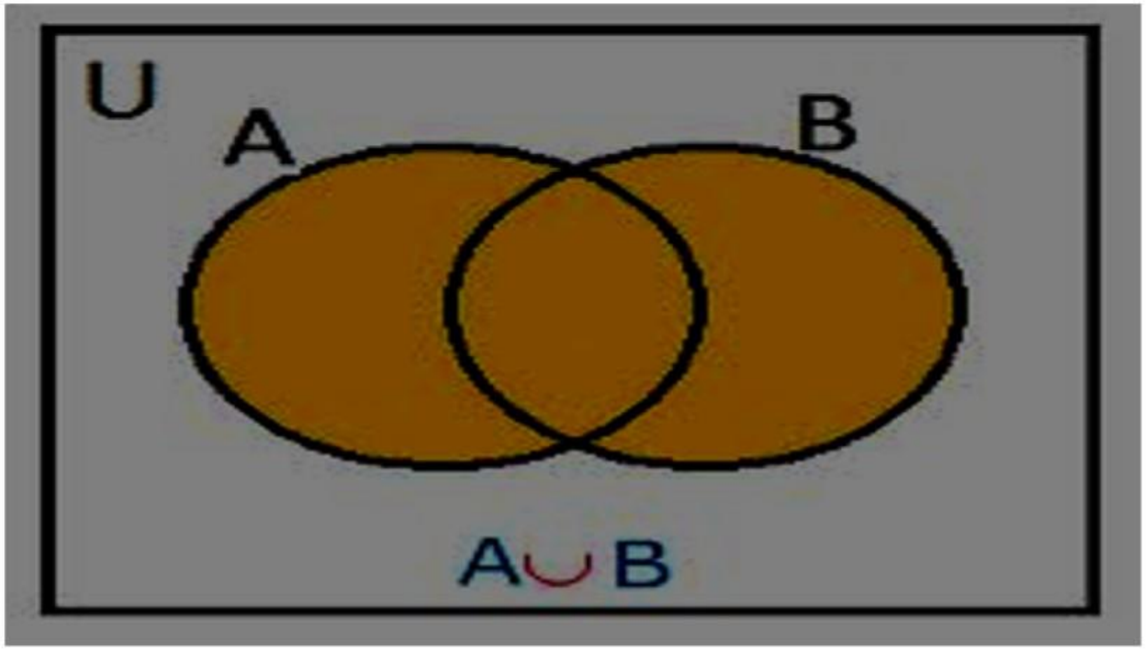
- Différence symétrique

- Inclusion

Union

