UE 4

PROBABILITES

Lois de probabilités
Variables aléatoires

By Chewbacca

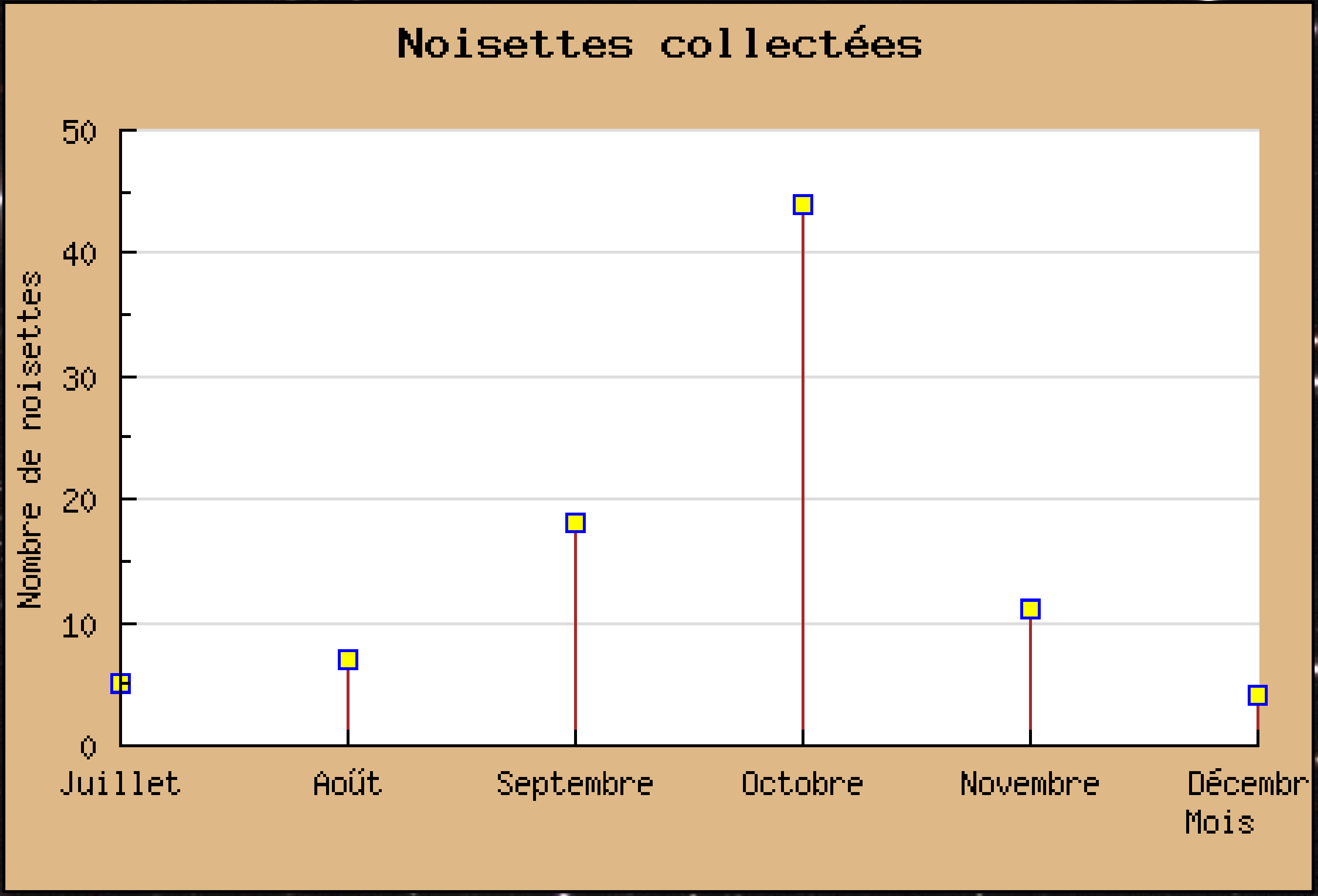
Variable aléatoire discrète:

1) Fonction de variable
2) Espérance
3) Variance et écart type
4) Fontions de répartition et de distribution
5) Lois de probabilité

<u>Variable aléatoire discrète:</u> Epreuve dont le résultat est compris dans un ensemble fini ou infini dénombrable.

Représentations des variables aléatoires discrètes: tableau ou diagramme en bâton

x1	x2	...	xn
p1	p2	...	pn



1) <u>Fonction de variable</u>

Y=g(X) = « Y est fonction de X ».

2) Espérance E(X) ou moyenne μ

<u>L’espérance</u>: Tendance centrale de la variable aléatoire et il s’agit d’un indicateur de position sur la distribution de probabilité de X.

