Lois de probabilités

Ce cours paraît très long mais j'ai simplement rajouté pleins d'explication pour mieux comprendre. Il y a pas mal de répétition et d'explication qui sont juste pour comprendre.

I. Généralités

Une variable aléatoire est une épreuve aboutissant à des évènements élémentaires qui sont des nombres.

Ex 1 : On lance un dé (= épreuve) et on note le résultat obtenu (= évènement élémentaire). Ici, on parle bien de variable aléatoire car le résultat est un nombre.

II. Variable aléatoire discrète

1. Définitions

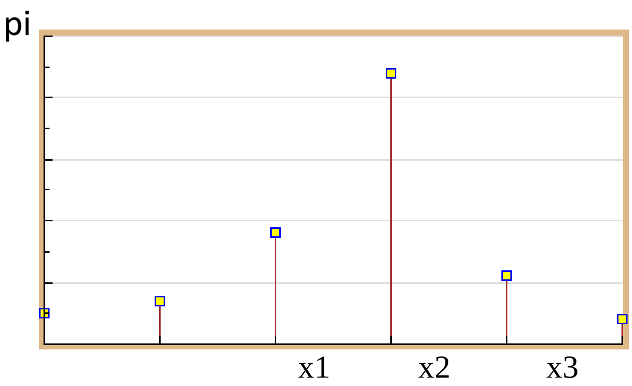
On parle de variable aléatoire discrète lorsque le résultat est compris dans un ensemble fini ou infini dénombrable.

Si on considère la loi de probabilité d'une variable aléatoire X. Chaque issue (=éventualité) de notre épreuve X est représentée par un certain xi. A chaque xi, on associe une probabilité de survenue pi. Cette loi de probabilité s'écrit : **P(X=xi)=pi**.

La loi de probabilité est donc représentée par l'ensemble des probabilités pi correspondants différentes éventualités xi.

On peut représenter les variables aléatoires discrètes sous forme de tableau ou de diagramme en bâton :

x1	**x2**	**…**	**xn**
p1	**p2**	**…**	**pn**



x4 x5

<u>Fonction :</u> On retrouve aussi des fonctions de variables aléatoires (v-a) :

Soit X et Y deux v-a définies dans un ensemble fondamental. Soit g une fonction mathématiques quelconque

Si on pose $Y=g(X)$ alors on peut dire : « Y est fonction de X », les variations de Y dépendent des différentes valeurs prises par X. A ce moment-là, les probabilités de réalisation des éléments de X et Y sont les mêmes.

Y est donc une fonction qui subit des variations, qui peut être croissante, décroissante… La variable Y a les mêmes propriétés qu'une fonction quelconque $g(x)$.

De plus, à chaque v-a, on associe une moyenne μ qui est la valeur moyenne des résultats de l'épreuve.

Attention :

Si la moyenne de la v-a X est μ

Alors la moyenne de la v-a X^2 sera différente de μ^2

De même que la moyenne de $\frac{1}{X}$ est différente de $\frac{1}{\mu}$

2. Paramètres

a) Espérance :

- L'espérance mathématique correspond à la moyenne (notée μ) dans le domaine des «statistiques».
  L'espérance mathématiques (ou moyenne) est notée **E(X)**, elle traduit **la tendance centrale de la variable aléatoire** et il s'agit d'un **indicateur de position** sur la distribution de probabilité de X. C'est-à-dire qu'elle donne une information sur les différentes valeurs des éléments de X (c'est une moyenne quoi ^^)

  On a : $E(X)= \mu= \sum (x_i p_i)$ avec xi représentant une éventualité de X et pi la probabilité de l'éventualité concernée.

- Théorèmes de l'espérance :

  - X est une variable aléatoire et k un nombre réel :
    $E(X+k) = E(X) + k$ et $E(kX) = k\,E(X)$

  - X et Y sont 2 variables aléatoires :
    $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

  - Pour n variables aléatoires, l'espérance de la somme est la somme des espérances :
    $E(\sum X_i)= \sum E(X_i)$

