Variables aléatoires
Lois de probabilités

I/ Définition générale

- **Une variable aléatoire est une épreuve menant à des événements élémentaires qui sont des nombres.**

Ex 1: On TAS un médicament (=épreuve) et on note la dose de PA contenu (événement élémentaire). On parle bien de variable aléatoire car le résultat est un nombre

EX 2: On TAS un étudiant de PACES (=épreuve) et on lui demande la filière désirée (événement élémentaire). Ici, on ne peut plus parler de variable aléatoire car la filière n'est pas un nombre.

- **Lorsque le résultat de l'expérience est à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable, on parle de variable aléatoire discrète.**

- **Lorsque le résultat de l'expérience est à valeur dans R ou un intervalle de R, on parle de variable aléatoire continue.**

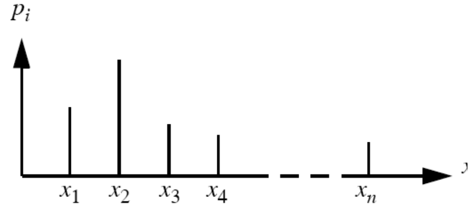
II/ Variables aléatoires discrètes

- Rappel : le résultat de l'expérience se trouve dans un ensemble fini ou dénombrable (comme N)

- Une loi de probabilité est définie par l'ensemble des probabilités des différentes éventualités d'une v-a X. C'est à dire qu'à chaque éventualité x_i on associe une probabilité p_i.

- On représente les v-a discrètes sous forme de **table** ou de **diagramme en bâton** :

x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_1	p_2	$\dots$	p_n



1) Paramètre

a) Espérance

- La moyenne μ de la v.a X est la valeur moyenne des résultats que l'on obtiendrait en répétant indéfiniment l'épreuve. Elle traduit la tendance centrale de la v-a.

- Elle est notée E(x). C'est un indicateur de **position.**

- $E(X) = \mu = \sum(xi * pi)$

Ex: Dans un groupe de 10 élèves, 4 ont eu 8/20, 2 ont eu 12 et 4 ont eu 16. La moyenne de la classe est de 8 x 0,4 + 12 x 0,2 + 16 x 0,4 = 3,2+2,4+6,4 = 12.

- X est un v-a et k un nombre réel :

E(X+k)= E(x)+k et **E(kX)= k E(X)**

- X et Y sont 2 v-a : **E(X+Y)= E(X) + E(Y)**

b) Variance et écart-type

- La variance σ^2 est un indicateur de dispersion qui montre si les différentes valeurs de X sont plus ou moins rapprochées de μ. L'écart-type est noté σ

- $\sigma^2 = Var(X) = \Sigma\, p_i * (x_i - \mu)^2$

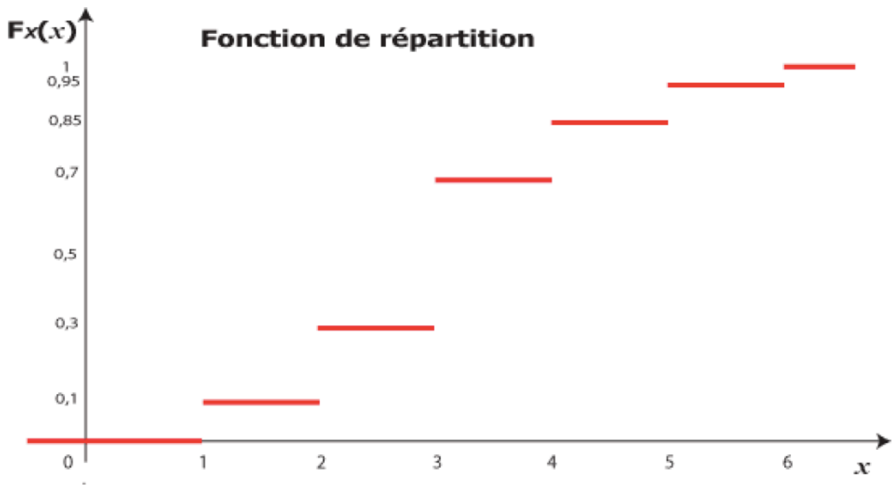
EX : Soient 2 classes de 10 élèves.