$E(X) = \mu = \sum (x_i p_i)$

Moyenne= μ= Valeur moyenne des résultats de l'épreuve

Moyenne de $X = \mu$

Moyenne de X^2 est différente de μ^2

Moyenne de $\frac{1}{X}$ est différente de $\frac{1}{\mu}$

-Théorèmes de l'espérance:

$$E(X+k) = E(X) + k$$

$$E(kX) = k\,E(X)$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

-

3) Variance et écart type

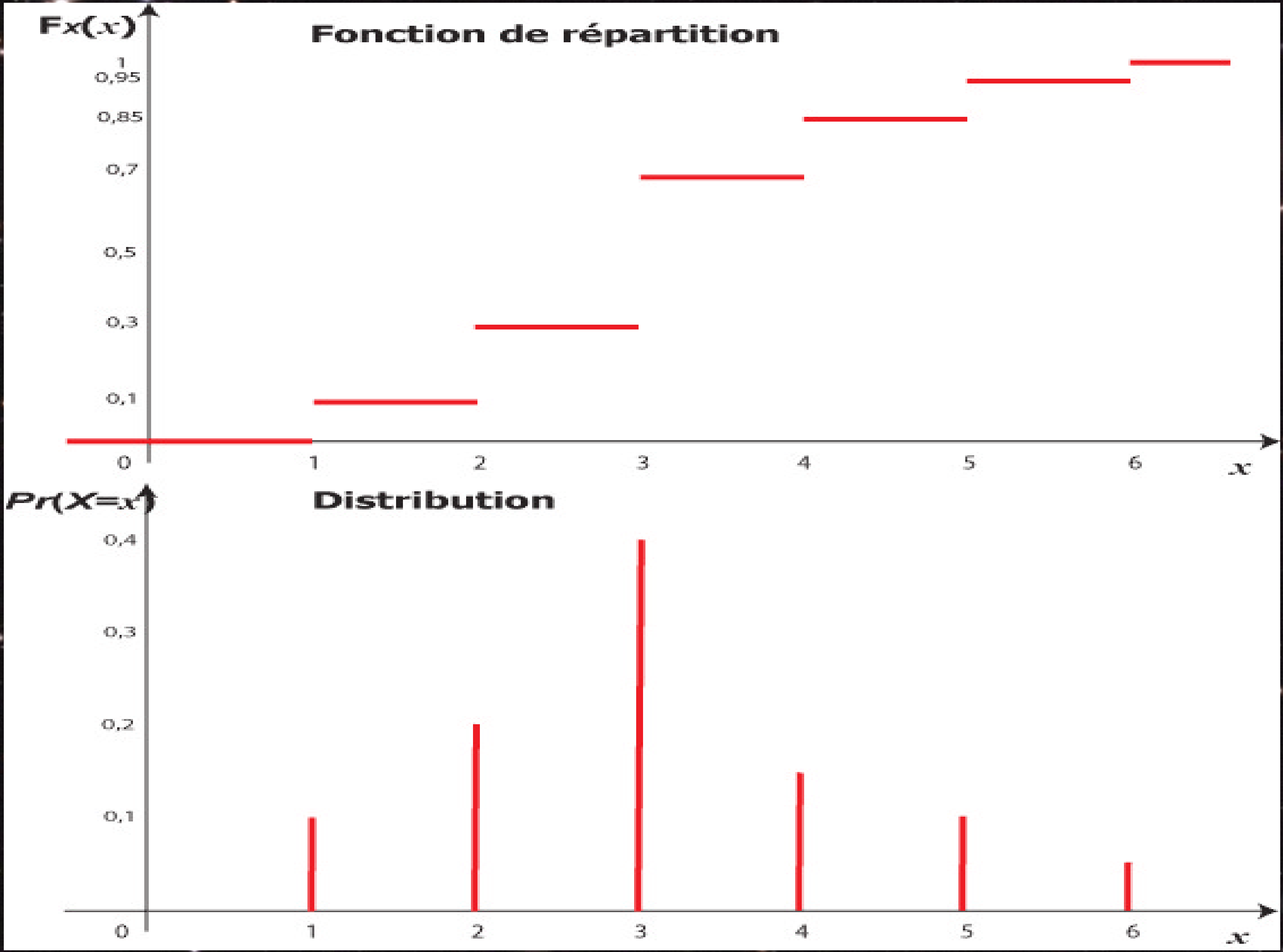
- **<u>La variance :</u> Indicateur de dispersion**

