

Optique géométrique et ondulatoire



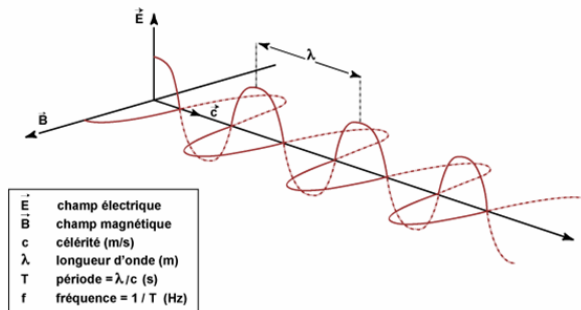
Introduction

I – La lumière: Un phénomène de propagation d'ondes

Aujourd'hui la description de la lumière fait appel aux ondes électromagnétiques et au concept de photon.

Le faisceau lumineux est caractérisé par une onde électromagnétique qui comporte deux composantes perpendiculaires l'une à l'autre :

- Une force électrique
- Un champ magnétique



La théorie de la relativité : la vitesse de la lumière dans le vide est invariable, peu importe la vitesse de l'observateur et de la source lumineuse. Les calculs montrent qu'elle est aussi la vitesse maximale de déplacement.

La vitesse de la lumière dans le vide ou célérité est :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

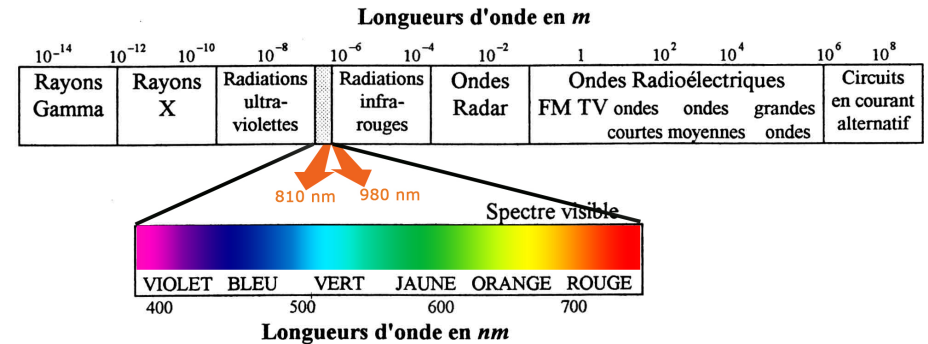
$\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$
 $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ SI}$

II – Le spectre électromagnétique

La vitesse d'une longueur d'onde est le produit de sa longueur d'onde et de sa fréquence :

$$c = \lambda \nu$$

Les ondes lumineuses sont caractérisées par une longueur d'onde allant de 400 à 700 nm (on est dans le domaine du visible). Chaque longueur d'onde caractérise une couleur.



III – Indice optique d'un milieu

Dans la matière, caractérisée par une permittivité ϵ et une perméabilité magnétique μ on a :

$$V = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

Dans un milieu non magnétique ($\mu=1$) on définit l'indice optique n par :

$$V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n} = \frac{\lambda}{n} \nu$$

L'indice optique n est donc relié à la constante diélectrique relative.

Remarque : $n > 1$ donc la lumière, dans un milieu transparent, se déplacera à une vitesse inférieure à la célérité.

L'indice optique est aussi appelé indice de réfraction ou de dispersion.

La loi de Cauchy nous dit que l'indice optique est une fonction décroissante de la longueur d'onde :

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

Optique géométrique

L'observation d'un faisceau lumineux suggère que ce dernier est constitué de rayons lumineux.

L'étude de la marche des rayons lumineux dans des milieux transparents d'indices optiques donnés n_i constitue l'objet de l'optique géométrique.

L'optique géométrique est basée sur l'hypothèse de l'existence et de l'indépendance des rayons lumineux.

Cette hypothèse est satisfaite lorsque **les longueurs caractéristiques des systèmes optiques étudiés** (changements de milieux, sources, lentilles, etc.) **sont grandes devant les longueurs d'ondes de la lumière.**

Lorsque ces hypothèses ne sont plus vérifiées, on voit apparaître des phénomènes d'interférences et de diffraction qui révèlent la nature ondulatoire de la lumière.

I – Fondements de l'optique géométrique

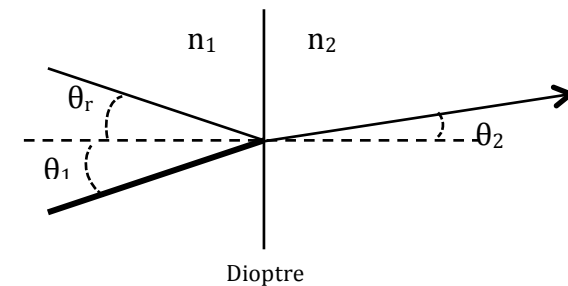
Dans un milieu transparent et homogène la lumière se propage en ligne droite. Donc un rayon lumineux minimise le temps de propagation entre 2 points.

1) Principe de Fermat

Enoncé du principe de Fermat : La lumière se propage d'un point à l'autre sur des trajectoires tel que le **chemin optique** soit **extrémal**.

Loi de réfraction (Snell Desartes) : Soit 2 milieux transparents caractérisés par leurs indices optiques n_1 , n_2 et séparés par une interface plane. Un rayon qui arrive sur l'interface avec un angle θ_1 avec la normale, ressort avec un angle θ_2 avec la normale tel que :

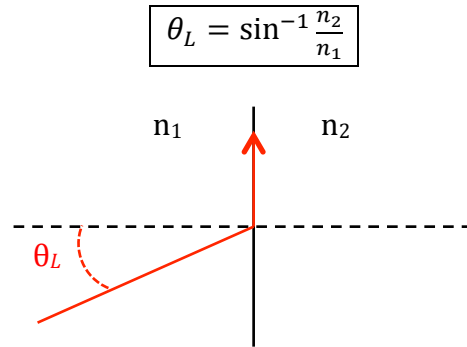
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$



Loi de réflexion : Un autre rayon est réfléchi tel que : $\theta_r = \theta_1$

Remarque : la transmission et la réflexion sont partielles.