Dans la classe 1 : 4 ont eu 8, 2 ont eu 12 et 4 ont eu 16. La moyenne est de 12. La variance est de :
0,4 x (8-12)2 + 0,2 x (12-12)2 + 0,4 x (16-12)2 = 0,4 x 16 + 0,4 x 16 = 2 x 6,4 = 12,8

Dans la classe 2: 3 ont eu 11, 4 ont eu 12 et 3 ont eu 13. La moyenne est de 12. La variance est de :
0,3 x (11-12)2 + 0,4 x (12-12)2 + 0,3 x (13-12)2 = 0,3 x 1 + 0,3 x 1 = 0,6 (Les notes dans cette classe sont donc beaucoup moins dispersées)

c) Fonction de répartition

- On a une fonction cumulative car on somme tous les p_i des x_i survenus AVANT x. LA fonction de répartition est une fonction en **escalier**.



2) Lois de probabilités discrètes

Notation : p : probabilité du succès q : probabilité de l'échec
n : nb d'essais

a) Loi de Bernoulli B(p)

- X: v.a « nombre de succès » lors d'une épreuve
- Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont l'issue se traduit soit par un « succès » soit par un « échec »
- X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, noté B(p) :

$$P(X=k)=p^k q^{1-k}$$

- **$\mu = p$ et $\sigma^2 = pq$**

Ex : On lance une pièce et on regard si elle tombe sur « pile » ce qui constitue le succès de l'épreuve avec une probabilité de 0,5 : P(X=1)= 0,5

P(X=0)= 0,5

b) Loi Binomiale B(n,p)

- Epreuves répétées de Bernoulli, cad un processus qui consiste en n essais indépendant d'une même expérience aléatoire dont l'issue se traduit soit par un « succès » soit par un « échec »
- X: v.a « nombre de succès » après n essais
- X suis une loi Binomiale de paramètre n et p, noté B (n,p) :

$$P(X=k)= C^k_n p^k q^{n-k}$$

- **μ = np et σ^2 = npq**

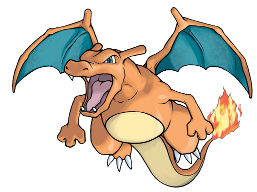
Ex : on répète 3 fois l'expérience de la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois « pile » ?
$P(X=2) = C_3^2 \times p^2 \times q = 3 \times 0{,}5^2 \times 0{,}5 = 0{,}375$

- NB : Dans le cas de la constitution d'un échantillon par TAS, on distingue 2 situations :
- 1ère situation : Le tirage est non exhaustif (= indépendant). Les éléments sélectionnés sont remis dans l'échantillon après le tirage (= tirage avec **remise**) : p reste alors constant.
- 2ème situation : Le tirage est exhaustif (= dépendant des autres tirages). Il n'y a **pas de remise**, p varie donc au fil des tirages. On définit alors le **taux de sondage = n / N** :

=> Si **n / N ≥ 0,10, on appliquera la loi Hypergéométrique.**

=> Si **n / N ≤ 0,10, on peut appliquer la loi Binomiale.** Dans ce cas on considère que les variations de p sont négligeables.

- Pour p = 0,5 la distribution Normale est symétrique autour de μ.
- Pour p≥ 0,5 asymétrique positive
- Pour p≤ 0,5 asymétrique négative



c) Loi de Poisson P(λ)

- Modélisation de phénomènes aléatoires où les évènements se réalisent sur la base d'une unité de temps, de volume, de surface…
- X suit une loi de Poisson de paramètre λ, noté P(λ)

$$\mathbf{P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}$$

- **$\mu = \sigma^2 = \lambda$**

Ex : On veut connaître la probabilité qu'il y ait un certain nombre de tram allant vers Valrose en 1 heure sachant qu'il y en passe en moyenne 8 par heure.
$P(X=2) = (e^{-8} * 8^2) / 2 !$
$P(X=4) = (e^{-8} * 8^4) / 4 !$
$P(X=10) = (e^{-8} * 8^{10}) / 10 !$

d) Loi géométrique

- Epreuves répétées de Bernoulli. On cherche le nombre d'essais où apparaitra le 1^{er} succès.
- X: v.a « nombre d'essais nécessaires juqu'à la réalisation du premier succès »
- X suit une loi géométrique de paramètre p, noté G(p)

$$P(X=k)\ p \times q^{k-1}$$

- **$\mu = 1 / p$ et $\sigma^2 = (1-p) / p^2$**

e) Loi hypergéométrique

- Soit une population de N individus parmi lesquels D ont un caractère donné. On prélève un échantillon de taille n, **sans remise**, soit au fur et à mesure, soit d'un seul coup.
- X: v.a du nombre d'individus de l'échantillon possédant la propriété envisagée.
- X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, D et n, noté H(N; D; n)

$$\mathbf{P(X = k) = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}}$$

- μ= np $\quad \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} npq$

Ex : Dans une population de 1000 habitants, 150 possèdent les yeux vairons (les yeux sont chacun d'une couleur différente). On tire au sort 200 individus dans cette population. Quelle est la probabilité que la moitié de cet échantillon ait les yeux vairons ?