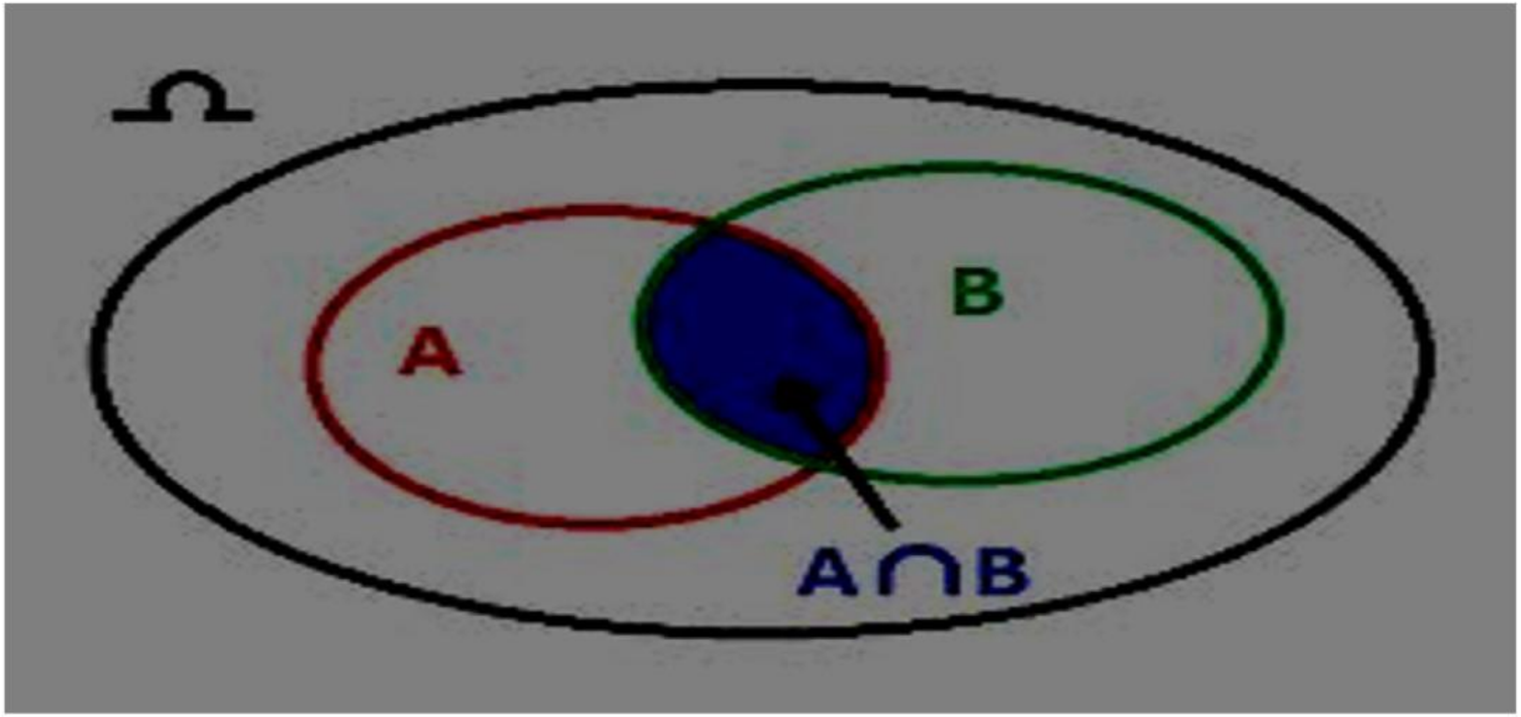
Formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Intersection