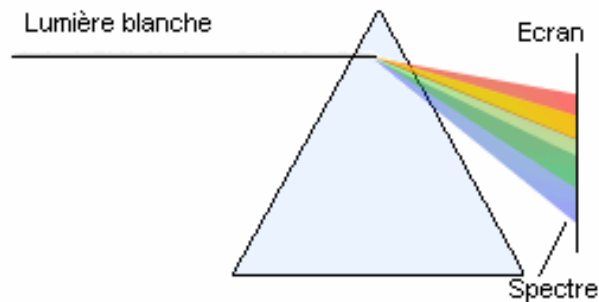
Cas de l'angle limite : Dans le cas où $n_1 > n_2$, c'est à dire lorsque l'on passe d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent, on a un angle limite θ_L à partir duquel la réflexion est totale :



Propagation rectiligne : Dans un milieu homogène ($n_1 = n_2$) en l'absence de réflexion $\theta_1 = \theta_2$.

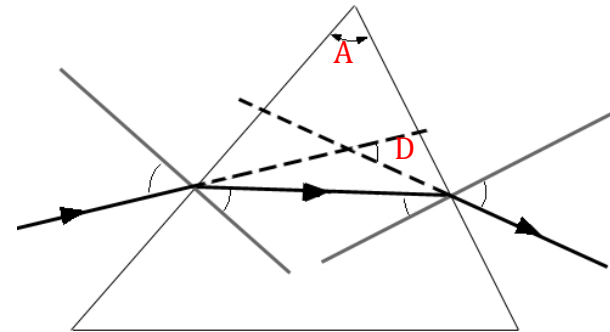
Principe du retour inverse de la lumière : Si un rayon lumineux part de A pour aller vers B, un autre rayon lumineux peut partir de B pour aller vers A.

2) Dispersion de la lumière : le prisme



C'est un effet que l'on obtient à l'aide d'un prisme d'angle A. Lorsque l'angle d'incidence i est suffisamment petit, on peut caractériser l'angle de déviation par :

$$D = (n - 1)A$$



Remarque : l'angle de déviation est proportionnel au sommet du prisme, et $n > 1$.

La loi de Cauchy nous dit que l'indice optique est une fonction décroissante de la longueur d'onde :

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

Donc $n_{\text{bleu}} > n_{\text{rouge}}$, ce qui signifie que le bleu est plus dévié que le rouge. Le prisme va alors pouvoir décomposer les constituants monochromatiques d'un rayon lumineux.

Le prisme agit donc comme un spectroscopie, il permet de décomposer les spectres lumineux.

II – Dioptries et lentilles

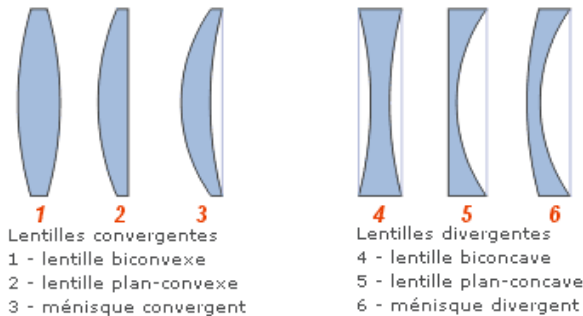
1) Notions de bases

Dioptrie : interface lisse entre deux milieux transparents d'indices optiques différents.

Lentille : Le but d'une lentille est de faire converger ou diverger des rayons lumineux pour créer des images dans certaines conditions. Une lentille est formée de 2 dioptries (souvent sphériques).

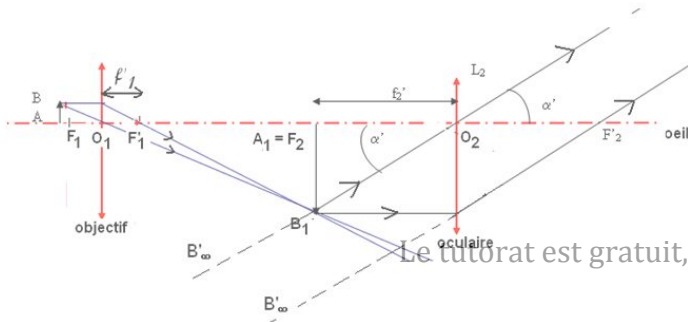
Il existe deux grands cas de lentilles :

- à bords minces : elles sont convergentes
- à bords épais : elles sont divergentes



Systèmes optiques : assemblages de miroirs et de lentilles reliant objets et images. Par convention la face d'entrée est à gauche et celle de sortie est à droite.

Un tel système est dit centré s'il possède un axe de symétrie et de révolution.



Objet : source de rayons « entrant » dans le système optique. Il est dit **réel** s'il se situe devant (à gauche de) la face d'entrée et **virtuel** sinon (s'il se situe à droite la face d'entrée).

Image : source de rayon « sortant » du système optique. Elle est dite **réel** s'il se situe devant (à droite de) la face de sortie et **virtuel** sinon (s'il se situe à gauche la face de sortie).

Stigmatisme : Il y a stigmatisme rigoureux lorsque tout rayon passant par un point objet A passe, après avoir traversé le système optique, par un point A'. A' est l'image de A par le système optique. On dit que A et A' sont conjugués.

(Traduction : l'image d'un point est un point.)

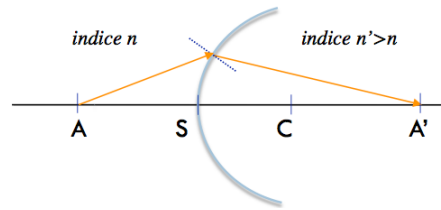
Aplanétisme : Il s'agit d'une propriété de système optique centré où tout petit objet AB plan et perpendiculaire à l'axe optique a une image A'B' plane en perpendiculaire au même axe.

Condition de Gauss : supposer que le système optique ne comporte que des rayons paraxiaux. Dans ce cas on peut montrer que l'on obtient en bonne approximation le stigmatisme et l'aplanétisme.

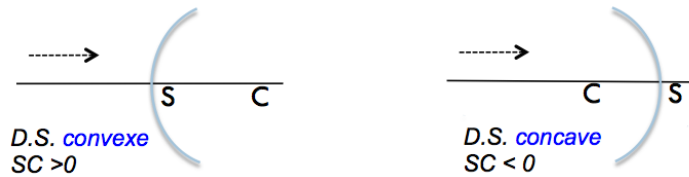
Rayons paraxiaux : ce sont des rayons qui ne forment que des petits angles par rapports à l'axe optique (dans un système optique centré).