- $\mathbf{P(X = 100) = \frac{C_{150}^{100} C_{850}^{100}}{C_{1000}^{200}}}$
- $P(X = 100) = \dfrac{\frac{150!}{100!50!} \frac{850!}{750!100!}}{\frac{1000!}{200!800!}}$
- =6,62 10^{-44}

III/ Variables aléatoires continues

- Rappel : le résultat de l'expérience est à valeur dans R ou un intervalle de R, on parle de variable aléatoire continue.

1) Définition

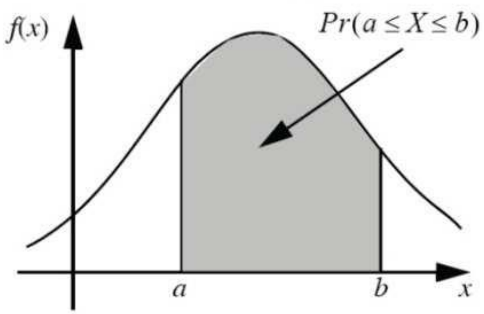
- Ce qui caractérise une v.a continue, c'est quelle a une probabilité nul d'être égale à n'importe quel nombre donné (poids).
- Cependant on sait parler de probabilité pour que la v.a X prenne une valeur comprise entre deux valeurs a et b, noté :

P(a ≤ X ≤ b)

a) Densité de probabilité

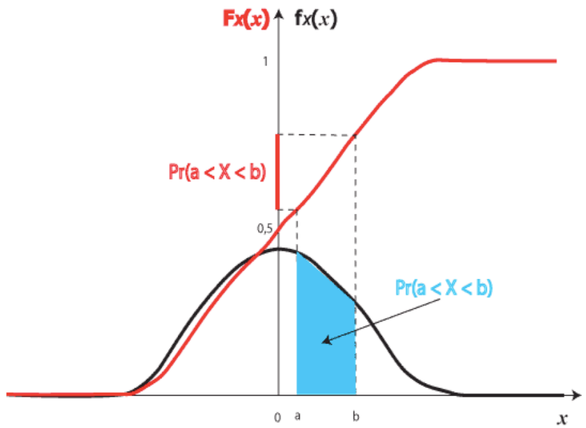
- Soit X une v.a aléatoire continue prenant des valeurs comprises entre a et b. on définit la loi de probabilité de X, à l'aide de la fonction f(x) appelée **densité de probabilité** de X telle que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



b) Fonction de répartition

- Monotone croissante (comme pour les variables discrètes)
- P(a ≤ X ≤ b) est la différence des hauteurs F(b) - F(a) si on utilise la fonction de répartition.
- Contrairement au cas des variables discrètes, la fonction de répartition est ici continue.



c) Variable centré réduite

- Le terme « centrée » signifie qu'on soustrait la moyenne μ de la variable à chacune de ses valeurs initiales.
- Le terme « réduite » signifie qu'on divise toutes les valeurs que prend la variable par son écart-type.
- On transforme donc une variable X en une variable centrée réduite Y selon la relation : $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$
- E(X)=0 et Var(X)=1
- Cette transformation permet :

1. D'obtenir des données **indépendantes des unités**
2. D'avoir des variables avec une moyenne (μ = 0) et un écart- type (σ = 1) identiques.
3. De n'utiliser qu'**une seule table de probabilité** (la loi normale centrée réduite) afin de déterminer les probabilités de n'importe quelle variable.

