

UE 4



PROBABILITES



Lois de probabilités Variables aléatoires

By Chewbacca

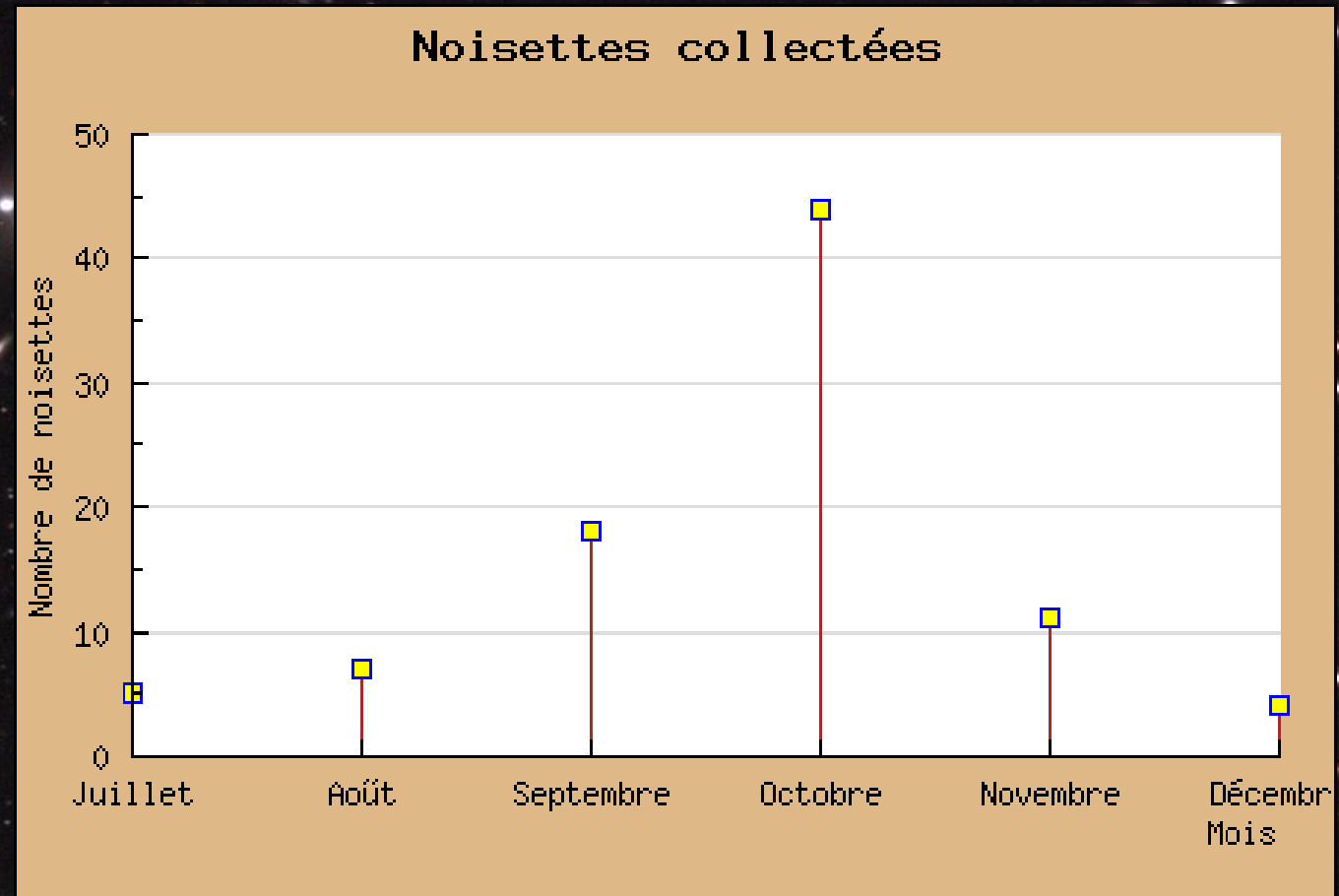
Variable aléatoire discrète:

- 1) **Fonction de variable**
- 2) **Espérance**
- 3) **Variance et écart type**
- 4) **Fonctions de répartition et de distribution**
- 5) **Lois de probabilité**

Variable aléatoire discrète: Epreuve dont le résultat est compris dans un ensemble fini ou infini dénombrable.

Représentations des variables aléatoires discrètes: tableau ou diagramme en bâton

x_1	x_2	...	x_n
p_1	p_2	...	p_n



1) Fonction de variable

$Y=g(X)$ = « Y est fonction de X ».