- <u>Exemple</u> : Sur dix élèves, quatre ont eu 8/20, deux ont eu 12/20 et quatre ont eu 16/20.
  Soit X la variable aléatoire : « note d'un élève » et la loi de probabilité P(X=xi)=pi :
  La probabilité d'avoir 8/20 dans cette classe de dix élèves s'écrit : P(X=8)= 4/10= 0,4
  La probabilité d'avoir 12/20 dans cette classe de dix élèves s'écrit: P(X=12)= 2/10=0,2
  La probabilité d'avoir 16/20 dans cette classe de dix élèves s'écrit : P(X=16)= 4/10= 0,4
  La moyenne de la classe s'écrit :
  $E(X)= \sum (x_i p_i) = 8 \times 0{,}4 + 12 \times 0{,}2 + 16 \times 0{,}4 = 3{,}2 + 2{,}4 + 6{,}4 = 12.$

<u>b. Variance et écart-type</u>

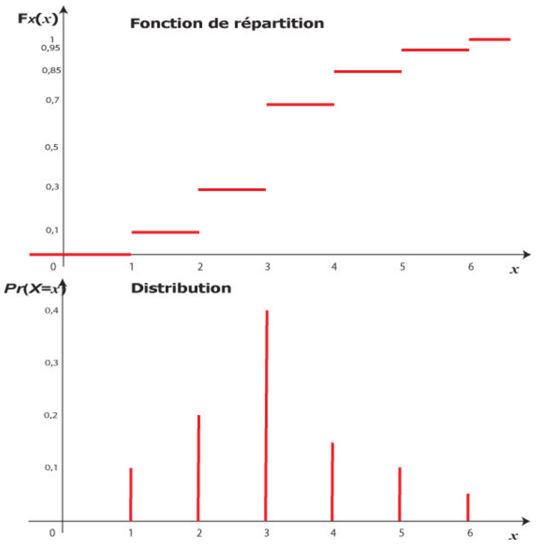
- La variance est un **indicateur de dispersion**, c'est-à-dire qu'elle caractérise l'éloignement des valeurs prises par la variable aléatoire (v-a) par rapport à la moyenne. Une très faible variance signifie que toutes les valeurs de la variable sont proches de la moyenne alors. Une très forte variance signifie que toutes les valeurs de la variable sont éloignées de la moyenne.

  La variance est noté σ^2 ou Var(X), **c'est la moyenne des carrés des écarts entre X et la moyenne** :
  $\sigma^2 = Var(X) = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$ on l'écrit aussi : $\sigma^2 = \sum p_i * (x_i - \mu)^2$

- L'écart type σ de la distribution est la racine carrée de la variance.

- <u>Attention</u>
  Soit a une constante réelle.
  On a: $Var(X + a) = Var(X)$ et $Var(aX) = a^2 Var(X)$

<u>3. Fonctions de répartition et de distribution d'une v-a discrète</u>



La fonction de répartition d'une v-a discrète est **une fonction monotone croissante** représentée par **une fonction en escalier discontinue**. Il s'agit d'une fonction cumulative car elle somme toutes les probabilités pi correspondant aux xi survenus avant x.

La fonction de distribution d'une v-a discrète est modélisée par un **diagramme en bâtons**, elle permet de voir la distribution des probabilités d'une variable aléatoire finie (discrète).

III. Lois de probabilités discrètes

Méthodologie : Pour les lois de probabilités il faut connaître la formule « littérale » de la moyenne, de la variance et de la loi. Il faut savoir quels sont les domaines d'applications de chaque loi et surtout il faut s'entrainer à appliquer chaque loi. En gros il faut vraiment bien connaître les lois.

Les variables aléatoires discrètes suivent des lois de probabilités discrètes.

1) Loi de Bernoulli : B(p)

Une épreuve de Bernoulli c'est une seule épreuve dont l'issue est soit « succès » soit « échec ».

➢ Informations:

- X : v-a donnant le nombre de succès au cours de l'épreuve
- p : la probabilité du succès
- q = 1-p : la probabilité de l'échec

➢ Formule de la loi de Bernoulli:

Soit la v-a X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, on note cette loi B(p), et k un réel égal à 1 en cas de succès ou 0 en cas d'échec.

$$P(X = k) = p^k(1 - p)^{1-k}$$

➢ Propriétés de la loi de Bernoulli :

- La moyenne est notée : **$\mu = p$**
- La variance s'écrit **$\sigma^2 = p\,(1-p) = pq$**

➢ Exemple :

On lance un dé et on regarde si on obtient l'évènement attendu : « avoir un 6 ».