2) Dioptré sphérique

Le dioptré sphérique est caractérisé par un arc de cercle séparant 2 milieux d'indices optiques différents.



Les formes des dioptrés sphériques sont caractérisées par les termes « convexe » ou « concave ».



On peut aussi caractériser ces termes par le rayon de courbure SC, avec C le centre du cercle et S le sommet.

Le segment a un signe positif de la gauche vers la droite, du coup :

- $SC > 0$: dioptré **convexe**
- $SC < 0$: dioptré **concave**

On pose $p = SA$ et $p' = SA'$ et on obtient :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{SC} = D$$

D est appelé la vergence du dioptré et son unité est la dioptrie :

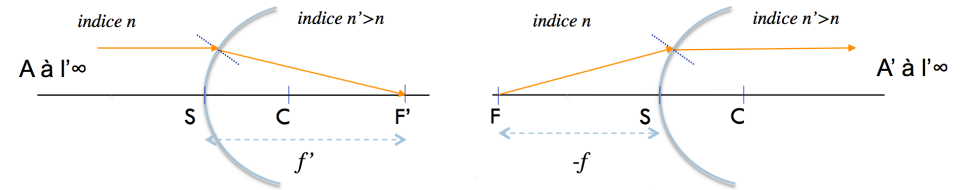
$$1\delta = 1m^{-1}$$

Si $D > 0$ le dioptré est **convergent** et si $D < 0$ le dioptré est **divergent**.

Dans le cas du dioptré plan, $\overline{SC} = \infty$ du coup :

$$\frac{n'}{p'} = \frac{n}{p}$$

3) Foyers et distance focale



Par définition l'image A' est sur le **foyer image F'** si l'objet est à l'infini, du coup $SA' = SF' = f'$ est appelée **distance focale image**.

Le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par F' est appelé **plan focal image**.

Et l'image A' est à l'infini si l'objet est le **foyer objet F** , $SA = f$ est appelée distance focale objet.

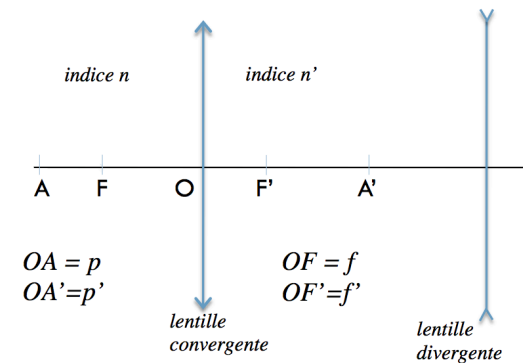
Le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par F est appelé **plan focal objet**.

On peut réécrire l'équation du dioptré :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = D$$

4) Lentilles minces

Celles-ci sont formées de 2 dioptrés sphériques très proches l'un de l'autre, de sorte que leurs sommets sont pratiquement confondus en un point qu'on appelle le **centre optique**.



Un lentilles mince est caractérisée par :

- son centre optique O
- son foyer objet F
- son foyer image F'

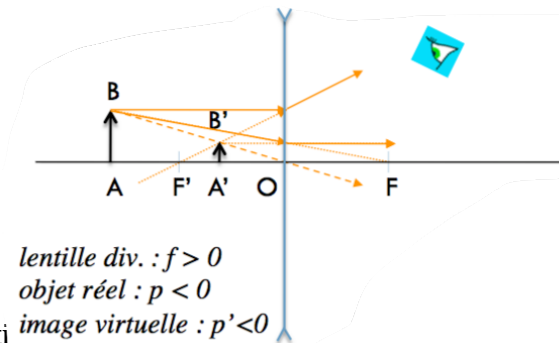
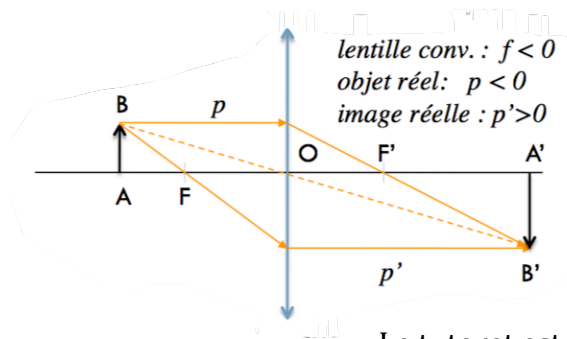
Avec les conventions de l'image précédente on retrouve la formule :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = D$$

Si $n = n'$ alors $f' = -f$, souvent on choisit $n = n' = 1$.

Quelques propriétés des lentilles minces (à savoir+++):

- ⇒ Les vergences de 2 lentilles minces accolées s'additionnent.
- ⇒ Un rayon incident parallèle à l'axe optique est dévié par la lentille de sorte que le rayon sortant passe par le foyer image F'.
- ⇒ Un rayon incident passant par le foyer objet F est dévié par la lentille de sorte que le rayon sortant est parallèle à l'axe optique.
- ⇒ Les rayons qui passent par le centre optique ne sont pas déviés.



Le **grandissement transverse** de l'image est défini par :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} \text{ et d'après Thalès : } \gamma = \frac{p'}{p}$$

Si $\gamma > 0$: l'image est droite, si $\gamma < 0$: l'image est renversée.

5) Tableau récapitulatif des lentilles minces

Lentilles	Image	Objet		
Convergente	Réel, avant F	Réelle	Renversée	Agrandie si $f' < -OA' < 2f'$ Réduite si $-OA' > 2f'$
	Réel, entre F et O	Virtuelle	Droite	Agrandie
	Virtuel	Réelle	Droite	Réduite

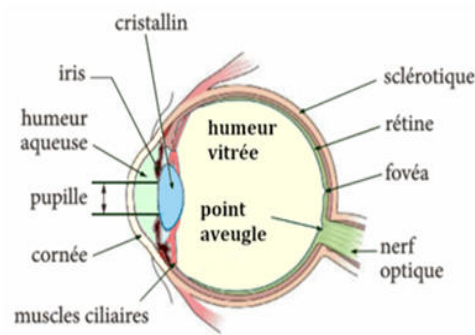
Divergente	Réel	Virtuelle	Droite	Réduite
	Virtuel, entre O et F	Réelle	Droite	Agrandie
	Virtuel, au-delà de F	Virtuelle	Renversée	Agrandie si $f < OA < 2f$ Réduite si $OA > 2f$

III – L'œil et la vision

1) Anatomie simplifiée de l'œil

Le rôle de l'œil est de donner d'un objet une image nette sur la rétine.