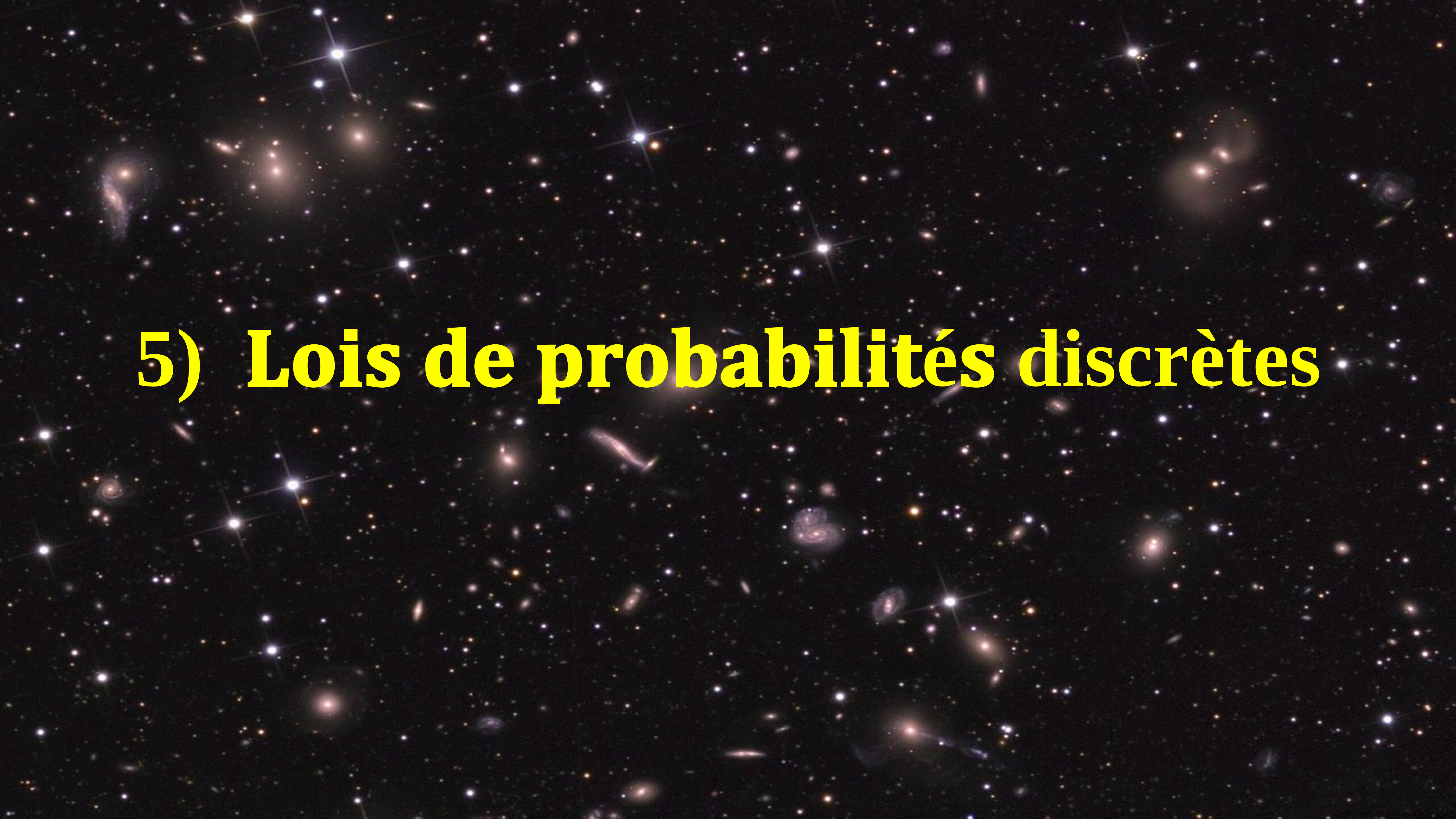
La variance est noté σ^2 ou Var(X),:
$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$

On l'écrit aussi : $\sigma^2 = \sum pi * (xi - \mu)^2$

- **L'écart type σ de la distribution est la racine carrée de la variance.**

4) Fontions de répartition et de distribution


Fx(x)
Fonction de répartition
1
0,95
0,85
0,7
0,5
0,3
0,1
0
1
2
3
4
5
6
x
Pr(X=x)
Distribution
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
6
x



5) Lois de probabilités discrètes

❖ Loi de Bernoulli B(p)

$$\mathbf{P(X = k) = p^{k}(1 - p)^{1-k}}$$

- **Moyenne : $\mu = p$**
- **Variance : $\sigma^2 = p\,(1-p) = pq$**

QCM

Vous avez 1min!

En France, la « navette » Air-France permettant de se déplacer entre Nice et Paris est généralement en retard une fois sur vingt-cinq. Sachant que j'ai un rendez-vous tout suite après mon vol, un éventuel retard me ferait rater mon rendez-vous. Quelle est la probabilité que j'arrive à l'heure à ce rendez-vous?

A.0,04 B.0,96 C.0,038 D.0,4

E. Les réponses A, B, C et D sont fausse

Réponse B!!!!

- $\mathbf{P(X = 0) = 0,04^{0}(0,96)^{1}}$

Loi Binomiale B(n;p)

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

- La moyenne s'écrit : $\mu = np$
- La variance s'écrit: $\sigma^2 = np(1-p)$

QCM
Vous avez 1min30

Un laboratoire pharmaceutique veut tester son nouveau médicament contre la gueule de bois. En générale 90% des individus essayant ce médicament un lendemain de soirée bien arrosée. Le laboratoire sélectionne donc un échantillon de la population pour faire son étude clinique. On réalise ce test 3 fois chez le même individus, de façon totalement indépendante pour chaque réalisation. Quelle est la probabilité que le médicament soit efficace 2 fois lors de nos tests chez un individu?

A. 0,027
B. 0,081
C. 0,24
D. On utilise une loi binomiale B(2 ; 0,9)
E. Toutes les réponses sont fausses

Réponse C!!

Loi binomiale ou loi hypergéométrique ?

Pour le savoir, il faut calculer le taux de sondage n/N

Si n/N $\leq$ 0,10 on doit donc appliquer la loi binomiale pour l'étude de l'échantillon

Si n/N $\geq$ 0,10 on doit donc appliquer la loi hypergéométrique

❖ Loi hypergéométrique H(N;D;n)

$$P(\mathrm{X}=\mathrm{k})=\frac{\mathrm{C_D^k}\times\mathrm{C_{N-D}^{n-k}}}{\mathrm{C_N^n}}$$

Moyenne : μ= $\frac{n\mathrm{D}}{\mathrm{N}}=\mathrm{np}$

Variance : $\sigma^2=\frac{\mathrm{nD}}{\mathrm{N}}\times\frac{\mathrm{N-D}}{\mathrm{N}}\times\frac{\mathrm{N-n}}{\mathrm{N-1}}\quad et\ \sigma^2=\left(\frac{\mathrm{N-n}}{\mathrm{N-1}}\right)\mathrm{npq}$

QCM
Vous avez 1min30

Une équipe de recherche scientifique fait une commande de 20 microscope binoculaires à l’entreprise Delta. Cette entreprise a vu apparaître un problème dans son processus de fabrication. Sur 50 microscope fabriqué, il y en a 5 défectueux. Mais elle décide tout de même d’envoyer un lot de 20 microscopes aux chercheurs au risque d’envoyer les défectueux. Quelle est la probabilité que les chercheurs reçoivent au moins un microscope défectueux?