La probabilité d'avoir un succès est telle que : P(X=1)=1/6

La probabilité d'avoir un échec est telle que : P(X=0)=5/6

2) Loi Binomiale : B(n ;p)

On a un nombre « n » d'épreuves de Bernoulli répétées **indépendamment** les unes des autres. Le résultat d'une épreuve n'influence pas l'autre épreuve…etc. Chaque épreuve aboutit à un « succès » ou un « échec »

- **Informations:**

- n : le nombre d'essais indépendants
- p : probabilité d'un succès
- X : v-a donnant le nombre de succès à l'issue des n essais

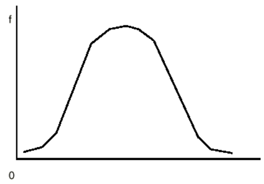
- **Formule de la loi binomiale :**

Soit X la v-a qui suit une loi binomiale de paramètre n et p, notée B(n ;p) avec k étant un nombre réel.

$$\boldsymbol{P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}}$$

- **Propriétés de la loi binomiale :**

- La moyenne s'écrit : **µ= np**
- La variance s'écrit: **σ²= np(1-p)**
- Si p > 0,5 on dit que la distribution est « asymétrique positive » alors que pour p < 0,5 elle est « asymétrique négative ».
- Quand n est grand, la forme du diagramme de distribution devient symétrique tel que :



- **Exemple :**

On lance un dé à 6 faces 3 fois d'affilée avec comme objectif « d'obtenir un 6 » (=succès). Chaque lancer de dé est indépendant du lancer précédent.

Soit X la v-a suivant la loi binomiale B(3 ;1/6)

La probabilité d'obtenir deux succès est :

$$P(X = 2) = C_3^2 \times \frac{1}{6}^2 \ (1 - \frac{1}{6})^{3-2}$$

$$P(X = 2) = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6}$$

$$P(X = 2) = 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6}$$

$$P(X = 2) = 0{,}07$$

- **Particularités de la loi binomiale :**

- ✓ Soit X1 une v-a binomiale de paramètre n1 et p. Elle suit une loi de probabilité B(n1 ;p)
  Soit X2 une v-a binomiale aussi de paramètre n1 et p. Elle suit une loi de probabilité B(n2 ;p)

  Alors la somme de X1 et X2 donne une v-a binomiale X1+X2 de paramètre n1+n2 et p. Elle suit la loi de probabilité B(n1+n2 ;p)

- ✓ La loi binomiale nous permet, entre autre, d'étudier certaines caractéristiques d'une population.
  Comme l'étude de la totalité d'une population est impossible (=trop d'individus ou d'éléments), alors on procède à un échantillonnage de cette population. De ce fait, grâce à un tirage au sort (=randomisation), on constitue plusieurs échantillons de la population auxquels on appliquera notre loi binomiale.

  Le tirage au sort (=TAS) peut être :

  - non exhaustif : Chaque élément (ou « individu») est remis dans la population après le tirage. On peut retrouver un même élément (ou « individu ») dans des échantillons différents. Ainsi la probabilité de l'évènement étudier reste la même dans chaque échantillon. On peut parler d'équiprobabilité entre les échantillons et la population.

  -exhaustif : La majorité du temps, le tirage est exhaustif, (n considère par défaut qu'un tirage est exhaustif ! On ne remet pas les éléments (ou « individus ») sélectionnés dans la population. Ainsi, la probabilité de l'évènement étudié est différente dans chaque échantillon.

- ✓ Loi binomiale ou loi hypergéométrique ?

  Pour le savoir, il faut calculer **le taux de sondage** $\frac{n}{N}$

  Si $\frac{n}{N} \leq 0{,}10$ alors la taille n de l'échantillon est très inférieure à la taille N de la population. On doit donc appliquer la loi binomiale pour l'étude de l'échantillon

  Si $\frac{n}{N} > 0{,}10$ alors la taille n de l'échantillon est trop grande par rapport à la taille N de la population. On doit donc appliquer la loi hypergéométrique

3) Loi Hypergéométrique : H(N,D,n)

Soit une population de N individus dont un nombre D présente un caractère donné. On prélève un échantillon n de cette population N.

