ÉVÉNEMENTS ET PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES – Pr STACCINI

ENSEMBLES, ÉLÉMENTS

- **Population** = Ensemble d'objets, d'êtres vivants (population réelle) ou d'objets abstraits (population fictive) de même nature.

  L'étude exhaustive d'une population est souvent impossible ou bien trop coûteuse !

- **Échantillon** = Sous-ensemble d'une population, utilisé lors des études statistiques (car plus accessible que l'étude de la population directement).

Problématiques lié au fait de travailler sur un **extrait** de la population	
Représentativité Retrouve t-on dans l'échantillon la diversité d'expression du caractère étudié tel qu'il est présent dans la population d'origine ?	**Confiance** La variabilité entre les différents échantillons possiblement constituables permettra t-elle d'établir une extrapolation qui ne varie pas trop ?

- **Ensemble** = liste, collection d'objets bien définis.

Un ensemble peut être défini en :

Extension (explicite)	**Compréhension (implicite)**
En listant tous ses éléments *Ex : A = {1;3;5;7;9}*	En donnant la(les) propriété(s) qui caractérise(nt) ses éléments *Ex : A = {x : x impair et compris dans [0;10]}*

- **Élément** = objet appartenant à l'ensemble.

- **Partition de A** = subdivision de A en sous-ensembles disjoints dont la réunion forme A.

NOTATIONS

$p \in A$	p est un élément de l'ensemble A
$p \notin A$	p n'est pas un élément de l'ensemble A
$B \subset A$	B est une partie de A
$\emptyset$	Ensemble vide
E ou Ω	Ensemble universel / plein

OPÉRATIONS

Union $A \cup B$ Ensemble des éléments appartenant à A ou à B $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	**Intersection** $A \cap B$ Ensemble des éléments communs à A et à B *Particularité : Si* $P(A \cap B) = 0$ *, les événements A et B sont dits disjoints ou incompatibles, c'est-à-dire qu'il ne pourront jamais survenir en même temps.*
Inclusion $B \subset A$ La survenue de l'événement B entraîne automatiquement celle de l'événement A. *NB :* $B \subset A \Leftrightarrow P(B) \leqslant P(A)$	**Complémentaire de A :** $\bar{A}$, CA , A^C Ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Différence $A - B$ *= Complémentaire de B relatif à A* Ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.	**Différence symétrique** $A \Delta B$ Ensemble des éléments qui sont soit dans A soit dans B mais pas dans leur intersection. *NB : Cela correspond à un lien logique ou exclusif puisqu'on ne peut appartenir aux deux.*

- **Ensemble fini** = s'il est vide (Ø) ou s'il contient un nombre fini d'éléments.

  Rq : Un ensemble fini est forcément dénombrable.

- **Ensemble infini** = s'il contient un nombre infini d'éléments.

Infini dénombrable	**Infini non dénombrable**
On peut faire correspondre de façon unique chaque élément à un entier naturel et un seul. Ex : $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels	On ne peut pas faire correspondre de façon unique chaque élément à un entier naturel. Ex : $\mathbb{R}$: ensemble réel

- **Ensemble produit** = noté AxB , correspond à l'ensemble de tous les couples ordonnés $(a;b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$.

  Ex : Soient A = {a,b,c} et B = {1;2} → AxB = {(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)}

- **Produit cartésien** = produit de n ensemble ; un élément de ce produit s'appelle n-uplet.

  *NB : un n-uplet est **ordonné** et se note entre **parenthèses** ≠ partie à n éléments qui est **sans ordre** et se note entre **accolades**.*

- **Famille d'ensembles / Famille des parties** : ensemble des sous-ensembles de A.