A. $1-\frac{C_5^5\times C_{45}^{15}}{C_{50}^{20}}$ B. $1-\frac{C_5^0\times C_{45}^{20}}{C_{50}^{20}}$ C. $\frac{C_5^0\times C_{45}^{20}}{C_{50}^{20}}$ D. $1-\frac{C_0^5\times C_{20}^{45}}{C_{20}^{50}}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse B

❖ Loi géométrique G(p)

$$\mathbf{P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}}$$

- $\mu = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}$

- $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1-p}}{\mathbf{p^2}}$

QCM

Dans une usine de fabrication de stéthoscope, un nouveau système de contrôle très performant a été installé. Ce système évalue le fonctionnement de chaque stéthoscope au fur et à mesure de leur création. En cas de dysfonctionnement d'un stéthoscope, ce système éteint la machine de production correspondante, permettant par la suite de corriger le problème. Il y a 2 chances sur 10 qu'on trouve un problème sur l'un des stéthoscopes. Quelle est la probabilité que la machine s'arrête au bout de 4 stéthoscopes produits?

A. 64/625 B. 64/125 C. 64/25 D. La réponse D

E. Toutes les réponses sont fausses

Réponse A

Loi de Poisson $P(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- $\mu = \sigma^2 = \lambda$

QCM

Dans le service de chirurgie digestive de la clinique St.Georges, on retrouve en moyenne 2 opérations par jour. Au moment de la réunion de fin de semaine, les chirurgiens décide de faire des prévisions pour la semaine à venir. Ils s'intéressent à la probabilité d'avoir 10 opérations pendant la semaine suivante. Quelle est cette probabilité?

A. $\frac{\mathbf{2^{10}e^{-2}}}{\mathbf{10}!}$ B. $\frac{\mathbf{10^{2}e^{-10}}}{\mathbf{2}!}$ C. $\frac{\mathbf{14^{10}e^{-14}}}{\mathbf{10}!}$ D. $\frac{\mathbf{7^{2}e^{-7}}}{\mathbf{2}!}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse C

Variable aléatoire continue

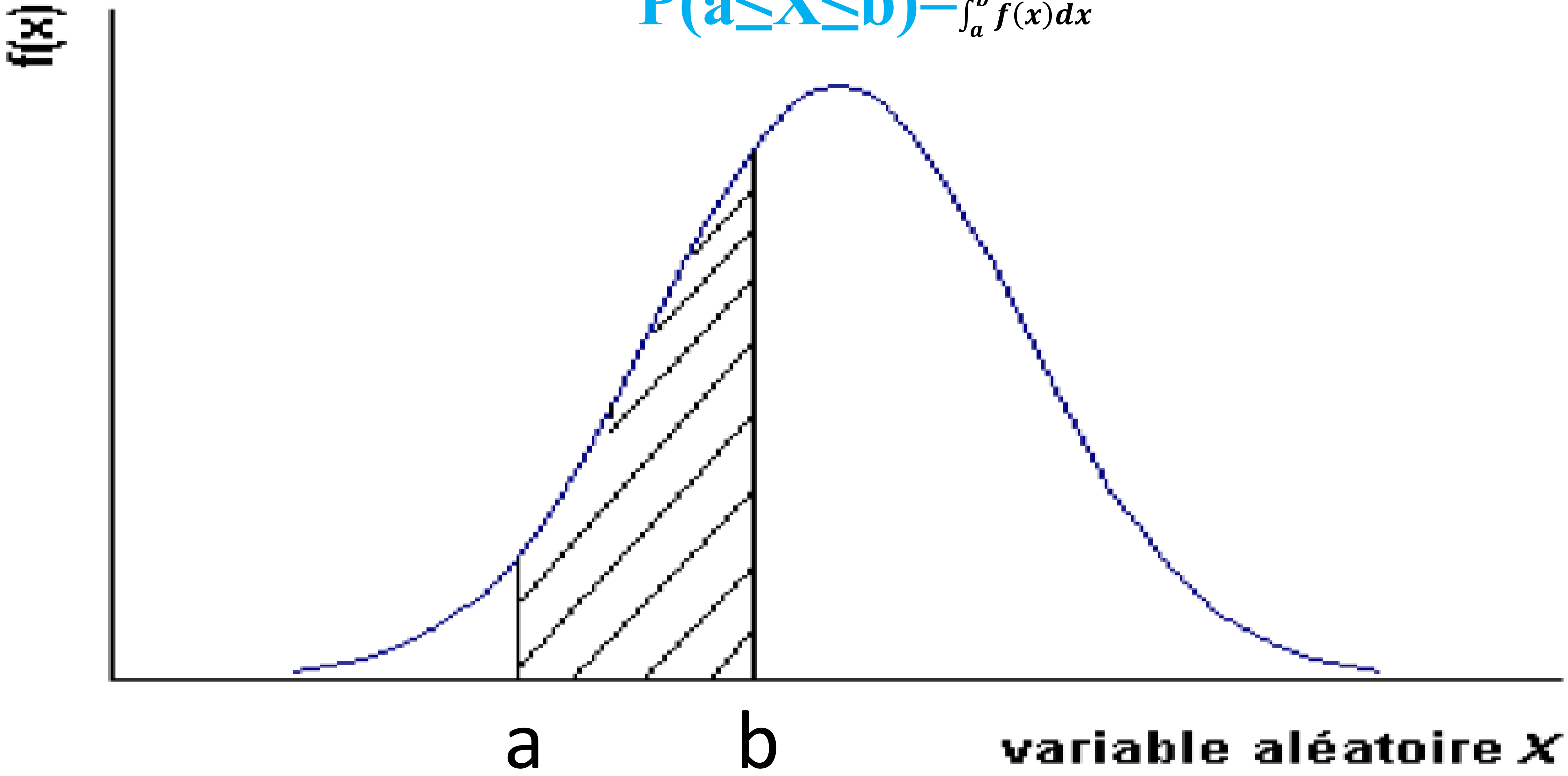
<u>Variaable aléatoire continue</u>: La variable se définit sur un ensemble indénombrable.