- **Informations :**

✓ X = la v-a donnant le nombre d'individus possédant le caractère donné dans l'échantillon de n individus.
✓ N= effectif de la population
✓ D= nombre de personnes présentant le caractère étudié dans la population
✓ $\frac{D}{N}$= probabilité p d'avoir le caractère étudié dans la population
✓ q= 1-p
✓ n= effectif de l'échantillon
✓ P(X=k)= probabilité d'avoir « k » personnes présentant le caractère étudié dans l'échantillon

- **Formule de la loi hypergéométrique :**

Soit X la v-a qui suit la loi hypergéométrique de paramètre N, D et n, notée H(N ;D ;n), et k un nombre réel :

$$\boldsymbol{P(X = k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}}$$

- **Propriétés de la loi hypergéométrique :**

- Moyenne : $\mu = \frac{nD}{N} = np$
- Variance : $\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$ comme $\frac{N-D}{N} = \frac{N}{N} - \frac{D}{N} = 1 - \frac{D}{N} = 1 - p$=q
  On a : $\sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) npq$
- La loi hypergéométrique et la loi binomiale sont donc proches. Elles ont la même espérance (np) mais pas la même variance. Leur utilisation dépend du taux de sondage $\frac{n}{N}$

- **Utilisation de la loi hypergéométrique :**

« La loi hypergéométrique permet la conception de plans d'échantillonnages pour le contrôle de réception »

(L'explication qui suit n'est PAS à apprendre par cœur ! son but est de vous expliquer et vous permettre de COMPRENDRE la phrase du dessus)

Le contrôle de réception s'applique à un lot complet d'objets (=un lot de téléphones par exemple). Il permet de décider de l'acceptation ou du rejet du lot (=on garde le lot de téléphones ou on le rejette). Le contrôle de qualité permet aussi d'avoir une appréciation sur la qualité du lot (=qualité du lot de téléphones).

Pour effectuer ce contrôle, on a besoin d'élaborer des « plans d'échantillonnages » (=on va effectuer le contrôle sur un échantillon de téléphones du lot).

Ainsi la loi hypergéométrique permet de réaliser ce « plan d'échantillonnage » pour le contrôle de réception.

- **<u>Exemple 1 :</u>**

Dans une population de 1000 habitants, 150 possèdent les yeux vairons (les yeux sont chacun d'une couleur différente). On tire au sort 200 individus dans cette population. Quelle est la probabilité que la moitié de cet échantillon ait les yeux vairons ?

P(X=100) = $\frac{C_{150}^{100} \times C_{1000-150}^{200-100}}{C_{1000}^{200}}$ (Vous n'aurez jamais à développer le calcul sauf s'il est vraiment simple ! Le prof s'arrêtera à cette étape et parmi les formules données il faudra choisir la bonne)

4) Loi Géométrique : G(p)

Dans la loi binomiale, on répète des épreuves de Bernoulli indépendamment les unes des autres.

Dans la loi géométrique on répète des épreuves de Bernoulli jusqu'à l'obtention du premier succès. Chaque épreuve dépend donc de la précédente car dès que l'on obtient un succès, on arrête les épreuves.

- **<u>Informations:</u>**

- p= probabilité d'avoir un succès
- q= (1-p)= probabilité d'avoir un échec
- X : v-a donnant le nombre d'essais nécessaires jusqu'à l'obtention du premier succès

- **<u>Formule de la loi géométrique:</u>**

Soit X la v-a qui suit la loi géométrique de paramètre p, notée G(p), et k un nombre réel :

$\mathbf{P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}}$

Propriétés de la loi géométrique:

- $\mu = \frac{1}{p}$
- $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

Utilisation de la loi géométrique :

« On utilise la loi géométrique pour étudier l'efficacité d'une carte de contrôle dans un dispositif de surveillance d'un processus de production »

(L'explication qui suit n'est PAS à apprendre par cœur ! son but est de vous expliquer et vous permettre de COMPRENDRE la phrase du dessus)

Dans certains domaines, on a un processus de production (=machine/appareil de production de téléphones par exemple). Le processus de production permet de produire, à la chaine, des objets de même nature. Mais il peut arriver qu'un dysfonctionnement du processus survienne, entraînant ainsi la production d'objets non conformes (=les téléphones produits ne marchent pas).

Pour pouvoir corriger, au plus vite, ce genre de problème, on observe la mise en place de dispositif de surveillance comme « une carte de contrôle ».

La carte de contrôle (ou diagramme de contrôle) permet d'évaluer la qualité de chaque objets produit. Ainsi dès qu'un problème survient, on peut le repérer grâce à notre carte.

La loi géométrique permet ainsi d'étudier l'efficacité d'une carte de contrôle. On observe bien l'analogie entre la loi et la carte de contrôle : elle permet de repérer le premier évènement anormal qui survient.