2) Espérance $E(X)$ ou moyenne μ

L'espérance: Tendance centrale de la variable aléatoire et il s'agit d'un indicateur de position sur la distribution de probabilité de X.

$$\mathbf{E(X) = \mu = \sum (x_i p_i)}$$

Moyenne = μ = Valeur moyenne des résultats de l'épreuve

Moyenne de $X = \mu$

Moyenne de X^2 est différente de μ^2

Moyenne de $\frac{1}{X}$ est différente de $\frac{1}{\mu}$

-Théorèmes de l'espérance:

$$\mathbf{E(X+k) = E(X) + k}$$

$$\mathbf{E(kX) = k E(X)}$$

$$\mathbf{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$$

-

A deep space photograph of a galaxy cluster, likely the Coma Cluster, showing a vast field of galaxies and stars. The galaxies are of various shapes and sizes, including spiral, elliptical, and irregular forms. The stars are scattered throughout the field, with some appearing as bright, multi-pointed sources. The background is a dark, starry field.

3) Variance et écart type

- **La variance : Indicateur de dispersion**

La variance est noté σ^2 ou $\text{Var}(X)$,:

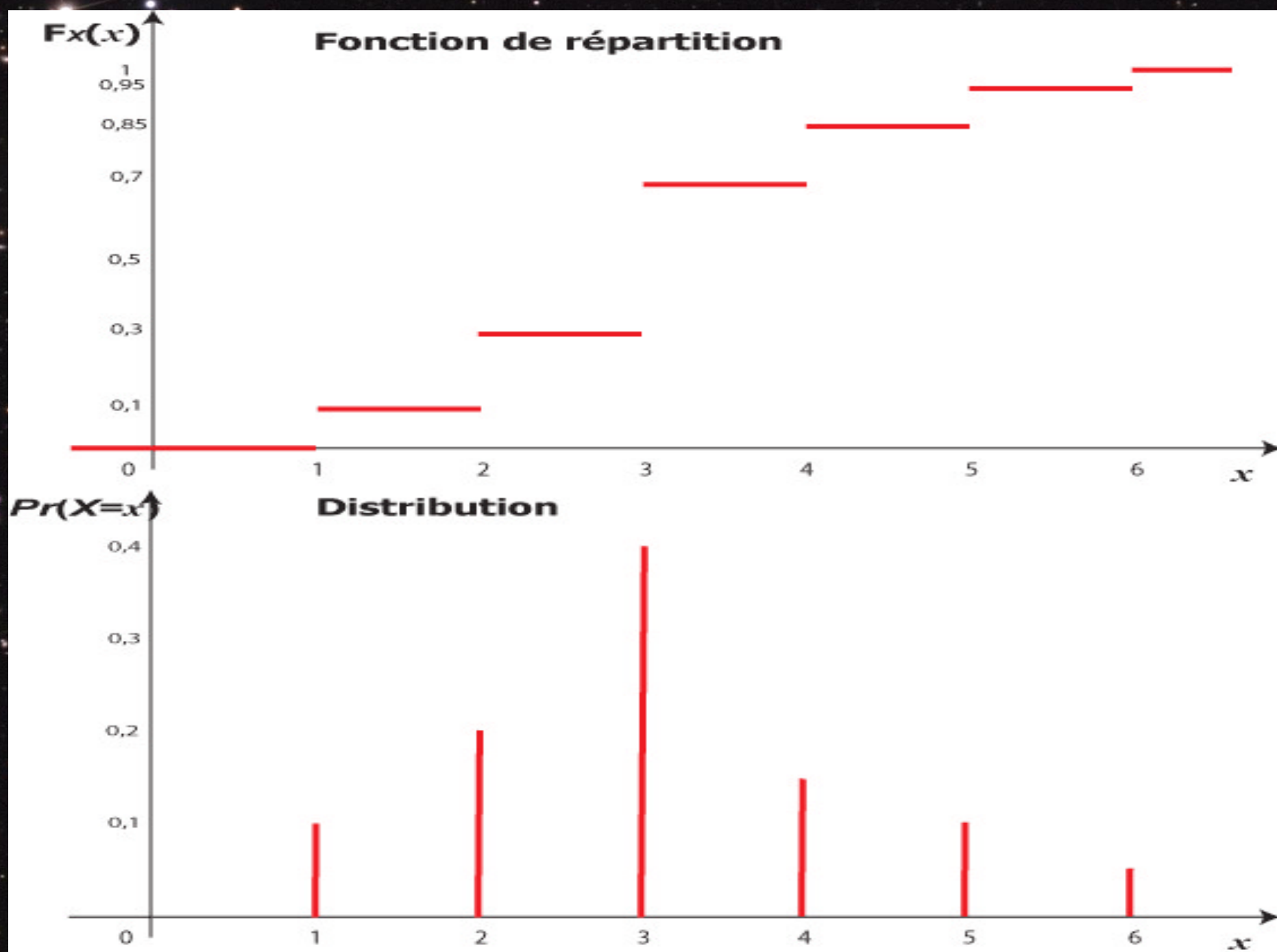
$$\sigma^2 = \mathbf{E}((X-\mu)^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mu^2$$