<u>Particularités des v-a continues:</u>

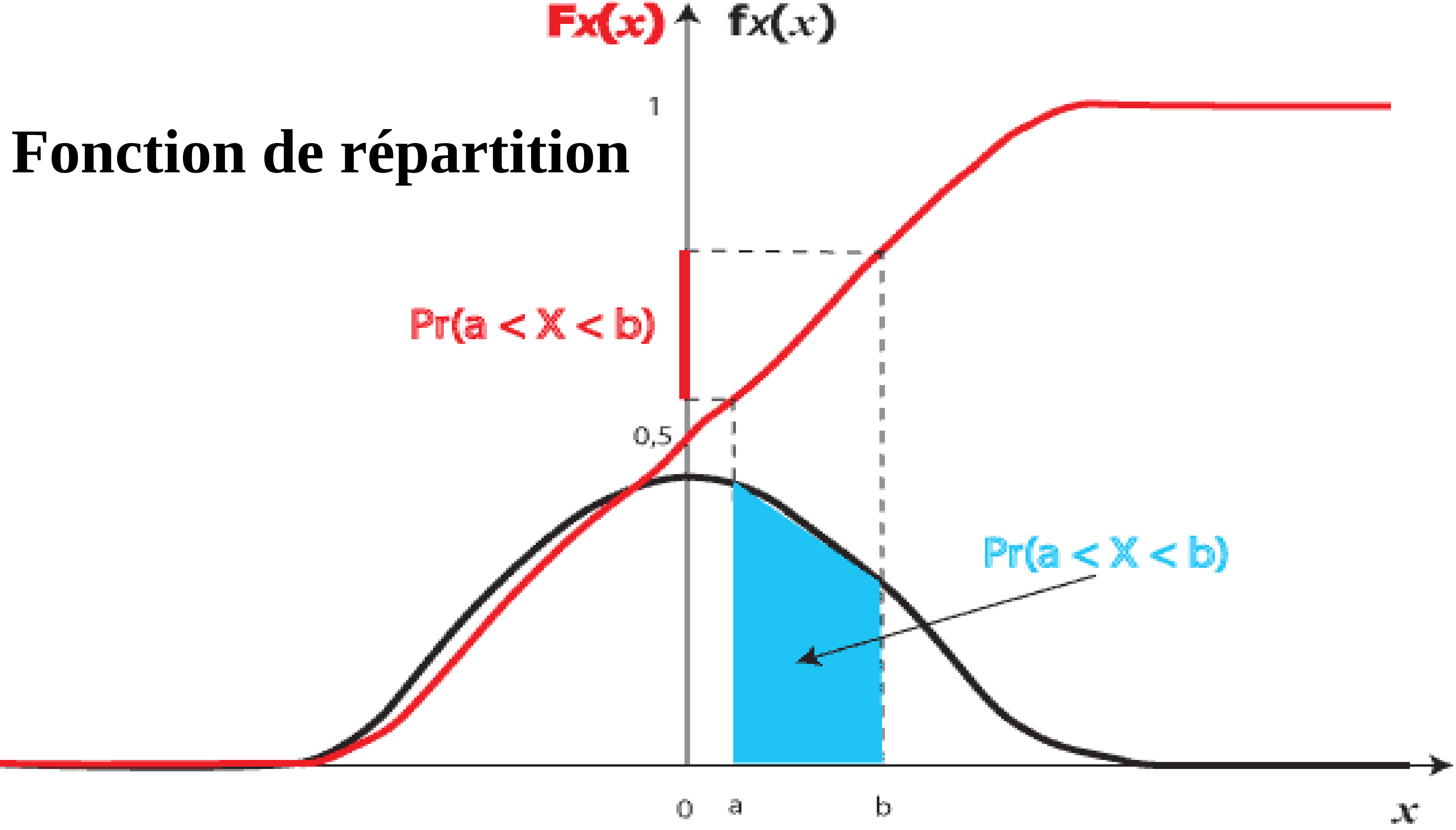
$$P(X=k)=0$$

fonction f de densité de probabilité

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Fonction de répartition



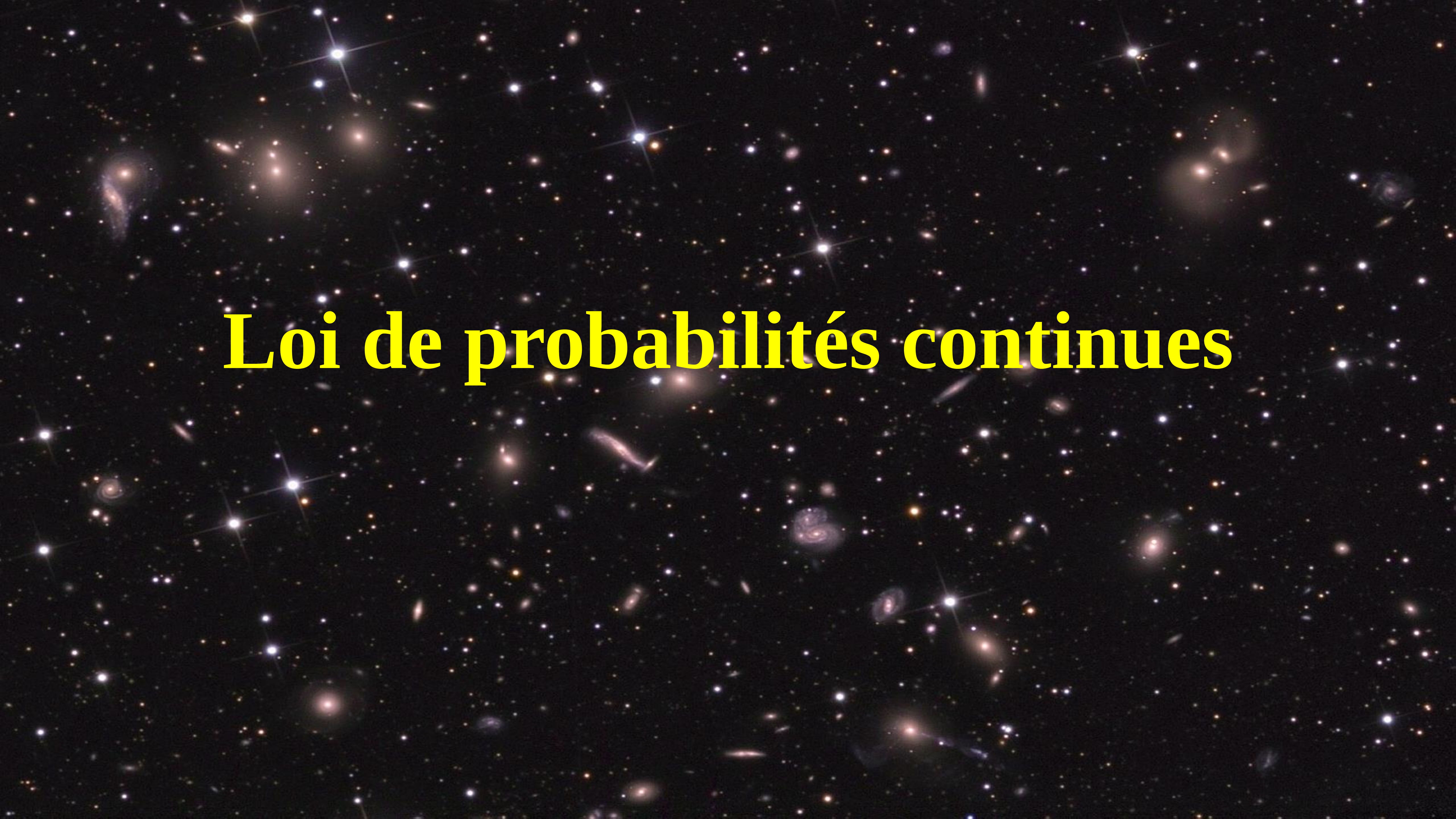
Variable centrée réduite

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Moyenne=E(Z)=0

Variance= σ^2 =1

Loi de probabilités continues



❖ Loi exponentielle E(λ)

- **Fonction de densité :** $\mathbf{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$

- $\mathbf{P(a \le X \le b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}$

- $\mathbf{P(X \le b) = 1 - e^{-\lambda b}}$

- **Espérance=** $\mu = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$ **Variance=** $\boldsymbol{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}^2}$

QCM

Une entreprise de fabrication de sextoys invente une nouvelle batterie autonome très puissante dans leur toute nouvelle « sulfateuse ». Cette batterie très performante suscite des questionnements quant à son autonomie. Son taux de défaillance est égal à 2. Quelle est la probabilité que la batterie meurt avant 3 ans?

A. $\mathbf{1-e^{-2}}$ B. $\mathbf{1-e^{-3}}$ C. $\mathbf{e^{-3}}$ D. $\mathbf{1-e^{-6}}$

E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse D

Lien entre la loi de Poisson et la loi exponentielle:

Si un évènement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ, alors le temps qui s'écoulera entre deux réalisations consécutives de l'évènement est distribué selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\lambda}$. Le temps qui s'écoule entre deux réalisations est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

QCM

Aux urgences de la Fontonne à Antibes (rpz la cité), après une nuit très agitée en raison des vacances, un afflux anormal de personnes arrive dans les urgences pour diverses raison. Le nombre de personnes qui consultent aux urgences se distribue selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda=2$ visites toutes les 20 minutes. Combien de temps en heures s'écoulera t'il entre deux visites?