Exemple :

On lance un dé à six faces jusqu'à obtenir un « 5 ». La probabilité d'obtenir un 5 au bout de 3 essais est :

$P(X=3) = 1/6 \times (5/6)^2 = 25 / 216$

5) Loi de Poisson : P(λ)

La loi de Poisson modélise des phénomènes aléatoires où les évènements se réalisent sur la base d'une unité de temps, de volume, de surface…etc

Informations :

- λ =taux moyen avec lequel un évènement particulier se produit en général
- X= v-a qui donne le nombre d'évènement particulier qui se produise dans la situation étudiée

- **Formule de la loi de Poisson :**

Soit X la v-a qui suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée P(λ) et k un nombre réel :

$$\mathbf{P(X = k) = \frac{\lambda^{k} e^{-\lambda}}{k!}}$$

- **Propriétés de la loi de Poisson :**

- $\mu = \sigma^2 = \lambda$
- La moyenne et la variance sont égales à λ : cette égalité est une propriété mathématique qui permet d'indiquer le caractère poissonien d'une variable discrète. C'est-à-dire que lorsque la moyenne et la variance d'une variable sont égales à une même « valeur », alors cette variable suit la loi de Poisson et la « valeur » en question est notée λ.

- **Particularités de la loi de Poisson :**

Soit X1 une v-a qui suit la loi de Poisson de paramètre λ1 et X2 une v-a qui suit la loi de Poisson de paramètre λ2.

La v-a X1+X2 suit la loi de Poisson de paramètre λ1+ λ2.

- **Utilisation :**

La loi de Poisson est utilisée le plus souvent pour déterminer le nombre de défauts (ou évènements) par unité (de temps, volume, surface…etc) dans le cadre de la qualité, la fiabilité et la sécurité. Comme le nombre de pannes de voiture en 300 jours, comme le nombre de personnes hospitalisées aux urgences dans la nuit.

- **Exemple :**

Dans le service des urgences, on a en moyenne 4 hospitalisations en deux heures.

Quelle est la probabilité d'avoir 1 patient hospitalisé au cours d'une heure ?

$\lambda = \frac{4\ hospitalisations}{2h} = \frac{2\ hospitalisations}{1h}$ = 2 hospitalisation/heure

D'où :

$$P(X = 1 hopitalisation/heure) = \frac{\lambda^{k} e^{-\lambda}}{k!} = \frac{2^{1} e^{-2}}{1!} = 2e^{-2}$$

(encore une fois ce genre de calcul est trop dur à développer sans calculatrice ! Soit le prof vous donnera une « aide au calcul » mais il ne le fait jamais, soit il vous donnera plusieurs réponses sous cette forme non développée et il faudra choisir la bonne, il le fait très souvent car il adore cette loi) !

IV. Variable aléatoire continue

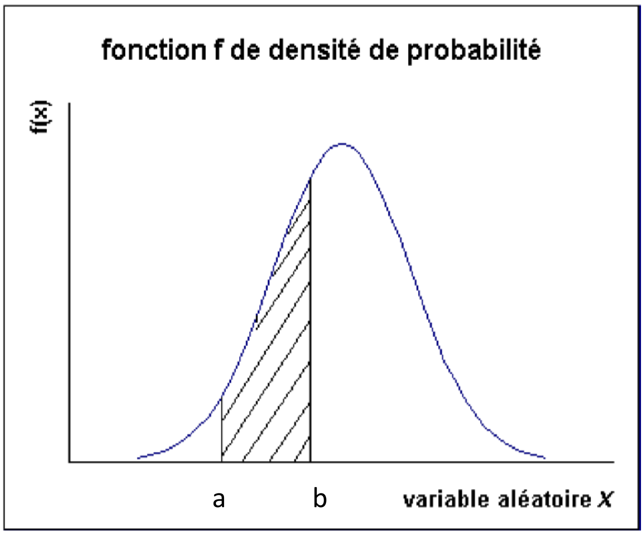
1. Définition

On parle de v-a continue lorsque la variable se définit sur un ensemble indénombrable.

L'une des particularités des v-a continues est que la probabilité qu'elle soit égale à un nombre unique est nulle. Par exemple, si X est une v-a donnant le poids d'un individu, alors P(X=60kg)=0.