On peut le considérer comme une succession de dioptre séparant des milieux d'indices différents.



Milieu	Air	Cornée	Humeur aqueuse	Cristallin
n	1	1,38	1,34	1,41

L'essentiel de la réfraction se fait à l'interface air-cornée.

L'ouverture de l'iris et de la pupille contrôle la quantité de lumière entrant dans l'œil.

Le cristallin est une lentille convergente. Sa compression peut être ajustée par les muscles ciliaires afin d'en adapter la distance focale. C'est le mécanisme de l'**accommodation**.

En ce qui concerne la vision, un œil donné peut voir nettement les objets situés entre 2 points appelés respectivement le *punctum remotum* et *punctum proximum* :

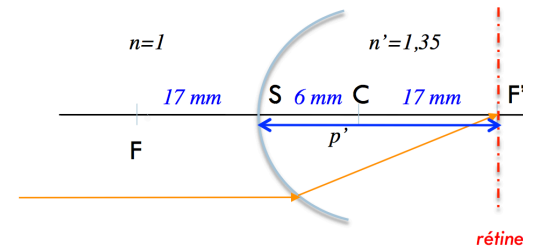
- **Punctum Proximum** (P_P) : Point de l'axe optique qui donne une image nette sur la rétine d'un œil qui **accommode au maximum**.

Pour un œil adulte normal le P_P est en moyenne à 25 cm de l'œil (Rq : $P_P = -0,25m$, on est à gauche de la lentille).

- **Punctum Remotum** (P_R) : Point le plus éloigné de l'axe optique qui donne une image nette sur la rétine d'un œil au repos, c'est-à-dire sans accommodation. ($P_R = -\infty$)

2) Modèle de l'œil réduit de Listing

Dans ce modèle le fonctionnement de l'œil est modélisé par un unique dioptre sphérique.



Paramètres fixés pour un œil donné :

- Indice de l'air : $n=1$
- Indice moyen de l'œil : $n'=1,35$
- Longueur de l'œil (ou distance image) : $p'=23mm$
- Distance focale image au repos : f'_R

Ensuite, l'équation de la vergence de l'œil ($\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n'}{f'} = \frac{n'-n}{SC} = D$) est utilisée pour décrire 2 situations :

- Au repos (P_R) : $D_{repos} = \frac{n'}{f'_R} = \frac{n'}{p'} - \frac{1}{P_R}$

L'œil est emmétrope si $-p_R = \infty$, il faut donc que $f'_R = p'$

- A l'accommodation max (P_P) : $D_{max} = \frac{n'}{p'} - \frac{1}{P_P}$

L'accommodation maximale est donc associée à une variation de vergence, le potentiel d'accommodation :

$$D_{max} - D_{repos} = \Delta D_{cristallin} = \frac{1}{P_R} - \frac{1}{P_P}$$

Chez un sujet adulte $-p_R = \infty$ et $-p_P = 0.25 m$. On a donc $\Delta D_{cristallin} = 4\delta$.

Chez l'enfant le P_P est plus court, du coup : $\Delta D_{cristallin} = 10\delta$.

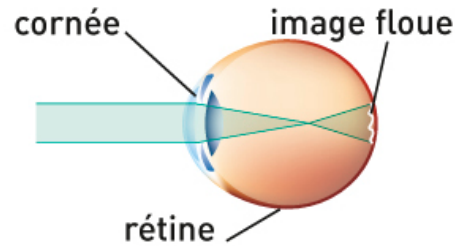
En fait, le potentiel d'accommodation diminue avec l'âge.

3) Les défauts visuels

L'absence de défaut visuel est appelée **emmétropie**.

On parle d'**amétropie** si le point focal du système optique cornée-cristallin n'est pas sur la rétine. Le problème de vue est alors lié à une anomalie de la réfraction.

MYOPIE : L'œil myope est trop convergent. Le foyer image de l'œil se trouve devant la rétine. L'œil est trop long par rapport à sa focale.



Le défaut de vergence δ_v est **positif** :

$$0 < \delta_v = \frac{n'}{f'_R} - \frac{n'}{p'} = -\frac{1}{P_R}$$

Le P_R est alors situé à une distance finie devant l'œil ($= \delta_v^{-1}$).

La myopie peut être corrigée à l'aide de lentilles minces divergentes, de vergences $-\delta_v$ (lentilles à bords épais).

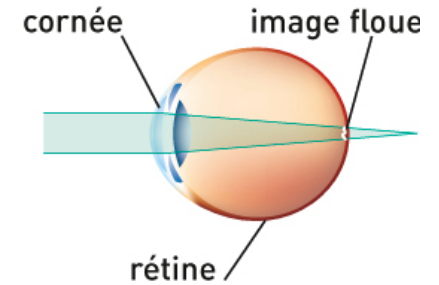
Comme la vergence des lentilles minces s'additionnent, la distance focale de l'œil est telle que :

$$\frac{n'}{f'_{\text{corrigé}}} = -\delta_v + \frac{n'}{f'_R} = \frac{n'}{p'}$$

PRESBYTIE : Elle est due à une fatigue des muscles ciliaire ou un manque de souplesse du cristallin. Le P_P s'éloigne de l'œil. Le potentiel d'accommodation diminue avec l'âge et on estime que le port de lunette devient nécessaire lorsque $\Delta D_{\text{cristallin}} < 3\delta$.

$$\Delta D_{\text{cristallin}} = \frac{1}{P_R} - \frac{1}{P_P} \rightarrow \Delta D_{\text{cristallin}} + \delta_v = -\frac{1}{P_P}$$

HYPERMETROPIE : C'est le défaut inverse. L'œil est trop court par rapport à sa focale.