2) Lois de probabilités continues

a) Loi exponentielle

- La loi exponentielle est utilisée pour décrire un phénomène de « mortalité » (ou survenue d'un événement) dans lequel « le risque instantané » (taux de défaillance) de « décès » est constant.
- Fonction de densité: $f(x)= \lambda e^{-\lambda x}$
- λ= taux de défaillance instantané
- Fonction de répartition $F(x)=$ $\mathbf{P(X\leq x)= 1-e^{-\lambda x}}$
- $\mu = 1/\lambda$ $\sigma^2 = 1/\lambda^2$

Ex : Un PACES achète un feutre noir pour remplir ses grilles qcm. La durée de vie du feutre suit une loi exponentielle tel que λ=1/12 en année. Quelle est la probabilité qu'il marche encore après 1 ans ?

$P(X\geq 1)= 1-P(X\leq 1)= 1- F(1) = 1 - \left[1 - e^{\frac{-1}{12}x1}\right] = e^{\frac{-1}{12}}$

- Lien avec la loi de Poisson: Si un événement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ, le temps entre deux réalisations consécutives de l'événement considéré est distribué selon un loi exponentielle de paramètre 1/λ

b) Loi uniforme U([a ;b])

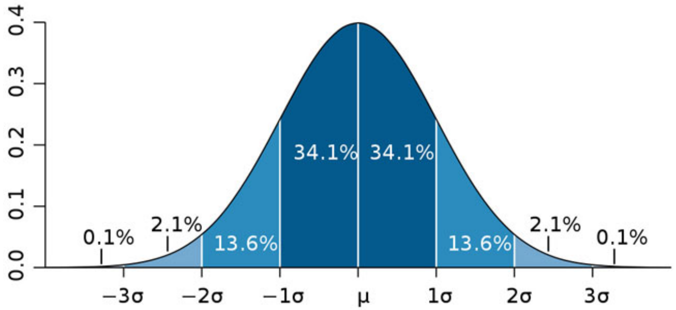
- On utilise une loi Uniforme lorsque entre un point a et un point b, la densité de probabilité est toujours égale entre ces deux points et nulle ailleurs

Ex : lancer un dé, on a la même probabilité pour chacune des faces.

- Fonction de densité : **f(x)= 1/(b-a)**
- **μ= (a+b)/2 σ^2= (b-a)^2/12**

c) Loi normale N(μ,σ)

- La loi Normale est une des principales distributions de probabilité. La courbe représentative de la fonction de densité est appelée **courbe de Gauss**. L'aire sous la courbe délimitée par un intervalle représente la proportion d'individu (ou probabilité de la survenue d'un évènement) dans cet intervalle.
- La densité de probabilité d'une v.a normale de moyenne μ et d'écart type σ est symétrique autour de μ et à **2 points d'inflexions** aux abscisses μ-σ et μ+σ



- **Valeurs limites importantes à savoir**
  - ✓ il y a 10 chances sur 100 pour que X< μ-1,65σ ou X> μ+1,65σ
  - ✓ il y a 5 chances sur 100 pour que X< μ-1,96σ ou X> μ+1,96σ
  - ✓ il y a 1 chance sur 100 pour que X< μ-2,58σ ou X>μ+2,58σ
  - ✓ il y a 1 chance sur 1000 pour que X< μ-3,30σ ou X> μ+3,30σ

d) Loi Normale centré réduite N(0;1)

- On appelle **loi normale centrée réduite** la loi normale de **moyenne 0** et de **variance 1**. Une variable suivant une loi normale centrée réduite est notée Z

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Ex : Pour être mannequin féminin, la taille minimale est de 175 cm. Si la taille moyenne des femmes françaises est de 165 cm, et qu'elle à un écart type de 4 cm, alors quel est le pourcentage de femmes ne pouvant être mannequin, à 5% près ?

On cherche P(X≤ 175), donc X suit une loi normale N(165 ;4). On va passer cette loi normale en loi centré réduite N(0 ;1).

Z= 2,5. Donc, on cherche P(Z≤ 2,5) dans la table de la loi normale centré réduite. On trouve 0,9938, c'est à dire 99,38% des femmes françaises ne peuvent pas être mannequin car elles sont trop petites.

e) Approximations

- **Loi Binomiale → loi de Poisson**
  $n > 50$
  $p \leq 0,10$
  $np < 5$

  $B(n,p) \rightarrow P(\lambda = np)$

- **Loi Binomiale → Loi Normale**
  $np \geq 5$
  $nq \geq 5$

  $B(n,p) \rightarrow N(np\ ,\ \sqrt{npq})$

- **Loi de Poisson → Loi Normale**
  $\lambda > 25$

  $P(\lambda) \rightarrow N(\lambda\ ,\ \sqrt{\lambda})$