A. 0,33   B. 0,17   C. $0,1 . 10^2$ D. $0,2 . 10^2$

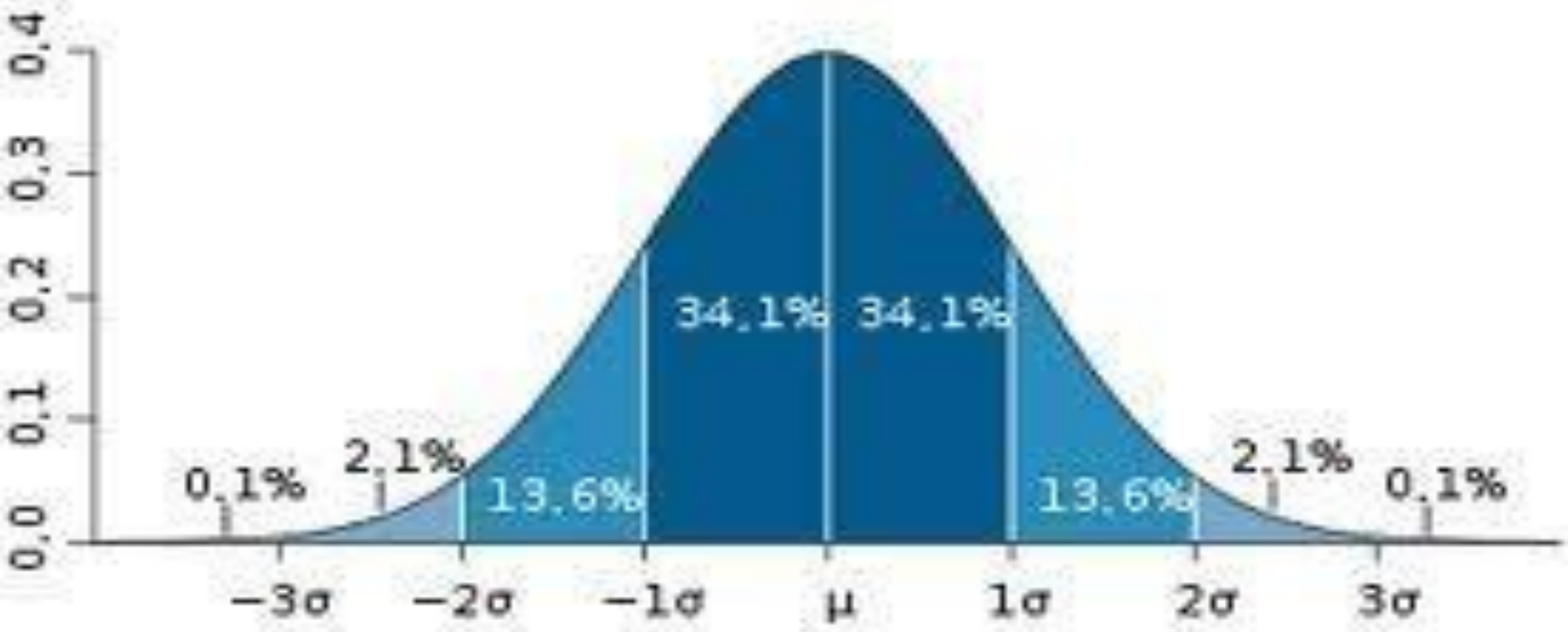
E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse B

❖Loi uniforme

- **f(x)=1/((x-y))**
- $\mathbf{P(a \leq X \leq b) = \frac{b-a}{x-y}}$
- **Moyenne=** $\mu = \frac{\mathbf{x+y}}{\mathbf{2}}$
- **Variance=** $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{(x-y)^2}}{\mathbf{12}}$

Loi normale N(μ ; σ)


0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
34,1%
34,1%
13,6%
13,6%
2,1%
2,1%
0,1%
0,1%
−3σ
−2σ
−1σ
μ
1σ
2σ
3σ

Soit la loi normale de paramètres (μ ; σ), il faut connaître certaines valeurs :

- $P(X < \mu - 1,65\sigma)$=5% et P($\mu + 1,65\sigma < X) = 5\%$

- $P(X < \mu - 1,96\sigma)$=2,5% et P($\mu + 1,96\sigma < X) = 2,5\%$
- $P(X < \mu - 2,58\sigma)$=0,5% et P($\mu + 2,58\sigma < X) = 0,5\%$
- $P(X < \mu - 3,30\sigma)$=0,05% et P($\mu + 3,30\sigma < X) = 0,05\%$