Dans ce cas le défaut de vergence est négatif :

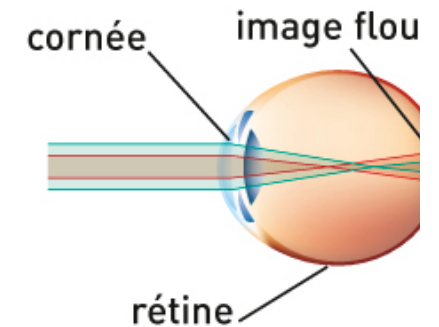
$$0 > \delta_v = \frac{n'}{f'_R} - \frac{n'}{p'} = -\frac{1}{P_R}$$

On peut toutefois obtenir un P_R à l'infini, mais un tel œil doit accommoder pour voir un objet situé à l'infini.

L'hypermétropie peut être corrigée à l'aide de verres convergents (lentilles à bords minces).

ASTIGMATISME : Anomalie due à un défaut de sphéricité de l'œil ou de symétrie de la cornée. L'image d'un point apparaît comme un cercle plus ou moins déformé et flou.

Ce défaut se corrige avec des lentilles sphéro-cylindriques ou toriques, pour compenser l'asymétrie de convergence.



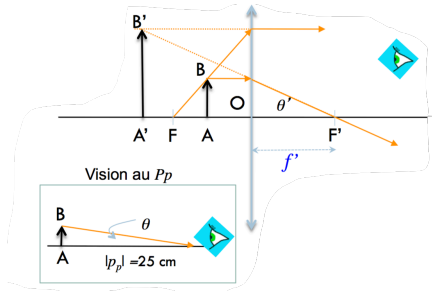
IV – Systèmes optiques simples

1) La loupe

C'est le plus simple des instruments qui permet d'augmenter le pouvoir séparateur de l'œil. Elle est formée d'une seule lentille convergente.

Le principe est de placer l'objet entre le centre optique et le point focal objet, on obtient une image :

- virtuelle
- agrandie
- droite



Au P_p , l'œil nu voit AB sous l'angle θ , qui est tel que :

$$\tan \theta = \frac{AB}{P_p}$$

Avec la loupe, l'objet est vu sous l'angle $\theta' > \theta$ qui est tel que :

$$\tan \theta' = \frac{AB}{f'}$$

Le **grossissement** G est défini par :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} \sim \frac{\tan \theta'}{\tan \theta} = \frac{|P_p|}{f'}$$

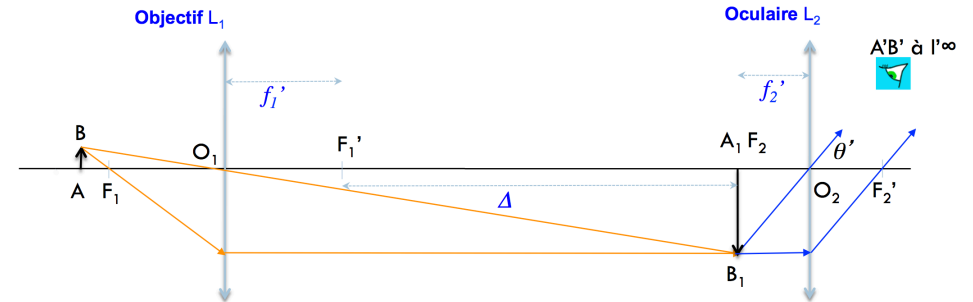
La **puissance de la loupe** P (en dioptrie δ) est :

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{G}{|P_p|}$$

Rq : si l'objet est placé dans le plan focal, l'image est renvoyée à l'infini et l'œil ne doit pas accommoder.

2) Le microscope

Il permet un pouvoir séparateur plus grand que celui de la loupe grâce à un système de doublet de lentilles convergentes, comportant objectif et oculaire.



Le rôle de l'**objectif** est de grossir la taille d'un petit objet AB en formant une image intermédiaire A_1B_1 .

L'**oculaire** sert ensuite de « loupe » pour regarder l'image intermédiaire agrandie de AB.

Le microscope est caractérisé par les distances focales de ses lentilles, f_1', f_2' , et par l'intervalle optique $\Delta = F_1'F_2' \gg f_1'$

La mise au point du microscope s'effectue en agissant sur la distance O_1A .

L'objectif forme une image A_1B_1 agrandie et inversée de l'objet AB **dans le plan focal de l'oculaire**.

Ce dernier détermine l'angle θ' sous lequel l'image intermédiaire A_1B_1 est vue lorsqu'elle se situe dans le plan focal de L_2 .

On définit alors le **grossissement** G :

$$G = \frac{\tan \theta'}{\tan \theta} \sim \frac{|p_p| \Delta}{f_1' f_2'}$$

Optique ondulatoire

Lorsqu'on souhaite observer un objet inférieur à $1 \mu\text{m}$, quelque soit la puissance du microscope les détails ne seront pas résolus car les hypothèses initiales de l'optique géométrique ne sont plus respectées : la dimension des objets doit rester grande devant la longueur d'onde de la lumière.

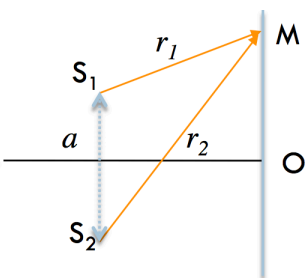
Lorsque que ces hypothèses ne sont plus vérifiées, on passe dans le domaine de l'ondulatoire. Ce chapitre pourra ainsi nous permettre de mettre en évidence une limitation intrinsèque à la résolution de tout instrument optique, et en particulier à celle de l'acuité visuelle.

I – Interférences

Les **interférences** en optiques proviennent de l'addition de 2 signaux sinusoïdaux qui présentent entre eux des différences de chemins optiques.

1) Principe d'interférence à 2 sources d'ondes (monochromatiques et synchrones)

La différence de chemin optique entre les 2 ondes est $\delta = r_1 - r_2$.