On l'écrit aussi : $\sigma^2 = \sum p_i * (x_i - \mu)^2$

- **L'écart type σ de la distribution est la racine carrée de la variance.**

The background of the slide is a rich field of galaxies, likely from a deep-field survey like the Hubble Ultra-Deep Field. It features a dense population of galaxies in various stages of evolution, including bright, nearby galaxies and numerous faint, distant galaxies. The galaxies exhibit a wide variety of shapes and colors, from blue and purple to yellow and red, indicating different stellar populations and redshifts. The overall appearance is a complex, multi-colored mosaic of cosmic structures.

4) Fonctions de répartition et de distribution



5) Lois de probabilités discrètes



❖ **Loi de Bernoulli $B(p)$**

$$P(X = k) = p^k(1 - p)^{1-k}$$

- **Moyenne : $\mu = p$**
- **Variance : $\sigma^2 = p(1-p) = pq$**

QCM

Vous avez 1min!

En France, la « navette » Air-France permettant de se déplacer entre Nice et Paris est généralement en retard une fois sur vingt-cinq. Sachant que j'ai un rendez-vous tout suite après mon vol, un éventuel retard me ferait rater mon rendez-vous. Quelle est la probabilité que j'arrive à l'heure à ce rendez-vous?

- A.0,04 B.0,96 C.0,038 D.0,4
E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse B!!!!

- $P(X = 0) = 0,04^0(0,96)^1$

The background is a dark, starry night sky. A faint grid of white lines is overlaid on the stars. The text "Loi Binomiale B(n;p)" is centered in a bold, yellow, serif font. The stars vary in brightness and color, with some appearing as bright white points and others as faint, distant galaxies or nebulae.

Loi Binomiale $B(n;p)$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

- **La moyenne s'écrit : $\mu = np$**
- **La variance s'écrit : $\sigma^2 = np(1-p)$**

QCM

Vous avez 1min30

Un laboratoire pharmaceutique veut tester son nouveau médicament contre la gueule de bois. En générale 90% des individus essayant ce médicament un lendemain de soirée bien arrosée. Le laboratoire sélectionne donc un échantillon de la population pour faire son étude clinique. On réalise ce test 3 fois chez le même individus, de façon totalement indépendante pour chaque réalisation. Quelle est la probabilité que le médicament soit efficace 2 fois lors de nos tests chez un individu?

- A. 0,027
- B. 0,081
- C. 0,24
- D. On utilise une loi binomiale $B(2 ; 0,9)$
- E. Toutes les réponses sont fausses

Réponse C!!

Loi binomiale ou loi hypergéométrique ?

Pour le savoir, il faut calculer le taux de sondage n/N

Si $n/N \leq 0,10$ on doit donc appliquer la loi binomiale pour l'étude de l'échantillon

Si $n/N \geq 0,10$ on doit donc appliquer la loi hypergéométrique



❖ **Loi hypergéométrique $H(N;D;n)$**

$$P(X = k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

Moyenne : $\mu = \frac{nD}{N} = np$

Variance : $\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$ et $\sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) npq$



QCM

Vous avez 1min30

Une équipe de recherche scientifique fait une commande de 20 microscope binoculaires à l'entreprise Delta. Cette entreprise a vu apparaître un problème dans son processus de fabrication. Sur 50 microscope fabriqué, il y en a 5 défectueux. Mais elle décide tout de même d'envoyer un lot de 20 microscopes aux chercheurs au risque d'envoyer les défectueux. Quelle est la probabilité que les chercheurs reçoivent au moins un microscope défectueux?

A. $1 - \frac{C_5^5 \times C_{45}^{15}}{C_{50}^{20}}$ B. $1 - \frac{C_5^0 \times C_{45}^{20}}{C_{50}^{20}}$ C. $\frac{C_5^0 \times C_{45}^{20}}{C_{50}^{20}}$ D. $1 - \frac{C_0^5 \times C_{20}^{45}}{C_{20}^{50}}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse B

A deep field image of the universe, showing a vast field of galaxies and stars against a black background. The galaxies are scattered across the frame, with some appearing as bright, distinct shapes and others as faint, diffuse clouds. The stars are numerous and vary in brightness, creating a dense field of light points.