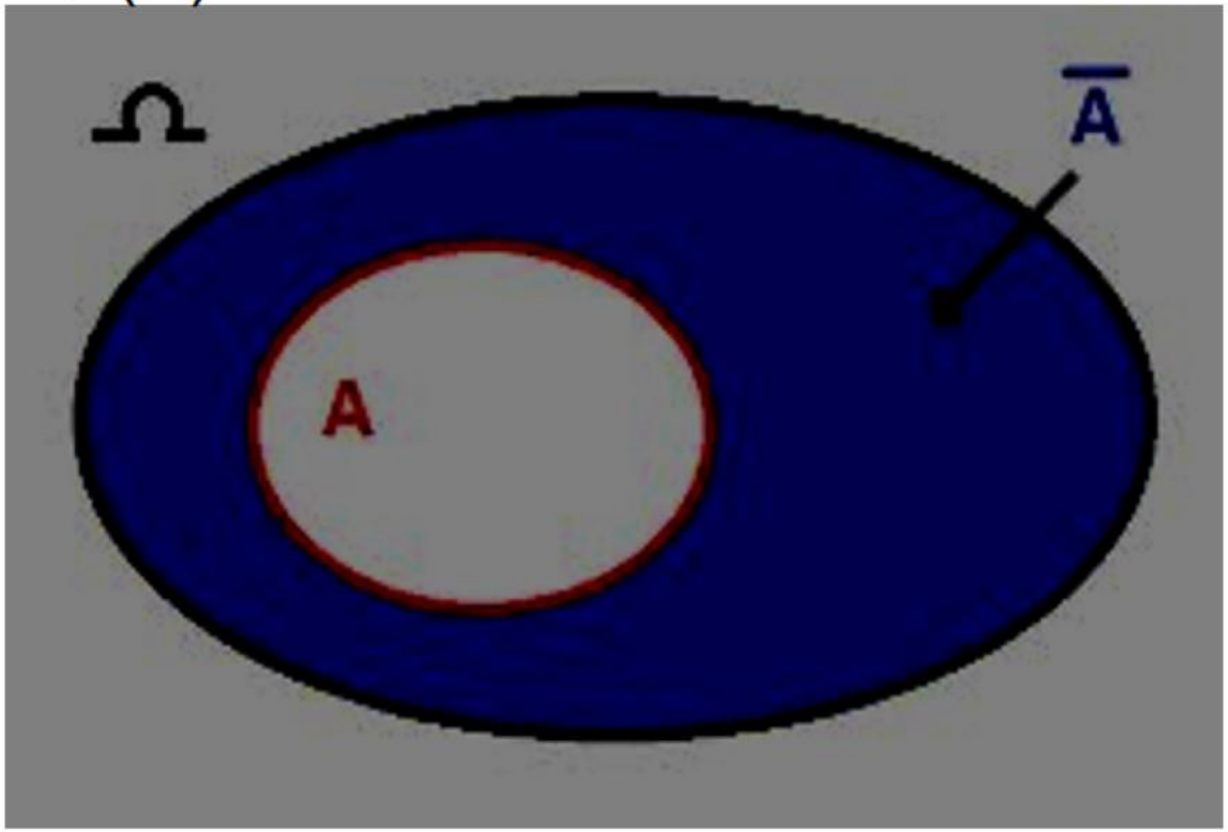
La probabilité est notée $P(A \cap B)$



Complémentaire

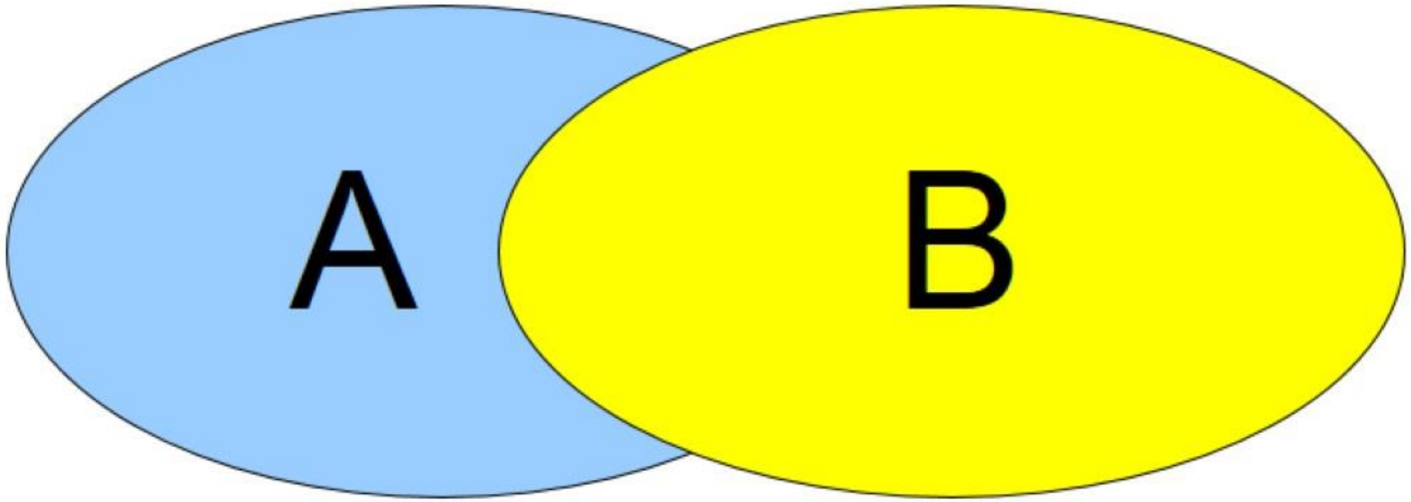
Formule :