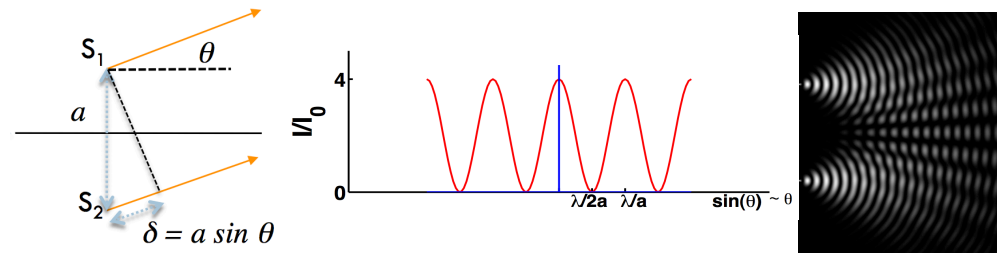
L'amplitude de l'onde résultante au point M est : $\psi = \psi_1 + \psi_2$

$$= A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right)$$

$$= 2A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda} (r_1 + r_2)\right) \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)\right)$$

L'intensité résultante en M est donc :

$$I = \langle \psi^2 \rangle = 4I_0 \cos^2\left(\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) \text{ avec } I_0 = \frac{A^2}{2}$$



On se place dans le cas où le point M est très éloigné, de sorte que les rayons issus des sources sont parallèles.

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta\right)$$

L'intensité lumineuse varie périodiquement entre 0 et $4I_0$ avec des **franges claires** correspondant à des maxima de I dans les directions telles que :

$$\sin \theta = k \frac{\lambda}{a}$$

C'est le phénomène d'**interférences constructives**.

Les **franges sombres** correspondent à des minima dans les directions telles que :

$$\sin \theta = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{a}$$

Si $\frac{\lambda}{a}$ est assez petit, on peut approcher $\sin \theta$ par θ , et l'intervalle angulaire entre 2 franges claires (ou sombres) est :

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$$

Remarque : si les ondes n'étaient pas synchrones, on a plus généralement :

$$\psi = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2 + \Phi\right)$$

Φ est la **phase relative** entre S1 et S2. Si $\Phi=\pi$, les 2 sources sont en **opposition de phase**.

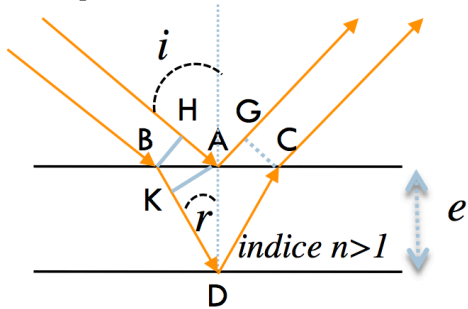
Dans ce cas on aurait eu pour l'intensité :

$$I = 4I_0 \sin^2 \left(\pi \frac{\delta}{\lambda} \right)$$

Donc la position des franges est directement liée à la phase relative des sources d'ondes ($\cos^2 \rightarrow \sin^2$).

2) Interférences dans des lames minces

Principe : On considère un **milieu transparent mince, délimité par 2 dioptres**. En éclairant la lame



avec une source monochromatique, on peut observer des franges dues à l'interférence entre la lumière réfléchi sur le premier dioptre et celle réfléchi sur le second. Il s'agit ici d'un phénomène de **double réflexion**.

On suppose en B et en H que les ondes incidentes sont en phases. La différence de chemin optique entre les 2 rayons donne une différence de phase des ondes en G et C, créant ainsi une **interférence**.

L'interférence dans la lame mince donne lieu à des franges qui varient telles que :

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\pi \frac{\delta}{\lambda} \right) \quad \text{avec} \quad \delta = 2ne \cos r + \frac{\lambda}{2}$$

L'écart angulaire des franges augmente lorsque l'épaisseur de la lame diminue.

Application : Les couches anti-reflet.

Lorsqu'une onde traverse un dioptre en incidence normale, l'intensité réfléchi I_r est :

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Une lentille réfléchit à peu près 8% de la puissance lumineuse et dans un instrument optique qui contient une dizaine de lentilles, 44% de l'énergie lumineuse est réfléchi.

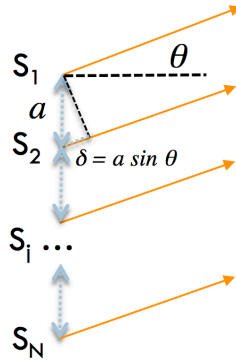
Pour réduire la réflexion on peut déposer sur la lentille une couche mince d'un **matériau moins réfringent que le verre** (d'épaisseur e) et dans ce cas la différence de chemin optique en incidence normale devient $\delta = 2e.n$ (avec n l'indice de la couche mince).

Si on choisit une épaisseur e tel que $e.n = \lambda/4$, la différence de chemin optique entre les 2 ondes réfléchies devient $\delta = \lambda/2$ (et donc $\cos(\pi.\lambda/\lambda.2) = \cos(\pi/2) = 0$) \rightarrow dans ce cas les 2 ondes s'annihilent par **interférence destructive**.

Mais ceci n'est valable que pour une longueur d'onde λ . En pratique on choisit celle du milieu du spectre (lumière vert-jaune : $\lambda = 550\text{nm}$).

3) Interférences à N sources (réseau optique)

On généralise le concept d'interférence à 2 sources, en réalisant un réseau optique : on éclaire une plaque opaque percée de N fentes minces espacées d'une distance identique a, le pas du réseau.



On obtient la formule générale :

$$\psi = A \cos(\phi) + A \cos\left(\phi + \frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) + \dots + A \cos\left(\phi + (N-1)\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$$

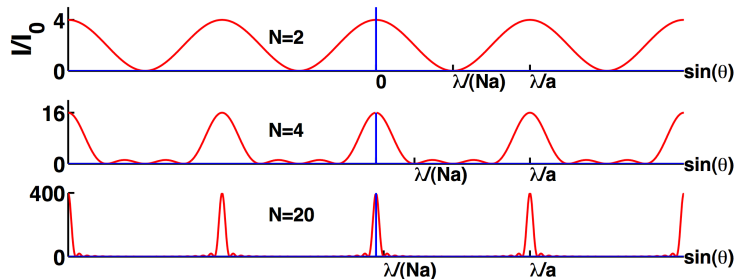
Avec pour phase relative : $\phi = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1$

En effectuant la somme ci-dessus, on obtient :

$$I_N = \frac{A^2}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)}$$

Comme pour les interférences à 2 sources, les **maxima d'intensités** prennent des directions θ_k telles que : $\sin \theta_k = k \frac{\lambda}{a}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

Ces directions sont indépendantes de N, l'ordre du réseau. Par contre la hauteur des maxima croît avec N comme N^2 et leur largeur diminue comme $\Delta\theta = \frac{\lambda}{Na}$.



