Cours 2a: PROBABILITE CONDITIONNELLE, THEOREME DE BAYES ET INDEPENDANCE EN PROBABILITE

Plan du cours

- ❑ Probabilité conditionnelle
- ❑ Formule de Bayes
- ❑ Indépendance en probabilité

Probabilité conditionnelle

Définition

- Soient A et B deux événements quelconques d'un ensemble fondamental Ω muni d'une loi de probabilité P noté P(Ω). On s'intéresse à ce que devient la probabilité de A lorsque l'on apprend que B est déjà réalisé. La probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est noté $P(A/_B)$ et est définie par la relation:

$$P(A/_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Théorème de la multiplication

- Formule des probabilités conditionnelles :

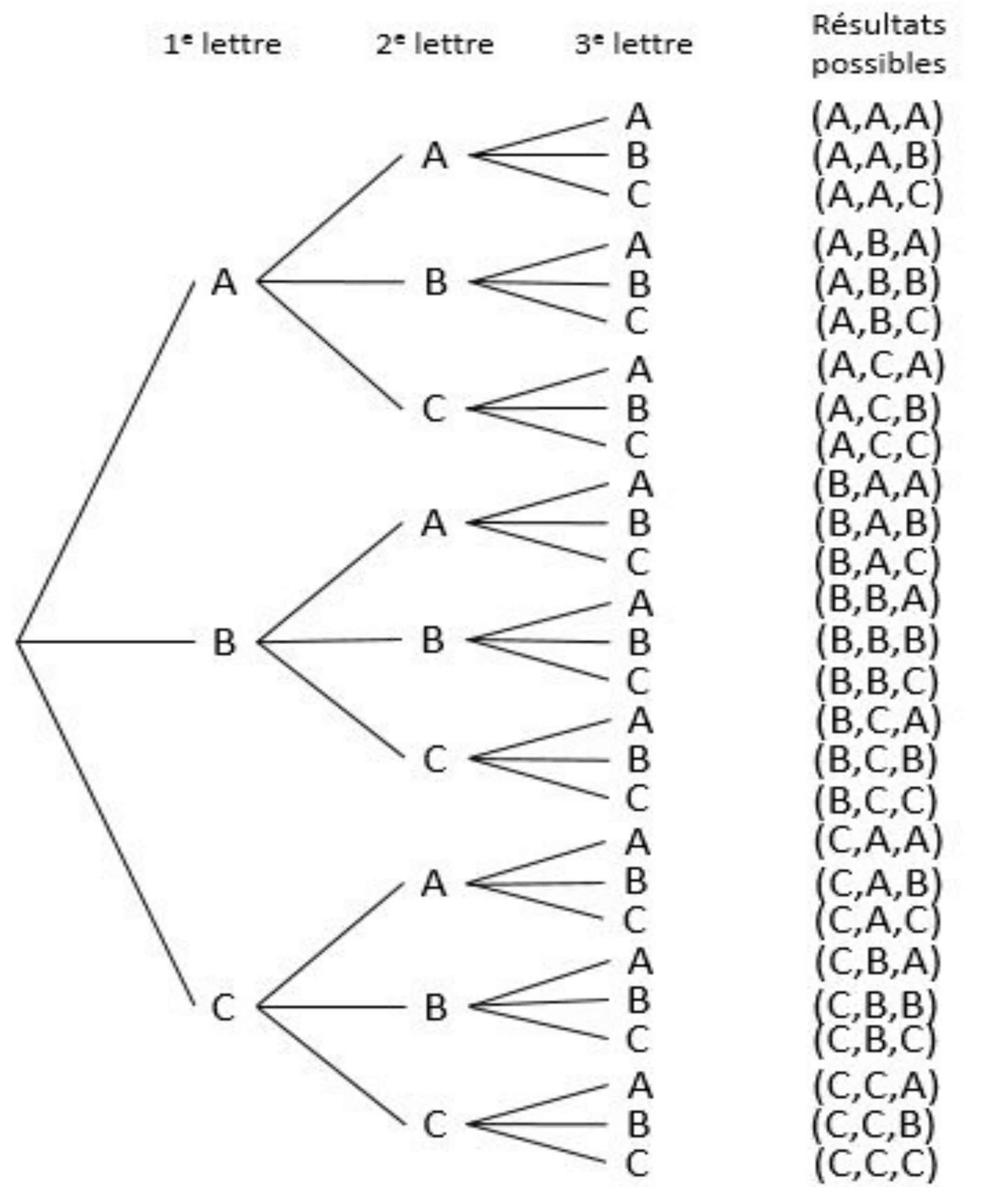
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{et} \qquad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- On en déduit :