❖ **Loi géométrique $G(p)$**

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}$$

- $\mu = \frac{1}{p}$
- $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$



QCM

Dans une usine de fabrication de stéthoscope, un nouveau système de contrôle très performant a été installé. Ce système évalue le fonctionnement de chaque stéthoscope au fur et à mesure de leur création. En cas de dysfonctionnement d'un stéthoscope, ce système éteint la machine de production correspondante, permettant par la suite de corriger le problème. Il y a 2 chances sur 10 qu'on trouve un problème sur l'un des stéthoscopes. Quelle est la probabilité que la machine s'arrête au bout de 4 stéthoscopes produits?

- A. $64/625$ B. $64/125$ C. $64/25$ D. La réponse D
E. Toutes les réponses sont fausses

Réponse A

The background of the image is a deep space scene filled with numerous stars and galaxies. The stars vary in brightness and color, with some appearing as bright white points and others as fainter, reddish or bluish dots. Several galaxies are visible, including spiral galaxies with distinct arms and elliptical galaxies. The overall appearance is that of a vast, multi-colored stellar population.

Loi de Poisson $P(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- $\mu = \lambda$

QCM

Dans le service de chirurgie digestive de la clinique St.Georges, on retrouve en moyenne 2 opérations par jour. Au moment de la réunion de fin de semaine, les chirurgiens décide de faire des prévisions pour la semaine à venir. Ils s'intéressent à la probabilité d'avoir 10 opérations pendant la semaine suivante. Quelle est cette probabilité?

A. $\frac{2^{10}e^{-2}}{10!}$ B. $\frac{10^2e^{-10}}{2!}$ C. $\frac{14^{10}e^{-14}}{10!}$ D. $\frac{7^2e^{-7}}{2!}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse C

A deep space photograph showing a vast field of stars and galaxies. The stars are of various colors, including white, yellow, and blue, and many have prominent diffraction spikes. Several galaxies are visible, including a prominent spiral galaxy in the lower right and a barred spiral galaxy in the lower center. The background is a dark, blackish space filled with distant light sources.

Variable aléatoire continue

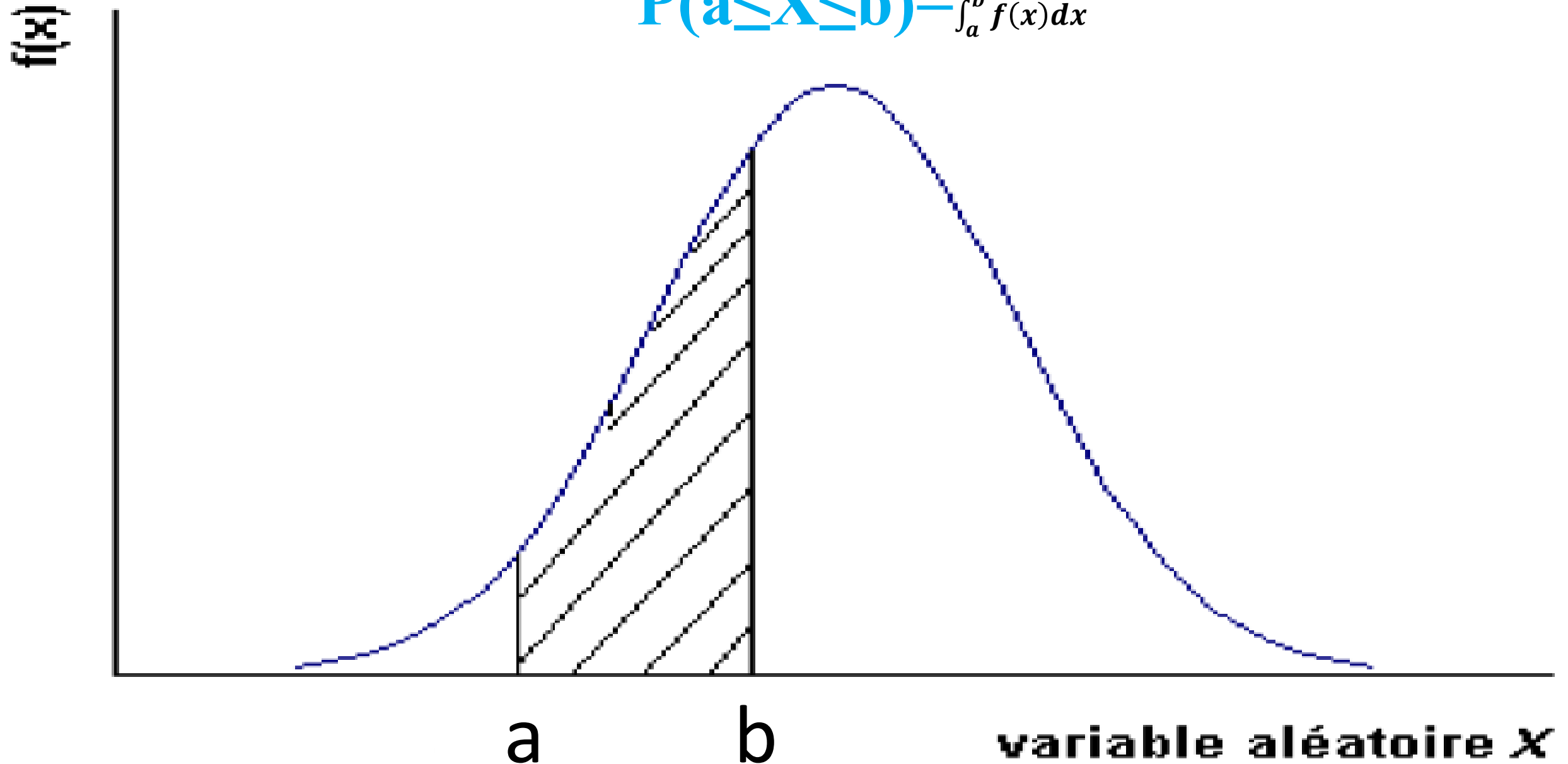
Variable aléatoire continue: La variable se définit sur un ensemble indénombrable.

