

Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Probabilités conditionnelles

1. Définition

On parle de probabilités conditionnelles lorsqu'on recherche la probabilité qu'un événement **A se réalise SACHANT que B est réalisé.**

On note $P(A/B)$ ou $P_B(A)$ qui se lie « **Probabilité de A sachant B** ».

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ex : Un groupe de 10 personnes avec 5 filles et 5 garçons, les 5 filles et un garçon ont les cheveux longs les autres des cheveux courts, je prends une personne au hasard.

Si je note A : « Choisir une fille » et B : « Choisir quelqu'un avec des cheveux longs ». Alors la probabilité d'avoir **choisi une fille sachant que j'ai choisi quelqu'un avec les cheveux longs** est : $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = 5/6$.

(5 personnes sont des filles avec les cheveux longs et 6 personnes ont les cheveux longs).

2. Théorème de la multiplication

On sait que : $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$ et $P(B/A) = P(B \cap A) / P(A)$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

On peut en déduire :

$$P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$$

Ce théorème servira de base au théorème de Bayes.

Pr. Staccini

II. Diagramme en arbre

On utilise un diagramme en arbre lorsque certaines conditions sont réunies :

- Présence d'une **séquence fini d'expériences** avec pour chacune un **nombre fini de résultats possibles**.
- Les résultats possibles de chaque expérience dépendent de l'expérience précédente → **Probabilité conditionnelles**.

L'utilisation de l'arbre permet une visualisation rapide des possibilités et un calcul facile de la probabilité de chaque événement final, **3 règles sont à retenir** :

- 1. La probabilité qu'un chemin particulier de l'arbre se réalise est, d'après le théorème de la multiplication, **le produit des probabilités de chaque branche du chemin**.
- 2. Les chemins **s'excluent mutuellement**.
- 3. **La somme de toutes les probabilités finales obtenues doit être de 1**.

La somme des probabilités des branches d'un même nœud doit également être égale à 1.



Le Tutorat est gratuit, toute vente ou reproduction est interdite.
Année 2014-2015

Papa Ours

III. Formule et théorème de Bayes

1. Formule de Bayes

Théorème de la multiplication :

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$$

On en déduit la **formule de Bayes** :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B/A)}{P(B)} ; P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \times P(A/B)}{P(A)}$$

2. Théorème de Bayes

Si on fait une **partition d'un ensemble Ω** avec deux événements A_1 et A_2 et si B est un événement aléatoire : $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$

Théorème de la multiplication : $P(B) = P(B/A_1) \times P(A_1) + P(B/A_2) \times P(A_2)$

Formule de Bayes : $P(A_1/B) = \frac{P(A_1) \times P(B/A_1)}{P(B)}$; $P(A_2/B) = \frac{P(A_2) \times P(B/A_2)}{P(B)}$

Théorème de Bayes : $P(A_1/B) = \frac{P(A_1) \times P(B/A_1)}{P(B/A_1) \times P(A_1) + P(B/A_2) \times P(A_2)}$

Le théorème de Bayes est utilisé en médecine pour connaître la probabilité qu'un patient ait une certaine maladie (A_1 ou A_2) sachant qu'il présente un certain symptôme (B).

IV. Indépendance en probabilité

1. Définition

On parle d'événements indépendants lorsque **la survenue de l'événement A n'influe pas sur la survenue de l'événement B** $\rightarrow P(A/B) = P(A)$ et $P(B/A) = P(B)$

Or : $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$ Donc : **$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$** .

2. Cas particuliers

❖ **Inclusion** :

Si un événement **B inclue un événement A** alors ceux-ci ne sont pas **indépendants**. En effet, si B inclus A :

- **$P(A \cap B) = P(A)$**
- **$P(A/B) = P(A) / P(B) \neq P(A)$**
- **$P(B/A) = P(A) / P(A) = 1 \neq P(B)$**

❖ **Événements disjoints** :

De la même manière **deux événements disjoints ne sont pas indépendants**, si A est disjoint de B alors :

- **$P(A \cap B) = 0$**
- **$P(A/B) = P(B/A) = 0$**