  2^p = nombre de parties d'un ensemble de p éléments

  Ex : Soit A={1;2} → Le nb de partie de A = $2^2 = 4$ → $P(A) = (\emptyset, (1), (2), (1,2))$

ÉVÉNEMENTS ET PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES – Pr STACCINI

ÉLÉMENTS DE PROBABILITÉ

Phénomène aléatoire	Phénomène déterministe
Phénomène dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance car lié au **hasard**. Modélisés par les calculs statistiques. *Ex : Lancée de dé*	Phénomène dont on peut prévoir le résultat. Suivent une **régularité de comportement** permettant d'appréhender le résultat lorsqu'on contrôle les causes. *Ex : Loi d'Ohm U=RI → En connaissant U et R, on peut déterminer d'avance I.*

- **Ensemble fondamental** = ensemble des résultats possibles d'un expérience aléatoire donnée.
- **Événement** = sous-ensemble de Ω c'est-à-dire un ensemble de résultats à condition que Ω soit **dénombrable** (fini ou infini dénombrable).
  Ex : Obtenir un nombre impair lors d'un lancée de dé.
- **Événement élémentaire** = constitué d'un seul point de Ω (résultat unique). On dit qu'il contient l'**information maximale** qu'il est possible d'obtenir de l'expérience.
  Ex : Obtenir 3 lors d'un lancée de dé.
- **Événement certain** : Contient l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Noté Ω.
  Ex : Obtenir un chiffre appartenant à l'intervalle [1;6] lors d'un lancée de dé.
  $$P(\Omega)=1$$
- **Événement impossible** : Ne contient aucun des résultats possibles. Noté Ω.
  Ex : Obtenir 7 au lancée d'un dé numéroté de 1 à 6.
  $$P(\emptyset)=0$$

La probabilité P est une fonction qui à un événement associe un nombre appartenant au segment [0;1]. Elle est censée mesurer les chances de réalisation de cet événement.

DÉNOMBREMENTS

Catégorie : Avec Ordre (tirage successif)

Sous-catégorie : Avec remise

FORMULE	APPLICATION
E^p	On dispose de 3 boîtes et de 5 craies (bleue, rouge, jaune, verte, orange) *A combien s'élève les possibilités de répartition des 5 craies au sein des 3 boîtes ?* **Réponse** : 3^5
p^n	*Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec l'alphabet (26 lettres) ?* **Réponse** : 26^5

Sous-catégorie : Sans remise

FORMULE	APPLICATION
$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!...k_n!}$	10 animaux répartis en 3 catégories : 2 dans l'espèce A, 3 dans l'espèce B, 5 dans l'espèce C. On observe l'ordre d'arrivée au terrier. *Quel est le nombre d'arrivée au terrier possible ?* **Réponse** : $P_{10,2,3,5}=\frac{10!}{2!3!5!}$
$n!$	6 cartes avec les lettres R,A_1,F,A_2,E,L *Combien de combinaisons possibles de ces lettres peut-on créer ?* **Réponse** : $6!$ *Quelle est la probabilité d'obtenir le prénom RA_1FA_2EL ?* **Réponse** : $\frac{1}{6!}$
$\frac{n!}{(n-p)!}$	Parmi 12 destinations, on souhaite faire un circuit de 4 voyages dans un ordre précis. *Combien avons-nous de possibilités d'arrangements des destinations ?* **Réponse** : $\frac{12!}{(12-4)!}$

Catégorie : Sans ordre (tirage simultané)

Sous-catégorie : Sans remise

FORMULE	APPLICATION
$\frac{n!}{p!(n-p)!}$	*Parmi 12 individus, combien peut-on constituer d'échantillon de 5 personnes et ce sans remise et sans ordre ?* **Réponse** : $C_{12}^{5}=\frac{12!}{5!7!}$

Equiprobabilité

FORMULE	APPLICATION
$P(A_k)=\frac{C_D^k x C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$	Une boîte contient 10 articles (N) dont 4 défectueux (D). On tire 3 articles au hasard (n). *Quelle est la probabilité pour que, parmi les 3 tirés au sort, 2 soient défectueux (k) ?* **Réponse** : $\frac{C_4^2 x C_6^1}{C_{10}^3}$