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$



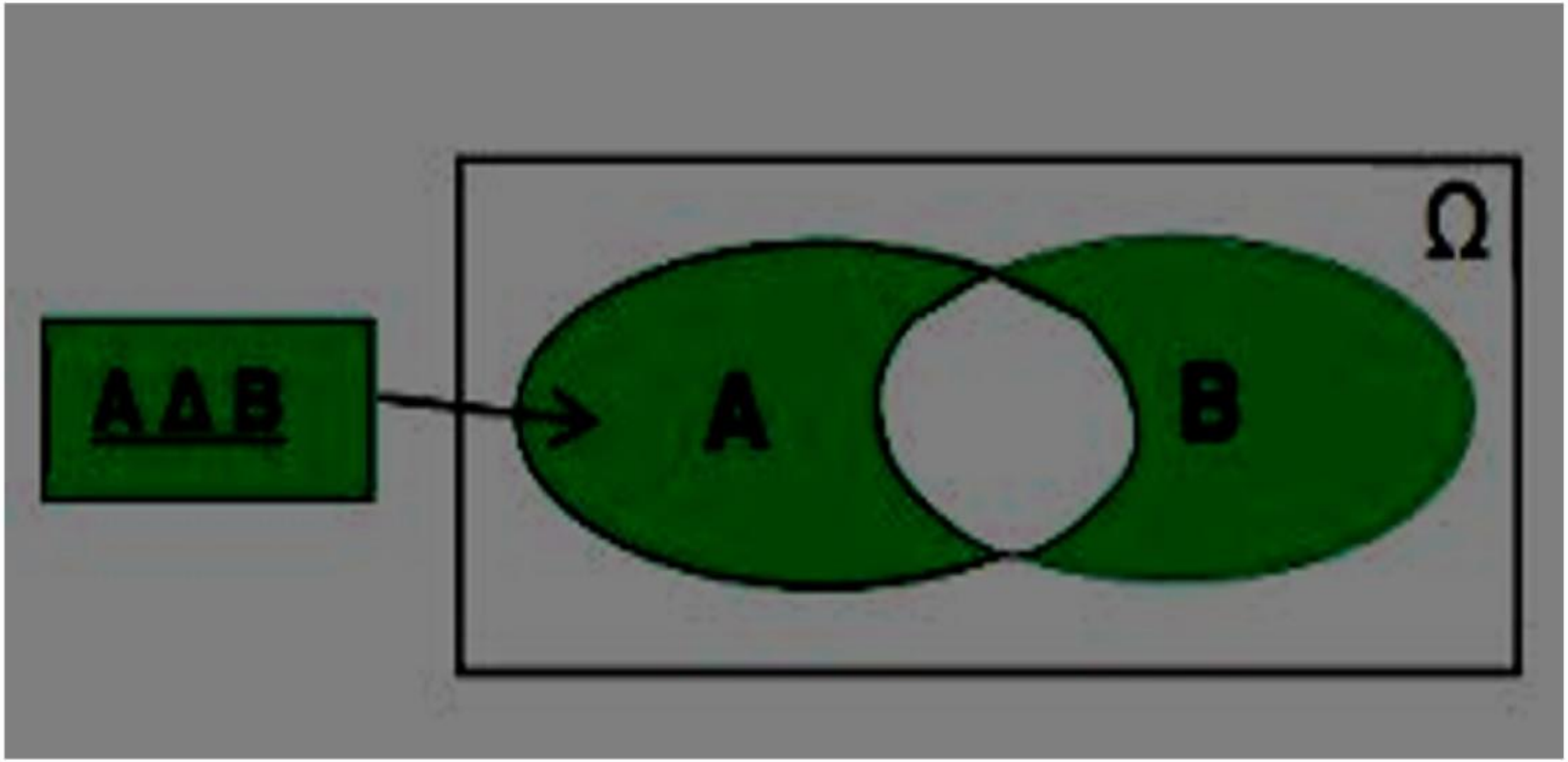
Différence

Noté A-B



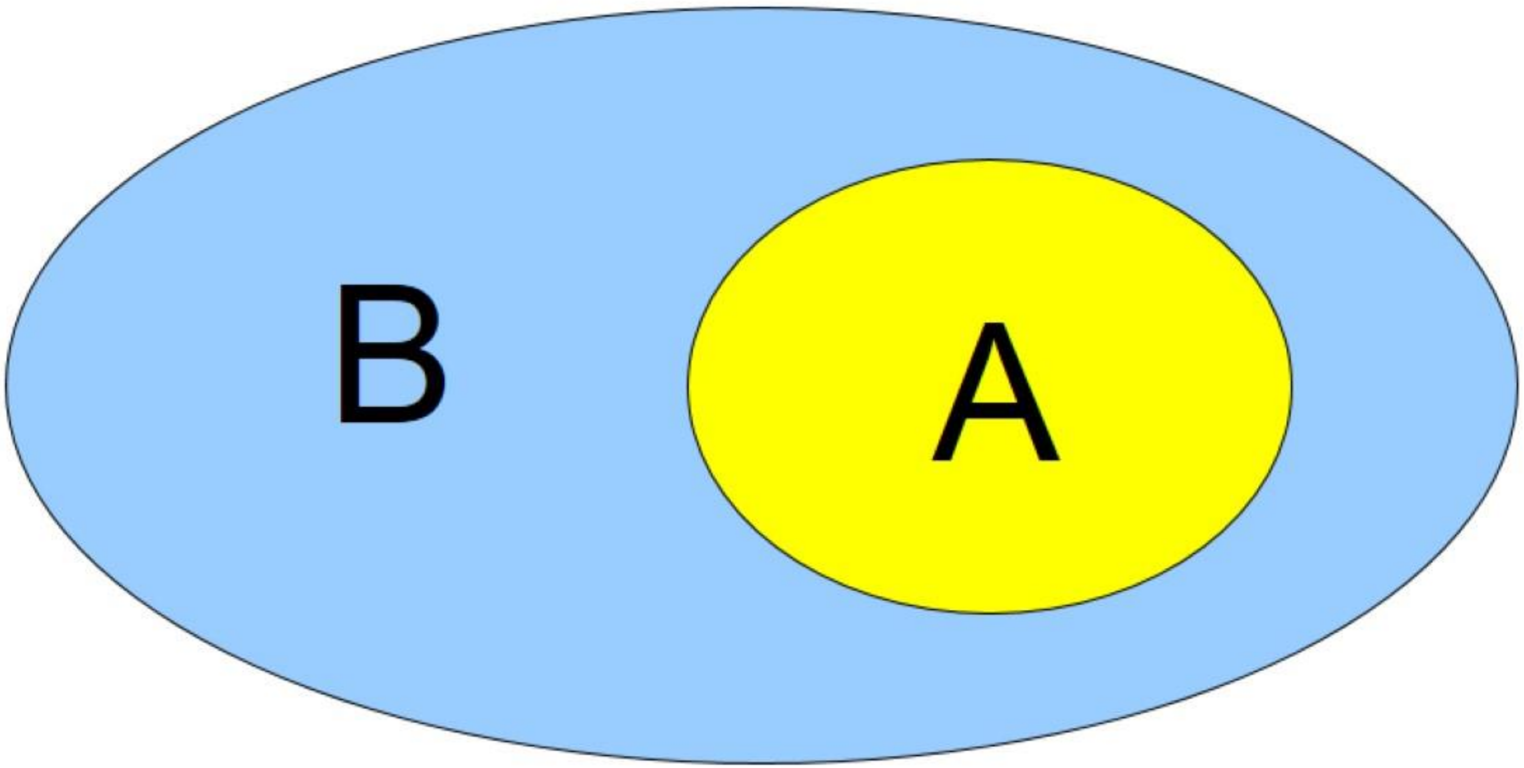
Différence symétrique

Notée A Δ B



Inclusion

Notée A C B



Ensembles finis

Ensemble fini :

- nombre fini d'éléments

- toujours dénombrable

- l'ensemble vide = ensemble fini !!!

Ensembles infinis

Ensemble infini :

- contient un nombre infini d'éléments

- dénombrable = chaque élément correspond à un unique entier naturel

- indénombrable

Ensemble produit

Ensemble produit = Ensemble A x B

C'est l'ensemble des couples ordonnés (a;b) où :
- a = élément de A
- b = élément de B

Produit cartésien = produit de n ensembles

Cardinal d'un ensemble

- Noté Card(E)

- Nombre d'éléments d'un ensemble dénombrable

- Pour un ensemble produit :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

Famille d'ensembles

Famille des parties de A = ensemble des sous-ensembles de A

Nombre de parties d'un ensemble de p éléments = 2^p

Partition de A = subdivision de A en sous-ensembles disjoints dont la réunion forme A

Exercice

Donnez la(les) proposition(s) vraie(s) :

A. Un ensemble dénombrable est toujours fini.

B. L'ensemble nul n'est pas un ensemble fini.

C. Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments que contient un ensemble indénombrable.

D. A U B correspond exclusivement aux éléments appartenant à la fois à A et à B.

E. Toutes les propositions sont fausses

Correction

Donnez la(les) proposition(s) vraie(s) :

A. Un ensemble dénombrable est toujours fini.

B. L'ensemble nul n'est pas un ensemble fini.

C. Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments que contient un ensemble indénombrable.