$$P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$$

- Cette égalité peut se généraliser

Exemple



1^e lettre
2^e lettre
3^e lettre
Résultats possibles
A
B
C
(A,A,A)
(A,A,B)
(A,A,C)
(A,B,A)
(A,B,B)
(A,B,C)
(A,C,A)
(A,C,B)
(A,C,C)
(B,A,A)
(B,A,B)
(B,A,C)
(B,B,A)
(B,B,B)
(B,B,C)
(B,C,A)
(B,C,B)
(B,C,C)
(C,A,A)
(C,A,B)
(C,A,C)
(C,B,A)
(C,B,B)
(C,B,C)
(C,C,A)
(C,C,B)
(C,C,C)

Diagramme en arbre

- On considère une séquence fini d'expériences dont chacune d'entre elles a un nombre fini de résultats possible

- Les probabilités associées aux résultats possibles d'une expérience dépendent du résultats de l'expérience précédente → Il s'agit de probabilités conditionnelles

- On utilise un diagramme en arbre pour représenter cette séquence. Le théorème de la multiplication nous permet de calculer la probabilité de chaque feuille de l'arbre.

Diagramme en arbre

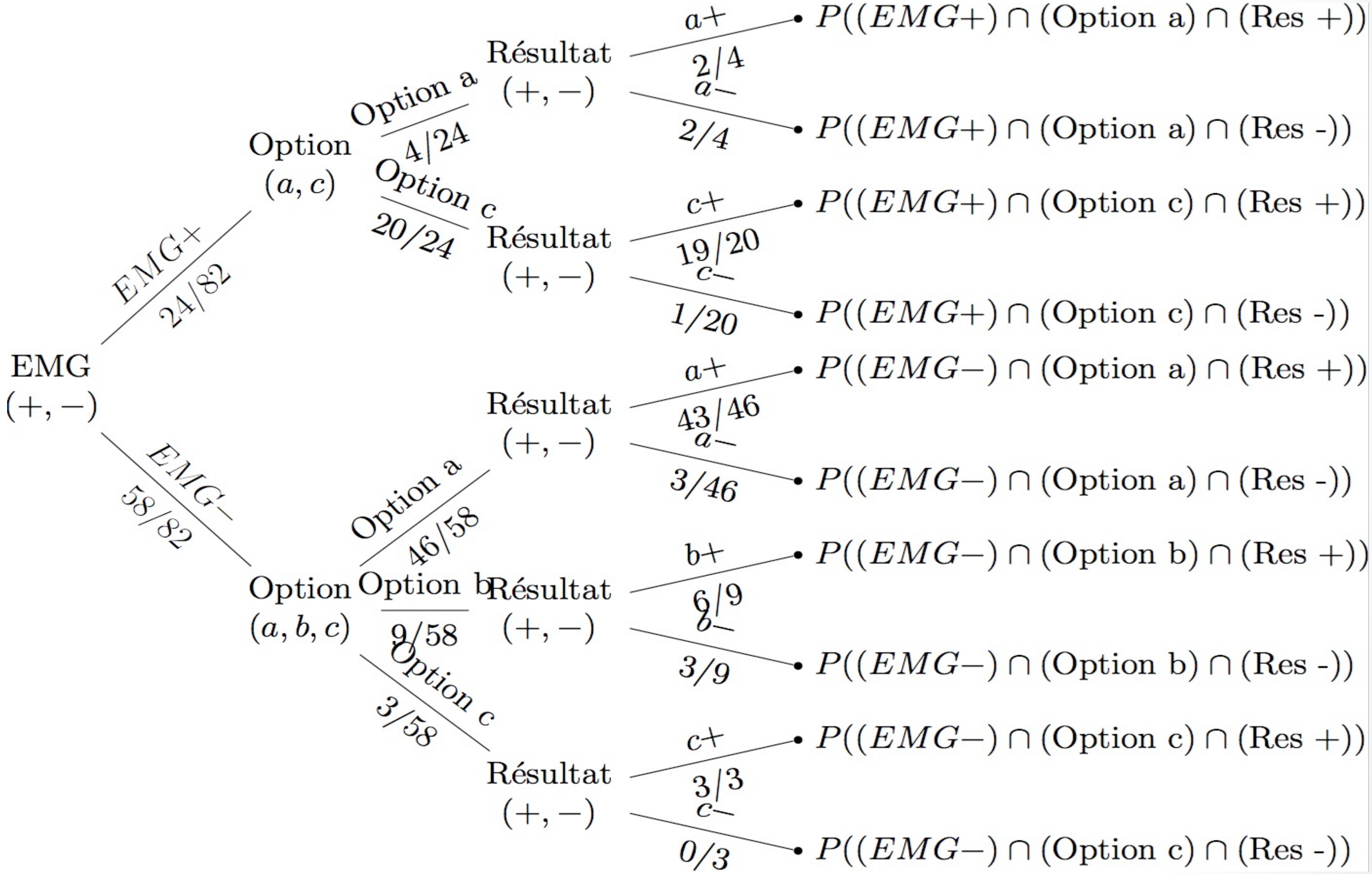


Diagramme en arbre

- La probabilité qu'un chemin se réalise est, d'après le théorème de la multiplication, LE PRODUIT des probabilités de chaque branche du chemin