C'est pour cela que pour définir une loi de probabilité continue on ne peut pas isoler chacune des éventualités car leur probabilité est nulle, il faut étudier des intervalles d'éventualités comme $P(a \leq X \leq b)$

2. Fonction de distribution



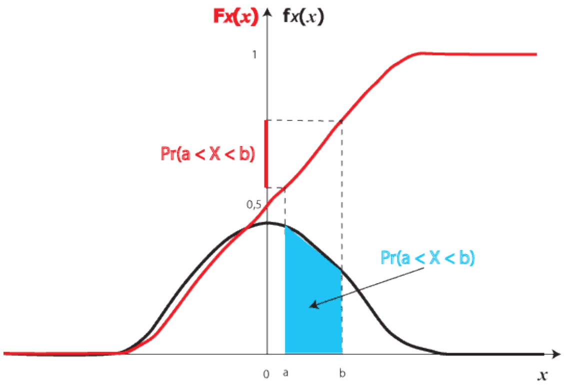
Soit X une v-a continue :

La loi de probabilité de X, aussi appelée loi de distribution de X, est définit grâce à la fonction f(x) appelée « densité de probabilité » de X

La probabilité $P(a \leq X \leq b)$ est égale à la surface sous la courbe entre a et b (partie quadrillée) tel que :

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

- Fonction de répartition



Comme pour les v-a discrètes :

- La fonction de répartition d'une v-a continue est monotone croissante
- Cette fonction de répartition part de F(x)=0 et atteint F(x)=1.

Contrairement aux v-a discrètes :

- La fonction de répartition d'une v-a continue est continue

La fonction de répartition est définit par la fonction F(x), dont la dérivée est notre densité de probabilité, f(x). Ainsi, pour calculer P(a≤X≤b), on a donc 2 solutions :

- La densité de probabilité : on calcule l'aire sous la courbe entre a et b tel que P(a≤X≤b)=$\int_a^b f(x)dx$

- La fonction de répartition : on calcule la différence de hauteur sur la courbe entre les points a et b tel que
P(a≤X≤b)=F(b)-F(a)

V. Variable centrée réduite

Soit une v-a X d'espérance :$E(X) = \mu$ et de variance σ^2. Si on pose : $\mathbf{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$

On obtient une variable centrée réduite Z tel que :

- **Moyenne=E(Z)=0**

- **Variance= σ^2 =1**

Le terme « centrée » signifie qu'on soustrait la moyenne μ de la variable à chacune de ses valeurs initiales.

Le terme « réduite » signifie qu'on divise toutes les valeurs que prend la variable par son écart-type σ.

VI. Lois de probabilités continues

1) Loi exponentielle E(λ)

On définit d'abord la fonction de densité de la loi exponentielle : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

➢ Informations :

- λ= taux de défaillance instantanée ou risque instantanée que l'évènement se produise
- X= v-a continue qui donne la durée de survenue d'un évènement suit la loi exponentielle E(λ)

➢ Formule :

Soit F(x) la fonction de répartition de notre loi exponentielle de paramètre λ

- La probabilité que notre évènement se réalise entre le temps a et le temps b est

$$\mathbf{P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}$$

- La probabilité que l'évènement se réalise avant le temps b est :

$$\mathbf{P(X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}}$$

➢ Utilisation :

La loi exponentielle permet de décrire un processus de « mortalité » dans lequel le risque instantané (ou taux de défaillance λ) de décès est constant. C'est-à-dire qu'on étudie des éléments ou phénomènes dont la durée de vie est déterminée, on sait qu'ils seront « morts » à une certaine date.

➢ Propriétés de la loi exponentielle :

- **Espérance=** $\mu = \frac{1}{\lambda}$
- **Variance=** $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

➢ Lien entre la loi de Poisson et la loi exponentielle:

Si un évènement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ, alors le temps qui s'écoulera entre deux réalisations consécutives de l'évènement est distribué selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\lambda}$. Le temps qui s'écoule entre deux réalisations est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

- **Exemple :**

J'ai gagné le grand prix d'un magasin électroménager, c'est-à-dire un grille-pain bon marché. Je sais que sa durée de vie suit une loi exponentielle telle que λ =1,5. Quelle est la probabilité qu'il marche encore après trois ans ?

