Probabilités conditionnelles,

Théorème de Bayes,

Indépendance en probabilité

I. Probabilités conditionnelles

A et B sont deux évènements quelconques dans l'ensemble universel Ω.

On étudie la probabilité que l'évènement A survienne **sachant** que l'évènement B est réalisé.

On a une restriction de l'ensemble des résultats possibles Ω à l'ensemble B, c'est-à-dire que l'ensemble sur lequel on recherche la **survenue de A** ne se fait plus par rapport à Ω mais **par rapport à B**.

Cette probabilité est notée $P_B(A)$ ou P(A/B). Sa formule est $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$

Exemple : On lance un dé à 6 faces. On note l'évènement A : « avoir un chiffre pair » et l'évènement B : « avoir un chiffre supérieur ou égal à 3 ». Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair sachant que le résultat obtenu est supérieur ou égal à 3 ?

L'ensemble des résultats possibles Ω est : {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}. On a en premier lieu la réalisation de l'évènement B, dont l'ensemble des issues est {3 ;4 ;5 ;6}. Au sein ce nouvel ensemble de résultats possibles, on va chercher les issues qui correspondent à l'évènement A : {4 ;6}

La probabilité que A survienne sachant que B est réalisé est donc P(A/B) = 2/4 = 0,5

Théorème de la multiplication :

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) \text{ et } P(B/A) = P(B \cap A) / P(A)$$

On peut en déduire :

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$$

Le théorème de Bayes découle de ce théorème.

II. Formule et théorème de Bayes

Formule de Bayes : en reprenant le théorème de la multiplication, on a :

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = P(A) \times P(B/A) / P(B)$$

$$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) = P(B) \times P(A/B) / P(A)$$

Théorème de Bayes :

Les événements A1, A2 et A3 forment une partition de l'ensemble fondamentale Ω.
A1, A2 et A3 sont forcément disjoints !
$A1 \cup A2 \cup A3 = \Omega$
Soit l'événement quelconque « B » inclus dans Ω.

Théorème des probabilités totales appliqué à B :

$$P(B) = P(A1 \cap B) + P(A2 \cap B) + P(A3 \cap B)$$

Application du Théorème de la multiplication :

$$P(B) = P(B/A1) \times P(A1) + P(B/A2) \times P(A2) + P(B/A3) \times P(A3)$$

Application de la formule de Bayes pour A1 par exemple (l'application pourrait être pour A2 ou A3 également):

$$P(A1/B) = P(A1 \cap B) / P(B) = P(B/A1) \times P(A1) / P(B)$$

Théoreme de Bayes : on remplace P(B) par P(B/A1) x P(A1) + P(B/A2) x P(A2) + P(B/A3) x P(A3) dans la formule de Bayes :

$$P(A1/B) = P(B/A1) \times P(A1) / P(B/A1) \times P(A1) + P(B/A2) \times P(A2) + P(B/A3) \times P(A3)$$

III. Diagramme en arbre

Soit une séquence finie d'expériences avec un nombre fini de résultats. On considère que **les résultats possibles de l'expérience n dépendent de l'expérience n-1**. On parle de **probabilités conditionnelles** comme vu précédemment.

La manière la plus simple de représenter ce genre de séries d'expériences est un **diagramme en arbre**.

Pour calculer la probabilité de « chaque feuille » on utilise le **théorème de la multiplication**.

<u>3 règles fondamentales :</u>

1. ***La probabilité qu'un chemin particulier de l'arbre se réalise est, d'après le théorème de la multiplication, le produit des probabilités de chaque branche du chemin*.**

2. ***Les chemins s'excluent mutuellement.***

3. ***La somme de toutes les probabilités finales obtenues doit être de 1*.**

IV. Evènements indépendants :

2 évènements sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Par conséquent, on a $P(A/B) = P(A)$ et $P(B/A) = P(B)$

Si A est inclus dans B, on a :

- $A \cap B = A$
- $P(A \cap B) = P(A)$
- $P(A/B) = P(A) / P(B)$
- $P(B/A) = P(A) / P(A) = 1$

<u>Conclusion</u> : Si $A \subset B$, ces deux évènements ne peuvent pas être indépendants.

Si A et B sont disjoints :

- $P(A \cap B) = 0$
- $P(A/B) = P(B/A) = 0$

<u>Conclusion</u> : 2 évènements disjoints ne sont pas indépendants.

<u>ATTENTION</u>

Incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$