- Les chemins s'excluant mutuellement, la probabilité que le traitement soit efficace est égale à LA SOMME des probabilités d'être efficace, c'est-à-dire aboutissant à un état +

IMPORTANT!!!++++

- Probabilité conditionnelle ≠ Probabilité d'une intersection
- La probabilité conditionnelle est une proportion de sujet présentant A **PARMI** les sujet présentant B
- La probabilité d'une intersection est la proportion de **TOUS** les sujet présentant à la fois A **ET** B

Formule de Bayes

Rappel

- Soient 2 évènements quelconques d'un ensemble fondamental Ω muni d'une loi de probabilité P(Ω)
- On s'intéresse à ce que devient A lorsqu'on apprend que B est déjà réalisé
- La probabilité de A sachant B est noté P(A/B) et est définie par la relation suivante:

$$P(A/_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Formule de Bayes

- Définition des probabilités conditionnelles :

$$P(A/_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{et} \quad P(B/_A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

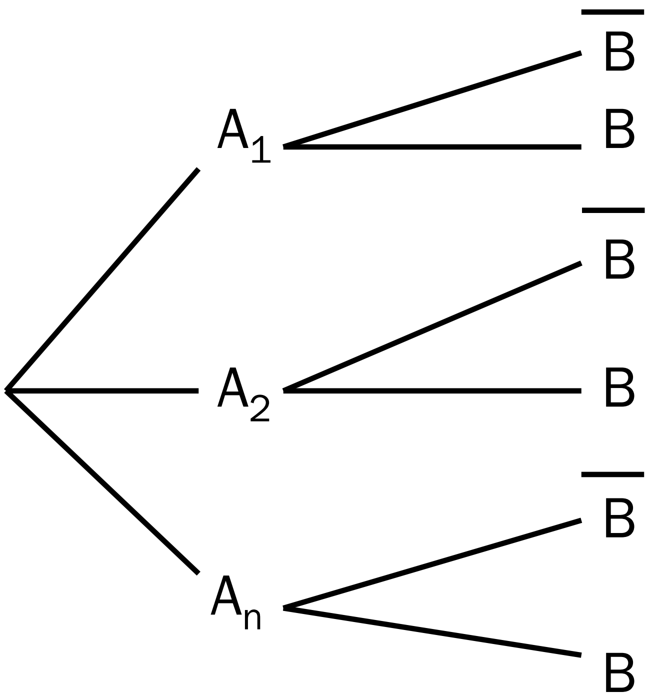
- On en déduit le théorème de la multiplication:

$$P(A \cap B) = P(A/_B) \times P(B) = P(B/_A) \times P(A)$$

- En remplaçant on obtient la formule de Bayes :