$P(3 \leq X) = e^{-1,5\times3} - 1$

2) Loi uniforme

On définit d'abord la fonction de densité de la loi uniforme : $f(x) = \frac{1}{(x-y)}$ avec x et y des réels quelconques

- **Formule de la loi uniforme:**

Soit X une v-a continue qui suit la loi uniforme :

$$\mathbf{P(a < X < b) = \frac{b-a}{x-y}}$$

- **Propriétés de la loi uniforme :**

- **Moyenne=** $\mu = \frac{x+y}{2}$
- **Variance=** $\sigma = \frac{(x-y)^2}{12}$

- **Exemple :**

La masse de sacs de terre utilisés dans un chantier suit une loi uniforme de densité : f(x)=2 avec la masse des sacs comprise entre 24kg et 26kg.

Quelle est la proportion de sacs de moins de 25kg ?

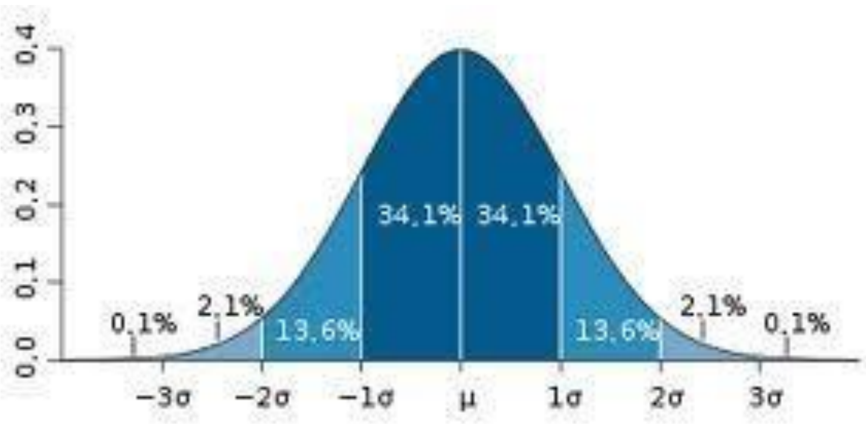
$P(X \leq 25) = \frac{25-24}{2}$=0,5

3) **Loi normale N(μ ; σ)**

La loi Normale est une des principales distributions de probabilité. La fonction de densité est représentée par une courbe caractéristique. L'aire sous la courbe dans un intervalle représente la proportion d'individu (ou probabilité de la survenue d'un évènement) dans cet intervalle.

De nombreux phénomènes naturels (ex : taux d'hématocrite d'une population, Quotient Intellectuel…etc) suivent une distribution très proche de celle de la loi Normale, et forme cette courbe en cloche.

Cette courbe est symétrique autour de μ.



Soit la loi normale de paramètres (μ ; σ), il faut connaître certaines valeurs :

- $P(X < \mu - 1,65\sigma)$=5% et $P(\mu + 1,65\sigma < X) = 5\%$

- $P(X < \mu - 1,96\sigma)$=2,5% et $P(\mu + 1,96\sigma < X) = 2,5\%$

- $P(X < \mu - 2,58\sigma)$=0,5% et $P(\mu + 2,58\sigma < X) = 0,5\%$

- $P(X < \mu - 3,30\sigma)$=0,05% et $P(\mu + 3,30\sigma < X) = 0,05\%$

(Ces valeurs s'expliquent grâce à la loi normale centrée réduite son tableau : voir ci-dessous)

4) **Loi normale centrée réduite : N(0 ;1)**

La loi Normale centrée réduite est un cas particulier de la loi Normale.

Elle a pour paramètres : **moyenne = 0 et variance = 1**.

On dit que la courbe de la loi est symétrique par rapport à 0.

Soit une variable X qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ. Pour pouvoir étudier plus facilement le comportement de notre variable, on va la transformer en variable centrée réduite **:** $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

On obtient donc une variable centrée réduite Z qui suit la loi normale centrée réduite. Ainsi, n'importe quel problème nécessitant l'utilisation d'une loi normale peut être ramené à l'étude d'un **cas unique** qui est la **loi normale centrée réduite**. Ce changement de variable est donc très pratique.

- **<u>Explication des valeurs à retenir</u>** :

$$\mathbf{P(X < \mu - t\sigma) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{(\mu - t\sigma) - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{-t\sigma}{\sigma}\right) = P(Z < -t)}$$

- $P(X < \mu - 1{,}65\sigma) = P(Z < -1{,}65) = 5\%$

- $P(X < \mu - 1{,}96\sigma) = P(Z < -1{,}96) = 2{,}5\%$

- $P(X < \mu - 2{,}58\sigma) = P(Z < -2{,}58) = 0{,}5\%$

- $P(X < \mu - 3{,}30\sigma) = P(Z < -3{,}30) = 0{,}05\%$

- **<u>Opérations :</u>**

Soit Z une variable centrée réduite. Calculer $P(-1 < Z < 1)$.

