Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Probabilités conditionnelles

1. Définition

On parle de probabilités conditionnelles lorsqu'on recherche la probabilité qu'un événement <u>**A se réalise SACHANT que B est réalisé**</u>.
On note P(A/B) ou $P_B(A)$ qui se lie « **Probabilité de A sachant B ».**

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Ex : Un groupe de 10 personnes avec 5 filles et 5 garçons, les 5 filles et un garçon ont les cheveux longs les autres des cheveux courts, je prends une personne au hasard.
Si je note A : « Choisir une fille » et B : « Choisir quelqu'un avec des cheveux longs ». Alors la probabilité d'avoir choisi une fille sachant que j'ai choisi quelqu'un avec les cheveux longs est : ***P(A/B) = P(A∩B)/P(B) = 5/6****.*
(5 personnes sont des filles avec les cheveux longs et 6 personnes ont les cheveux longs).

2. Théorème de la multiplication

On sait que : **P(A/B) = P(A∩B) / P(B)** et **P(B/A) = P(B∩A) / P(A)**

P(A∩B) = P(B∩A)

On peut en déduire :

P(A/B) x P(B) = P(B/A) x P(A)

Ce théorème servira de base au théorème de Bayes.

II. Diagramme en arbre

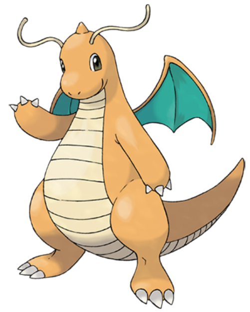
On utilise un diagramme en arbre lorsque certaines conditions sont réunies :

- Présence d'une **séquence fini d'expériences** avec pour chacune un **nombre fini de résultats possibles.**
- Les résultats possibles de chaque expérience dépendent de l'expérience précédente → **Probabilité conditionnelles**.

L'utilisation de l'arbre permet une visualisation rapide des possibilités et un calcul facile de la probabilité de chaque événement final, **3 règles sont à retenir :**

- 1. La probabilité qu'un chemin particulier de l'arbre se réalise est, d'après le théorème de la multiplication, **le produit des probabilités de chaque branche du chemin.**
- 2. Les chemins **s'excluent mutuellement.**
- 3. **La somme de toutes les probabilités finales obtenues doit être de 1.**

La somme des probabilités des branches d'un même nœud doit également être égale à 1.



III. Formule et théorème de Bayes

1. Formule de Bayes

Théorème de la multiplication :
$P(A\cap B) = P(B\cap A) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$

On en déduit la **formule de Bayes :**

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)*P(B/A)}{P(B)} \; ; \; P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)*P(A/B)}{P(A)}$$

2. Théorème de Bayes

Si on fait une **partition d'un ensemble Ω** avec deux événements A_1 et A_2 et si B est un événement aléatoire : $P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2)$

Théorème de la multiplication : $P(B) = P(B/A_1) \times P(A_1) + P(B/A_2) \times P(A_2)$

Formule de Bayes : $P(A_1/B) = \frac{P(A1)*P(B/A1)}{P(B)}$; $P(A_2/B) = \frac{P(A2)*P(B/A2)}{P(B)}$

Théorème de Bayes : $P(A_1/B) = \frac{P(A1)*P(B/A1)}{P(B/A1)*P(A1) + P(B/A2)*P(A2)}$

Le théorème de Bayes est utilisé en médecine pour connaître la probabilité qu'un patient ait une certaine maladie (A_1 ou A_2) sachant qu'il présente un certain symptôme (B) .

IV. Indépendance en probabilité

1. Définition

On parle d'évènements indépendants lorsque la survenue de l'événement A n'influe pas sur la survenue de l'événement B → **$P(A/B) = P(A)$ et $P(B/A) = P(B)$**

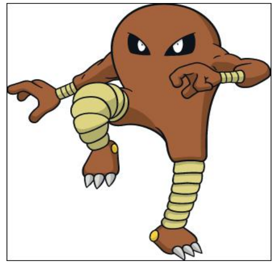
Or : $P(A\cap B) = P(A/B) \times P(B)$ Donc : **$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$.**

2. Cas particuliers

❖ **Inclusion :**

Si un événement **B inclue un événement A alors ceux-ci ne sont pas indépendants.** En effet, si B inclus A :

- **$P(A\cap B) = P(A)$**
- **$P(A/B) = P(A) / P(B) \neq P(A)$**
- **$P(B/A) = P(A) / P(A) = 1 \neq P(B)$**



❖ **Evénements disjoints :**

De la même manière **deux événements disjoints ne sont pas indépendants**, si A est disjoint de B alors :

- **$P(A\cap B) = 0$**
- **$P(A/B) = P(B/A) = 0$**