Particularités des v-a continues:

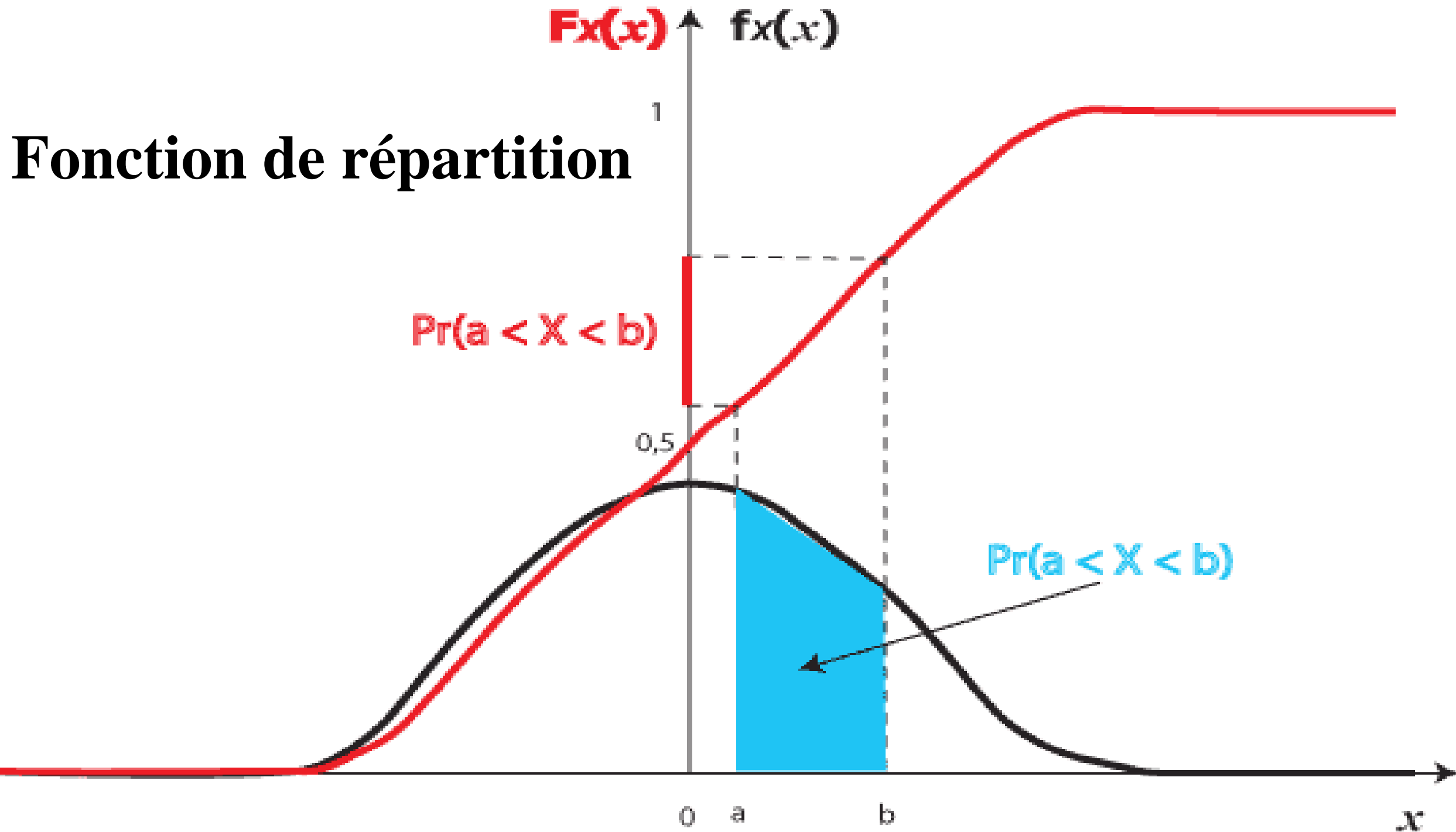
$$P(X=k)=0$$

fonction f de densité de probabilité

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$



Fonction de répartition



The background of the image is a vast field of galaxies and stars. It features a variety of galaxy types, including spiral galaxies, elliptical galaxies, and irregular galaxies, scattered across a dark, star-filled space. The stars are of different colors and sizes, creating a rich, multi-colored stellar population. The overall appearance is that of a rich, multi-colored stellar population, likely from a galaxy cluster or a similar astronomical environment.

Variable centrée réduite

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Moyenne = $E(Z) = 0$

Variance = $\sigma^2 = 1$



Loi de probabilités continues

The background of the slide is a deep space image featuring a dense field of stars and several galaxies. The stars vary in brightness and color, with some appearing as bright white points and others as fainter, reddish or yellowish dots. Several galaxies are visible, including a prominent spiral galaxy on the left side and a more irregular, possibly interacting galaxy in the center. The overall scene is a rich, multi-colored stellar population against a dark cosmic backdrop.

A deep space photograph of a galaxy cluster, likely the Coma Cluster, showing numerous galaxies of various shapes and sizes, along with many bright stars. The background is dark, and the galaxies are scattered across the field of view.

❖ **Loi exponentielle $E(\lambda)$**

- **Fonction de densité** : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

- $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

- $P(X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$

- **Espérance**= $\mu = \frac{1}{\lambda}$