Application : comme les directions des maxima d'intensité dépendent de λ , on peut utiliser un réseau optique comme analyseur de lumière.

Ainsi on dit que dans l'ordre k, le pouvoir de résolution du réseau est :

$$\frac{1}{kN} = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_{min}$$

La largeur angulaire du k^{ème} pic étant $\lambda/(Na)$, le réseau d'ordre N permet de séparer ce pic, situé en $k \frac{\lambda}{a}$, de celui qui serait produit par un rayonnement de longueur d'onde $\lambda + \Delta\lambda$, situé en $k(\lambda + \Delta\lambda)/a$, du moment que $k \frac{\Delta\lambda}{a} \geq \frac{\lambda}{Na}$.



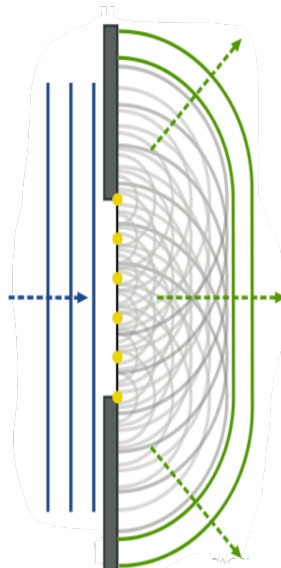
II – Diffraction

La diffraction est un phénomène physique par lequel la propagation des ondes est affectée lorsque ces ondes rencontrent un obstacle dont les dimensions sont comparables à celles de la longueur d'onde. C'est un phénomène d'interférence avec des sources qui sont en distribution continue.

1) Le principe de Huygens-Fresnel

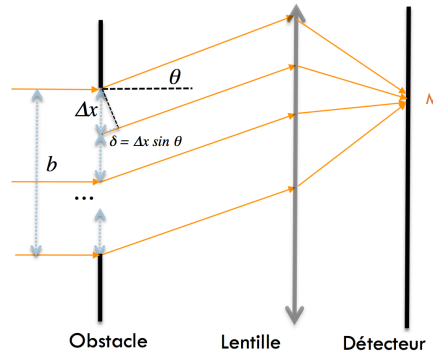
Lorsqu'une onde lumineuse se propage, les points d'une surface agissent comme des **sources émettant des vibrations en phase**, qui engendrent de nouvelles surfaces d'ondes par **interférences constructives**. Il y a donc un lien étroit entre les notions de diffraction et d'interférence.

En appliquant le principe d'Huygens-Fresnel lorsqu'un front atteint une **ouverture étroite** dans une paroi opaque, les ondes lumineuses détectées au delà de cette paroi se comportent comme si elles étaient émises par un **ensemble continu de sources disposées dans l'ouverture de cette paroi**.



2) Diffraction par une seule fente

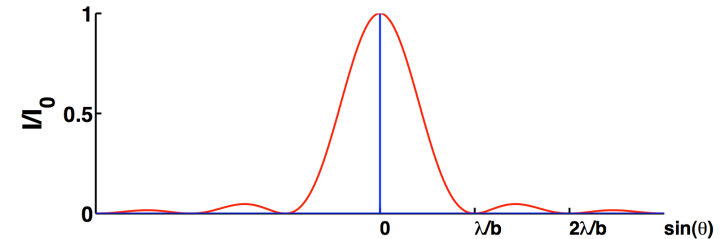
On étudie ici la diffraction de Fraunhofer. L'ouverture dans l'obstacle est considérée comme équivalente à un ensemble de $N = \frac{b}{\Delta x + 1}$ sources rayonnant en phase. La différence de chemin optique des ondes émises par 2 sources voisines est alors $\delta = \Delta x \sin \theta$.



L'intensité lumineuse au point M est :

$$I_b = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right) \text{ avec la fonction sinus cardinal: } \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

L'intensité de diffraction par une fente présente une tache centrale avec des tâches satellites :



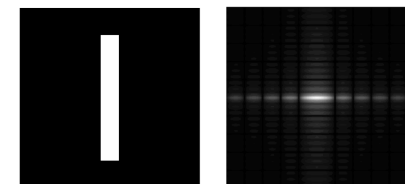
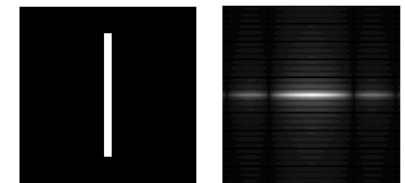
Les positions des minima de I_b sont données par :

$$\frac{\pi b \sin \theta_k}{\lambda} = k\pi \quad \text{donc} \quad \sin \theta_k = k \frac{\lambda}{b}$$

Plus la fente de largeur b est étroite, plus la tâche centrale est étalée. Dans l'approximation des petits angles, sa largeur angulaire vaut : $\Delta\theta = 2 \frac{\lambda}{b}$ (donc entre λ/b et $-\lambda/b$).

3) Exemples de manipulations physiques

Obstacle pour une source lumineuse cohérente Écran en champ lointain (diffraction de Fraunhofer)



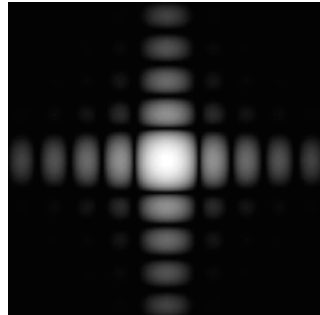
On voit ici que la figure de diffraction sur l'écran lointain est **perpendiculaire** à la fente dans la paroi.

Si on agrandi la fente, on voit bien que la tâche centrale se resserre puisque la périodicité (λ/b) va être plus petite.

La diffraction par une ouverture carrée de côté b est le produit des intensités diffractées par des fentes verticales et horizontales de même largeur. Ici, il faut 2 angles pour repérer le détecteur soit θ et ϕ .

Alors $I(\theta, \phi) = I_b(\theta) \cdot I_b(\phi)$.

Remarque : En lumière blanche, les taches satellites sont dépendantes de la longueur d'onde.



fonction $I_r\left(\frac{r}{\lambda} \sin \theta\right)$ ressemble au sinus cardinal mais est cependant quantitativement différente :

- La hauteur de l'intensité secondaire est très faible
- On n'a pas de lien simple entre la taille de l'ouverture et la taille de la tâche centrale.