Grâce à la table de la loi normale centrée réduite (voir dernière page) on connait : $P(Z \leq 1)$

Donc : $P(Z \leq 1) = 0{,}84$

(on rappelle que notre loi est symétrique par rapport à 0)

Comme $P(-1 < Z < 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1)$, on calcule $P(Z \leq -1)$:

$P(Z \leq 1) = P(-1 \leq Z) = 0{,}84$

$P(Z \leq -1) = 1 - P(-1 \leq Z) = 0{,}16$

D'où : $P(-1 < Z < 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = 0{,}84 - 0{,}16 = 0{,}68$

VII. Approximations

1) Loi binomiale - Loi de Poisson :

Soit un phénomène qui suit une loi Binomiale B(n ;p)

Si : $n > 50$, $p \leq 0{,}1$ et $np < 5$

Alors la loi de Poisson permet d'approximer la loi Binomiale de la manière suivante :

$B(n,p) \rightarrow P(\lambda = np)$

C'est-à-dire que le phénomène en question, dans les conditions citées, va suivre une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Exemple :

Soit un lot de 2000 téléphones on teste la résistance de 100 d'entre eux. Pour ce faire on les lance contre un mur avec une batte de baseball. On s'intéresse à la probabilité qu'un téléphone se casse. En général 99% des téléphones survivent au choc et sont résistants. On s'intéresse ici à la proportion de téléphones qui se cassent dans notre échantillon.

On a : La v-a X (donnant le nombre de téléphone cassés) suit une loi binomiale de paramètres (100 ; 0,01)

Comme on a : $n=100 > 50$; $p=0{,}01 < 0{,}1$ et $np=1<5$

On peut donc dire que notre variable suit une loi de poisson $P(\lambda = np=1)$

Si on veut calculer la probabilité de casser 2 téléphones on écrit :

$$P(X = 2) = \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = \frac{1}{2e}$$

2) Loi Binomiale - Loi Normale:

Soit un phénomène qui suit une loi Binomiale B(n ;p) (avec q=1-p)

Si $np \geq 5$ et $nq \geq 5$,

Alors la loi Normale permet d'approximer la loi Binomiale de la manière suivante :

$B(n ;p) \rightarrow N(np ; \sqrt{npq})$

C'est-à-dire que le phénomène en question, dans les conditions citées, va suivre une loi Normale de paramètres np et $\sqrt{npq}$

Exemple :

La SNCF assure que pour la nouvelle année 90% de ses trains seront à l'heure sur un total de 5000 trains . Trente voyageurs d'affaires prennent 60 trains différents par jour pour travailler. On s'intéresse à la variable X « nombre de trains en retard pour ces voyageurs » qui suit une loi binomial B (60 ; 0,1)

On a : np=6 > 5 et nq=54 > 5

Pour calculer la probabilité qu'il y ait au plus 10 trains en retard P(X≤10) on peut utiliser la loi normale N(np=6 ; $\sqrt{npq} = \sqrt{5{,}4}$). On transforme notre variable X en une variable centrée réduite puis on utilise la table de la loi normale centrée réduite pour résoudre le problème (voir plus haut la résolution).

3) Loi de Poisson - Loi Normale :

Soit un phénomène qui suit une loi de Poisson P(λ)

Si λ > 25

Alors la loi Normale permet d'approximer la loi de Poisson de la manière suivante :

P(λ) → N(λ ; $\sqrt{\lambda}$)

C'est-à-dire que le phénomène en question, dans les conditions citées, va suivre une loi Normale de paramètres λ et $\sqrt{\lambda}$

Exemple :

On retrouve en moyenne dans l'océan indien 60 coraux par mètre carré. Autrement dit, λ=60 donc λ>25. Si on s'intéresse à la probabilité d'avoir 10 coraux sur 1m², on peut donc utiliser la loi Normale telle que N(50, $\sqrt{50}$).

On peut donc appliquer la loi Normale pour calculer P(X=10) et faire toutes les manipulations vues précédemment pour trouver le résultat.

<u>Table de la loi normale centrée réduite</u>

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986