Variance= $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$



QCM

Une entreprise de fabrication de sextoys invente une nouvelle batterie autonome très puissante dans leur toute nouvelle « sulfateuse ». Cette batterie très performante suscite des questionnements quant à son autonomie. Son taux de défaillance est égal à 2. Quelle est la probabilité que la batterie meurt avant 3 ans?

A. $1 - e^{-2}$

B. $1 - e^{-3}$

C. e^{-3}

D. $1 - e^{-6}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse D

Lien entre la loi de Poisson et la loi exponentielle:

Si un évènement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ , alors le temps qui s'écoulera entre deux réalisations consécutives de l'évènement est distribué selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\lambda}$. Le temps qui s'écoule entre deux réalisations est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

QCM

Aux urgences de la Fontonne à Antibes (rpz la cité), après une nuit très agitée en raison des vacances, un afflux anormal de personnes arrive dans les urgences pour diverses raisons. Le nombre de personnes qui consultent aux urgences se distribue selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda=2$ visites toutes les 20 minutes. Combien de temps en heures s'écoulera-t-il entre deux visites?

- A. 0,33 B. 0,17 C. $0,1 \cdot 10^2$ D. $0,2 \cdot 10^2$
E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse B

A deep space image showing a vast field of galaxies and stars. The galaxies are scattered across the frame, some appearing as bright, diffuse clouds and others as more compact, structured objects. The stars are numerous, appearing as small, bright points of light, some with prominent diffraction spikes. The overall color palette is dominated by dark blues and blacks, with highlights in white, yellow, and orange from the stars and galaxies.