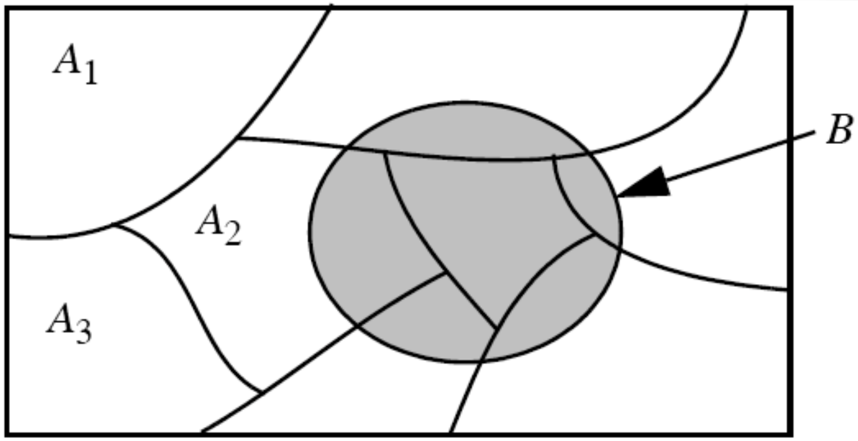
$$P(B/_A) = \frac{P(A/_B) \times P(B)}{P(A)}$$

Théorème de Bayes



Théorème de Bayes

- Soit un événement B quelconque:



- De $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ et de $B = B \cap \Omega$
- On en déduit $B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$
- Donc par distributivité $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap \cup A_n)$
- En appliquant le théorème des probabilités TOTALES il vient que :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + (B \cap A_2) + \cdots + (B \cap A_n)$$

Théorème de Bayes

- En appliquant le théorème de la multiplication à l'égalité précédente on obtient:

$$P(B) = P(B/_{A1})P(A_1) + P(B/_{A2})P(A_2) + \ldots + P(B/_{An})P(A_n)$$

- Pour chaque A_i, en appliquant la formule de BAYES on obtient :

$$P(A_i/_B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/_{A_i})P(A_i)}{P(B)}$$

- D'où le Théorème de BAYES :

$$P(A_i/_B) = \frac{P(B/_{A_i})P(A_i)}{P(B/_{A_1})P(A_1) + P(B/_{A_2})P(A_2) + \cdots + P(B/_{A_n})P(A_n)}$$

Evènements indépendants

Définition

- Deux évènements A et B sont dit **indépendants** si et seulement si:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- Ce qui signifie que si deux événements A et B sont indépendants, la probabilité pour que A soit réalisé n'est pas modifiée par le fait que B se produise, c'est-à-dire:

$$P(A/_{B}) = P(A)$$

Propriétés

- La symétrie de cette définition implique qu'on a aussi $P(B/_A)= P(B)$ (B indépendant de A). L'apparition d'un des deux évènements n'influent pas sur l'apparition de l'autre.

- Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé (Ω, F,P).