D. A U B correspond exclusivement aux éléments appartenant à la fois à A et à B.

E. Toutes les propositions sont fausses

Partie 2

Probabilités

Phénomène aléatoire ou déterministe ?

Phénomène aléatoire :

- dont on ne peut prévoir le résultat à l'avance
- modélisé par les calculs de probabilité

VS

Phénomène déterministe :

- dont on peut prévoir le résultat à l'avance
- régularité de comportement

Épreuve et évènements

Épreuve = expérience aléatoire

- **Évènement certain** = ensemble des résultats possibles, nommé Ω

- **Évènement** = sous-ensemble de Ω

- **Évènement élémentaire** = un résultat unique

- **Évènement impossible** : noté $\emptyset$

Probabilités

- Noté $P(A)$

- Toujours compris entre 0 et 1

- $P(\Omega) = 1$

- $P(\emptyset) = 0$

- La somme des probabilités vaut 1

Équiprobabilité

- Même probabilité pour tous les évènements élémentaires

- Cette probabilité est de 1 / Card(Ω)

Minute rappel : Factorielle

On appelle factorielle la notation n!

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

ATTENTION : n est un entier naturel

Dénombrements

P-liste avec remise :

- Ordonné, avec remise

- Formule : $Card(E^p) = Card(E)^p$

- On prend un élément dans E, on l'y replace et on répète p fois cette épreuve

- Pas d'association d'objets

- Exemple : On tire successivement 3 cartes dans un jeu de 32 cartes.

Dénombrements

Arrangement de n éléments pris p à p :

- Ordonné, sans remise

- Formule : $A_n^p = n\,!\ /\ (n-p)\,!$

- On prend successivement p éléments parmi n sans les remettre

Dénombrements

Arrangement avec répétition :

- Ordonné, avec remise

- Formule : n^p

- On prend un élément parmi n qu'on remet ensuite et on répète p fois cette épreuve

- Association d'objet

Ex : Combien de mots de 3 lettres peut-on former ? 26^3

Dénombrements

Permutations d'un ensemble fini à n éléments :

- Ordonné, sans remise

- Formule : $P_n = n\,!$

- On prend les éléments 1 à 1 sans les remettre jusqu'à épuisement.

Dénombrements

Permutations avec répétition :

- Ordonné, sans remise

- Formule : $P_n = n\,! \,/\, (k1\,! \times k2\,! \times \ldots \times kn\,!)$

- Les éléments sont répartis en n catégories

- On prend les éléments 1 à 1 jusqu'à épuisement en ne tenant compte que des catégories

Dénombrements

Combinaisons de n éléments pris p à p parties d'un ensemble :

- Sans ordre, sans remise

- Formule : $C_n^p = n\,!\,/\,(p\,!\times(n-p)\,!)$

- On prend simultanément p éléments parmi n, laissant ainsi n-p éléments

- On crée 2 séries complémentaires

Exercice

Soit un jeu de 32 cartes. On tire successivement 3 cartes qu'on remet à chaque fois dans le paquet. Donnez les vraies :

A. La probabilité de tirer le roi de cœur en deuxième est de 1/32.

B. Il existe 32^3 arrangements possibles.

C. L'évènement « avoir trois as de pique » est impossible.

D. Cette expérience est appelée « épreuve ».

E. Toutes les propositions sont fausses.

Correction

Soit un jeu de 32 cartes. On tire successivement 3 cartes qu'on remet à chaque fois dans le paquet. Donnez les vraies :

A. La probabilité de tirer le roi de cœur en deuxième est de 1/32.

B. Il existe 32^3 arrangements possibles.

C. L'évènement « avoir trois as de pique » est impossible.

D. Cette expérience est appelée « épreuve ».

E. Toutes les propositions sont fausses.

Correction

Pour la première carte, on a 32 possibilités.

Pour la seconde carte, on a aussi 32 possibilités puisque la première carte tirée a été remise dans le paquet.

Idem pour la troisième carte.

Il est donc possible de tirer 3 fois la même carte au cours de cette épreuve.

Le nombre d'arrangements possibles est de 32^3.