❖ **Loi uniforme**

- **$f(x) = 1/((x-y))$**

- **$P(a \leq X \leq b) = \frac{b-a}{x-y}$**

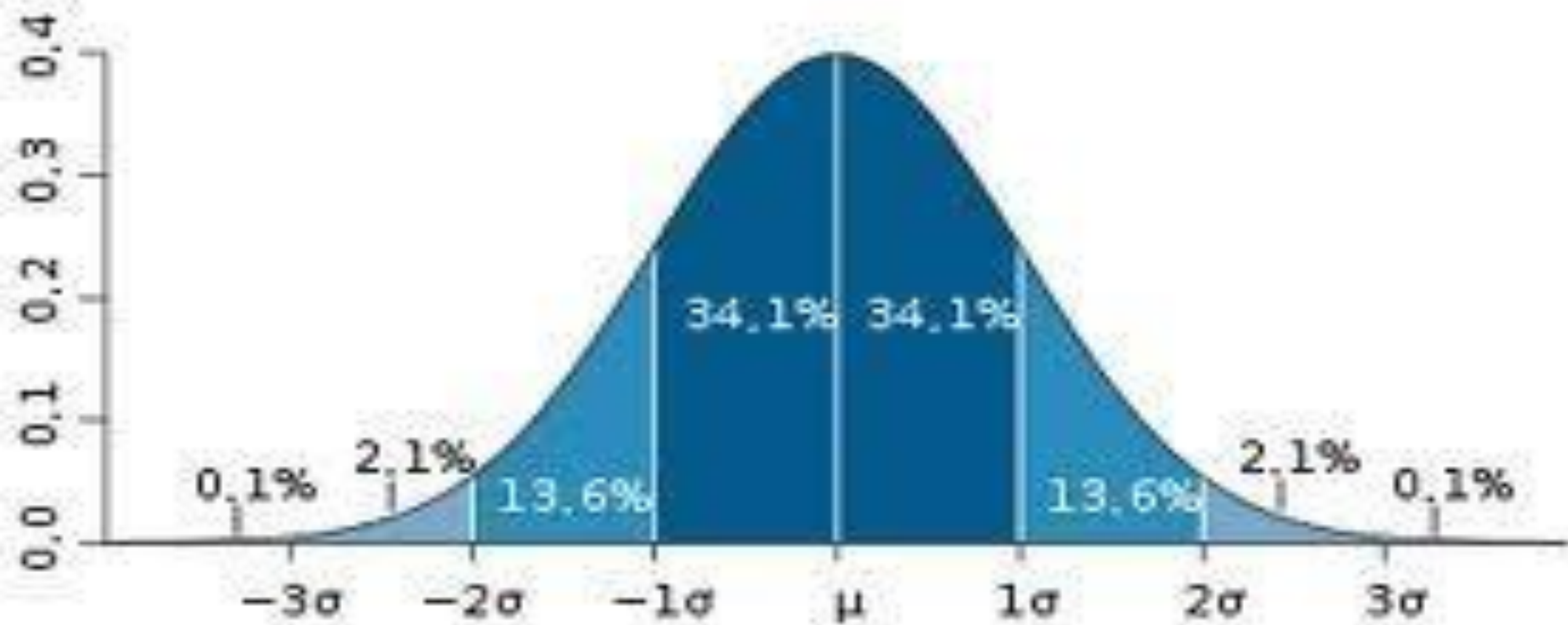
- **Moyenne = $\mu = \frac{x+y}{2}$**

- **Variance = $\sigma = \frac{(x-y)^2}{12}$**



A deep space photograph showing a vast field of stars and galaxies. The stars are of various colors, including white, yellow, and blue, and many have prominent diffraction spikes. Several galaxies are visible, including a prominent red spiral galaxy in the lower right, a blue elliptical galaxy in the lower center, and a yellowish elliptical galaxy in the upper left. The background is a dark, blackish space filled with countless distant stars.

Loi normale $N(\mu ; \sigma)$



Soit la loi normale de paramètres $(\mu ; \sigma)$, il faut connaître certaines valeurs :