  Si A et B sont indépendant on a:

- A et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et B sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Généralisation

- On considère 3 évènements A,B et C
- On peut dire que ces 3 évènements sont indépendants si:

1. S'ils sont indépendants 2 à 2 : A indépendant de B, A indépendant de C et B indépendant de C
2. Et que $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

Attention! La 2^{nd} condition n'est pas une conséquence de la $1^{ère}$. Toujours vérifier les 2 conditions

Indépendance et inclusion

- Soient 2 événements A et B

  Si A $\subset$ B, alors P(A $\cap$ B) = P(A)
- En appliquant la formule de Bayes:

$$P(A/_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{devient} \quad P(A/_B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$P(B/_A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{devient} \quad P(B/_A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Les évènements A et B ne sont pas indépendants

Indépendance et exclusion

- Soient 2 évènements A et B

- Si $(A \cap B) = \varnothing$, A et B sont dits exclusifs (disjoints) et $P(A \cap B)=0$

- Alors: $P(A/_B) = P(B/_A) = 0$

Les 2 évènements ne sont pas indépendants

Attention!! +++

- **Ne pas confondre évènements événements incompatibles et événements indépendants**

- Les événements incompatibles ne font pas intervenir leur probabilité. Ils ne peuvent pas se réaliser en même temps. Ils sont caractérisés par la relation:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Les événements indépendants sont liés à leur probabilité. Les deux peuvent peuvent se produire en même temps mais la réalisation d'un événement n'a aucune incidence sur la réalisation du second événement. Ils sont caractérisés par la relation: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

QCM 1: Une entreprise pharmaceutique produit des comprimés sécables contre l'hypertension artérielle. Un comprimé est parfait si son poids est compris entre 1,1 g et 1,2g. La probabilité qu'un comprimé soit conforme aux spécifications de fabrication est de 0,98. On tire au hasard un comprimé. On note A l'événement « le comprimé est conforme » et B l'événement « le comprimé est refusé ». Tous les comprimés sont contrôlés. Le mécanisme de contrôle est tel que un comprimé conforme est accepté avec une probabilité de 0,98 et un comprimé non conforme est refusé avec une probabilité de 0,99.

Quelle est la probabilité qu'un comprimé soit conforme sachant qu'il est refusé?

A. 0,10 B. 0,20 C. 0,30 D. 0,40 E. 0,50

QCM 1: Une entreprise pharmaceutique produit des comprimés sécables contre l'hypertension artérielle. Un comprimé est parfait si son poids est compris entre 1,1 g et 1,2g. La probabilité qu'un comprimé soit conforme aux spécifications de fabrication est de 0,98. On tire au hasard un comprimé. On note A l'événement « le comprimé est conforme » et B l'événement « le comprimé est refusé ». Tous les comprimés sont contrôlés. Le mécanisme de contrôle est tel que un comprimé conforme est accepté avec une probabilité de 0,98 et un comprimé non conforme est refusé avec une probabilité de 0,99.

Quelle est la probabilité qu'un comprimé soit conforme sachant qu'il est refusé?

A. 0,10 B. 0,20 C. 0,30 D. 0,40 E. 0,50

QCM 1: Une entreprise pharmaceutique produit des comprimés sécables contre l'hypertension artérielle. Un comprimé est parfait si son poids est compris entre 1,1 g et 1,2g. La probabilité qu'un comprimé soit conforme aux spécifications de fabrication est de 0,98. On tire au hasard un comprimé. On note A l'événement « le comprimé est conforme » et B l'événement « le comprimé est refusé ». Tous les comprimés sont contrôlés. Le mécanisme de contrôle est tel que un comprimé conforme est accepté avec une probabilité de 0,98 et un comprimé non conforme est refusé avec une probabilité de 0,99.

Quelle est la probabilité qu'un comprimé soit conforme sachant qu'il est refusé?

A. 0,10 B. 0,20 C. 0,30 D. 0,40 E. 0,50

QCM 2 : Donner les propositions correctes

A. Les évènements incompatibles font intervenir leur probabilité

B. Les évènements indépendants ne font pas intervenir leur probabilité

C. Les évènements incompatibles ne font pas intervenir leur probabilité

D. Les évènements indépendants font intervenir leur probabilité

E. Toutes les propositions sont fausses

QCM 2 : Donner les propositions correctes

A. Les évènements incompatibles font intervenir leur probabilité

B. Les évènements indépendants ne font pas intervenir leur probabilité

C. Les évènements incompatibles ne font pas intervenir leur probabilité

D. Les évènements indépendants font intervenir leur probabilité

E. Toutes les propositions sont fausses