La **demie-largeur angulaire de la tache centrale** est donnée par :

$$\sin \theta_0 = 0.61 \frac{\lambda}{r}$$

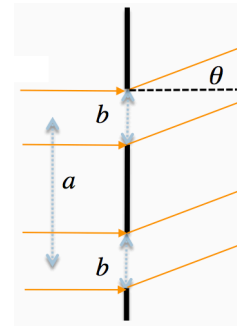
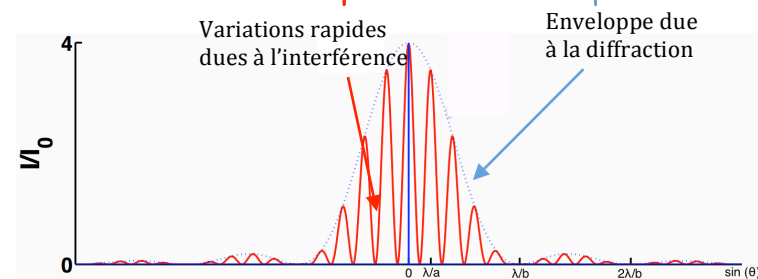
La tache centrale de cette diffraction est appelée **tache d'Airy**.

5) Diffraction par 2 fentes

On considère 2 fentes de largeur b séparées par une distance a , on aura à la fois le phénomène d'**interférence** et de **diffraction**.

Cela revient à multiplier l'intensité que l'on aurait avec une seule ouverture par la **modulation** caractéristique de l'interférence :

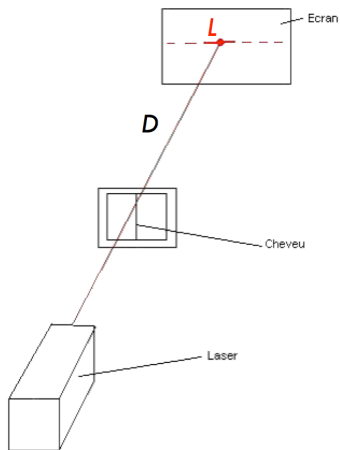
$$I_{Young} = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right)$$



La figure de diffraction par un fil d'épaisseur b est semblable à une fente de même largeur.

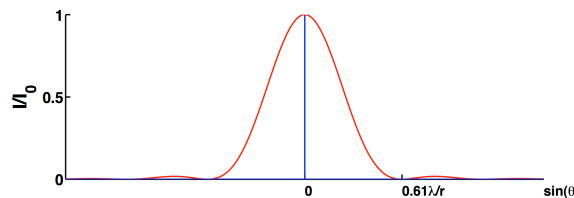
Une expérience classique consiste à observer la diffraction d'un champ laser par un cheveu. Si l'écran est à une distance D du cheveu, et la tâche centrale est d'une largeur totale L , on en déduit que l'épaisseur du cheveu est telle que :

$$\frac{L}{D} \sim \Delta\theta = 2 \frac{\lambda}{b} \text{ on a ainsi : } b = \frac{2\lambda D}{L}$$



4) Diffraction par une ouverture circulaire

La tâche de diffraction possède une symétrie circulaire (et non axiale). Ainsi l'intensité diffractée est seulement fonction du rayon r de l'ouverture dans la paroi. Cette



III – Pouvoir de résolution optique

1) Pouvoir de résolution des instruments optiques

Le but d'un instrument optique est de fournir une image nette d'un objet. L'étude de la diffraction montre que ceci n'est pas évident ; si un instrument optique possède une ouverture de rayon r , **le stigmatisme strict est impossible** : l'image d'une source ponctuelle extérieure à l'instrument est une tache d'Airy d'extension angulaire $2\theta_0$ telle que :

$$\sin \theta_0 = 0.61 \frac{\lambda}{n'r} \text{ avec } n' \text{ l'indice de réfraction propre à l'instrument}$$

Critère de Rayleigh : Les objets A et B sont résolus si la position du maximum d'intensité de l'image B' tombe (au plus près) au premier zéro de l'intensité de l'image A'. Donc la distance angulaire entre les centres des images doit valoir au moins l'angle θ_0 (donc la limite est bien $2\theta_0$).

Etant donné que pour un instrument optique donné, λ et r sont fixés, le pouvoir de résolution de cet instrument est limité par la diffraction. On définit le **pouvoir séparateur** d_{\min} d'un instrument optique comme *l'écart minimum entre 2 objets ponctuels permettent encore de les distinguer*. Si on note la distance objet D , alors le critère de Rayleigh implique que :

$$d_{\min} = 0.61 \frac{\lambda D}{n'r} \text{ (en ayant approximer } \sin \theta \text{ à } d_{\min}/D \text{)}$$

Comment réduire d_{\min} ? : Il faudrait réduire λ , on remplace la lumière par des ondes de matière (microscopie électronique).

2) pouvoir de résolution de l'œil

En considérant l'œil comme un instrument optique, son pouvoir de résolution est également limité par la diffraction. Dans ce cadre la résolution angulaire minimale de l'œil est donnée par $\theta_0 = 0.61 \frac{\lambda}{n'r}$ et vaut environ 15 mr (milliradian).

En pratique la moyenne des individus possèdent un $\theta_0 = 0,3$ à $0,5$ mr. Par convention on définit une acuité visuelle de 10/10 à 0,3 mr (ce qui correspond à pouvoir distinguer à 10m 2 points séparés de 3mm).

En réalité il apparaît que les limites de l'acuité visuelle sont imposées par la structure cellulaire de la rétine et non la diffraction. En effet pour être distinctement perçus, 2 rayons doivent toucher 2 cônes distincts de la rétine séparés par au moins une cellule de la rétine ($5\mu\text{m}$).

Si le diamètre d'un cône est de $2,3 \mu\text{m}$ et que la profondeur de l'œil est de 23mm, cette contrainte correspond à limiter l'acuité visuelle à un angle maximum de résolution de : $\Delta\theta = 2 \cdot \frac{2,3 \cdot 10^{-6}}{23 \cdot 10^{-3}} = 0,2$ mr.

Au final on voit qu'il existe tout de même une bonne adéquation entre la structure interne de l'œil et la limite d'acuité imposée par les lois de diffraction.