- **Loi normale centrée réduite : N(0 ;1)**

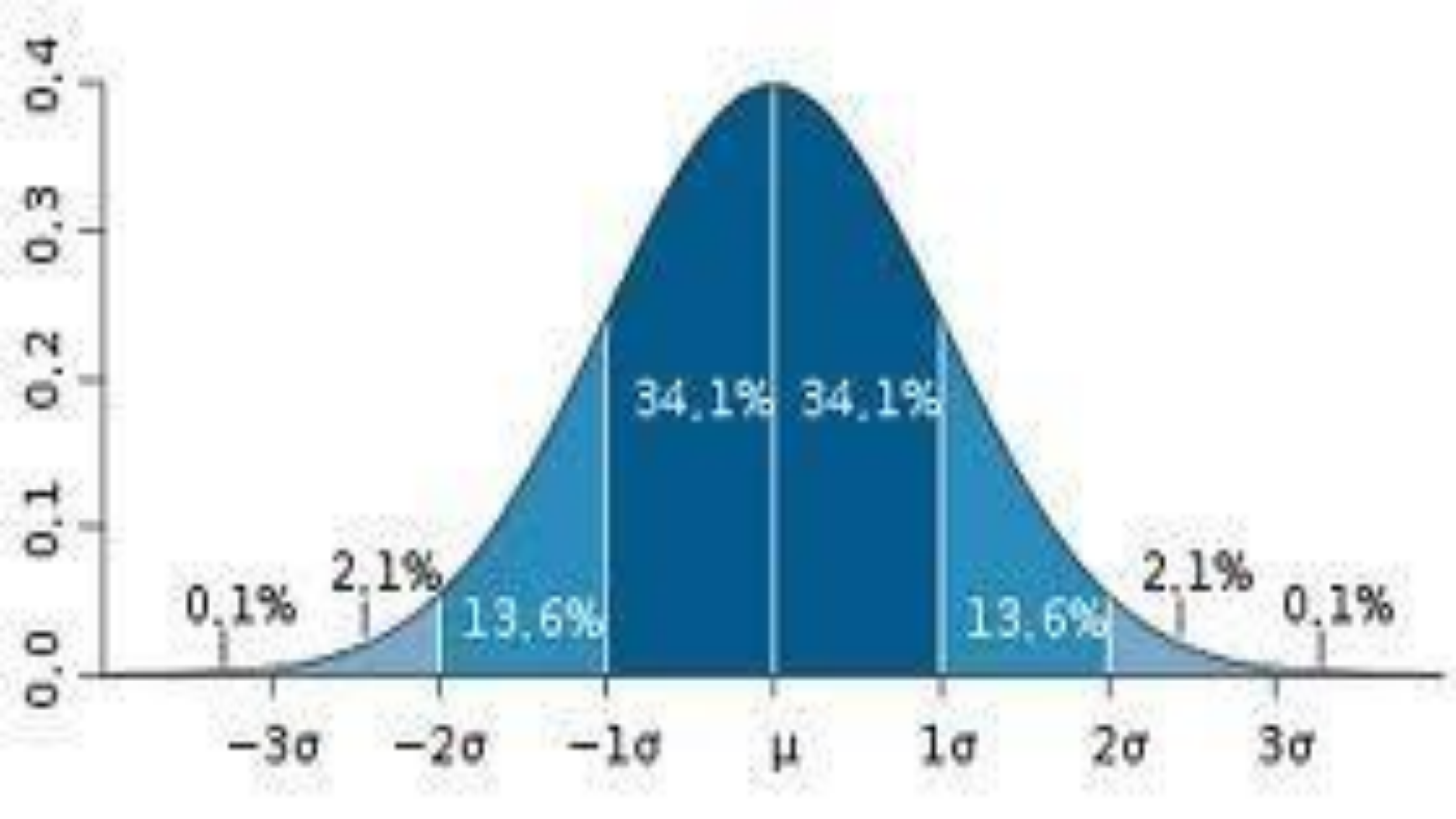
-

- **La loi Normale centrée réduite a pour paramètres : moyenne = 0 et variance = 1**

- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Table de la loi normale centrée réduite: $P(Z \leq t)$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986



0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
34,1%
34,1%
13,6%
13,6%
2,1%
2,1%
0,1%
0,1%
−3σ
−2σ
−1σ
μ
1σ
2σ
3σ

Approximations

Soit un phénomène qui suit une loi Binomiale $B(n ;p)$

Si : $n > 50$, $p \leq 0,1$ et $np < 5$

Alors la loi de Poisson permet d'approximer la loi Binomiale de la manière suivante :

$B(n,p) \rightarrow P(\lambda = np)$

Soit un phénomène qui suit une loi Binomiale B(n ;p)

Si np ≥ 5 et nq ≥ 5, (avec q=1-p)

Alors la loi Normale permet d'approximer la loi Binomiale de la manière suivante :

B(n ;p) → N(np ; $\sqrt{npq}$)

Soit un phénomène qui suit une loi de Poisson P(λ)

Si λ > 25

Alors la loi Normale permet d'approximer la loi de Poisson de la manière suivante :

$$\mathbf{P(\lambda) \rightarrow N(\lambda\ ;\ \sqrt{\lambda}\ )}$$

QCM

On demande à un chirurgien en urologie de réaliser un « allongement de chybre » (terme non scientifique) 10 fois d'affilée de manière totalement indépendante. La probabilité d'avoir un pénis allongé de plus de 3cm est de 0,5. La probabilité d'avoir 5 bites allongées de plus de 3cm est donnée par quelle loi?

A. Elle peut être approximer par la loi normale N(5 ; 5)
B. Elle peut être approximer par la loi normale N(5 ; 25)
C. Elle peut être approximer par la loi de poisson P(5)
D. Elle peut être approximer par la loi de poisson P($\sqrt{5}$)
E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Réponse A

C'est la fin!!!!