- $P(X < \mu - 1,65\sigma) = 5\%$ et $P(\mu + 1,65\sigma < X) = 5\%$

- $P(X < \mu - 1,96\sigma) = 2,5\%$ et $P(\mu + 1,96\sigma < X) = 2,5\%$

- $P(X < \mu - 2,58\sigma) = 0,5\%$ et $P(\mu + 2,58\sigma < X) = 0,5\%$

- $P(X < \mu - 3,30\sigma) = 0,05\%$ et $P(\mu + 3,30\sigma < X) = 0,05\%$





- **Loi normale centrée réduite : $N(0 ; 1)$**

-

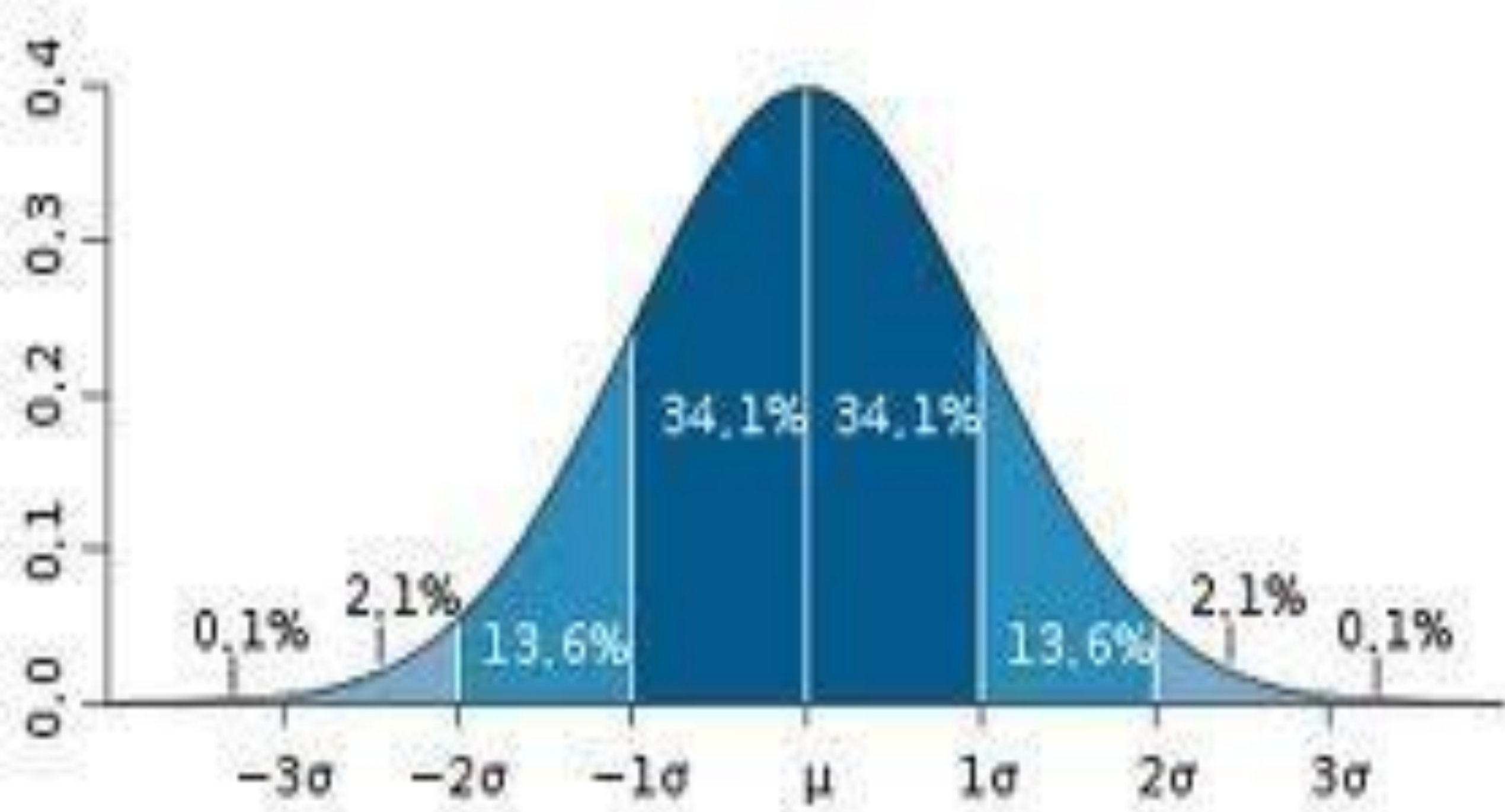
- **La loi Normale centrée réduite a pour paramètres :
moyenne = 0 et variance = 1**

- $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$



Table de la loi normale centrée réduite: $P(Z \leq d)$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986



Approximations

The image features a dark, star-filled sky as a background. The stars vary in brightness and color, with some appearing as bright white points and others as fainter, warmer-toned dots. A few larger, more complex structures resembling galaxies or nebulae are scattered across the field. The word "Approximations" is centered in a bold, yellow, serif font.

**Soit un phénomène qui suit une loi Binomiale
 $B(n ; p)$**

Si : $n > 50$, $p \leq 0,1$ et $np < 5$

**Alors la loi de Poisson permet d'approximer la loi
Binomiale de la manière suivante :**

$B(n,p) \rightarrow P(\lambda = np)$

**Soit un phénomène qui suit une loi Binomiale
 $B(n ; p)$**

Si $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, (avec $q=1-p$)

**Alors la loi Normale permet d'approximer la loi
Binomiale de la manière suivante :**

$B(n ; p) \rightarrow N(np ; \sqrt{npq})$

**Soit un phénomène qui suit une loi de
Poisson $P(\lambda)$**

Si $\lambda > 25$

**Alors la loi Normale permet d'approximer la
loi de Poisson de la manière suivante :**

$$P(\lambda) \rightarrow N(\lambda ; \sqrt{\lambda})$$

QCM

On demande à un chirurgien en urologie de réaliser un « allongement de chybre » (terme non scientifique) 10 fois d'affilée de manière totalement indépendante. La probabilité d'avoir un pénis allongé de plus de 3cm est de 0,5. La probabilité d'avoir 5 bites allongées de plus de 3cm est donnée par quelle loi?

- A. Elle peut être approximer par la loi normale $N(5 ; 5)$
- B. Elle peut être approximer par la loi normale $N(5 ; 25)$
- C. Elle peut être approximer par la loi de poisson $P(5)$
- D. Elle peut être approximer par la loi de poisson $P(\sqrt{5})$
- E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse A

C'est la fin!!!!

BB-8

