

TUT' RENTRÉE BIOSTATS'

COURS N°4 : LOI DE PROBABILITÉS CONTINUES

Hello les PACES !
Au boulot !



SOMMAIRE

- I) Variables aléatoire définition
- II) Variables aléatoires discrètes
- III) Lois de probabilité discrètes
- IV) Variables aléatoires continues
- V) Lois de probabilités continues
- VI) Approximations

Vous actuellement :





IV) VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

C'est plus rapide et vous allez kiffer alleyyy

VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

Définition :

Une variable aléatoire continue à une probabilité nulle d'être égale à un nombre donné.

→ On note : $P(a \leq X \leq b)$ ou $P(X \in [a, b])$

Remarque : On ne peut donc pas lister l'ensemble des probabilités de toutes les éventualités d'une loi de probabilité d'une variable aléatoire car chacune est nulle.



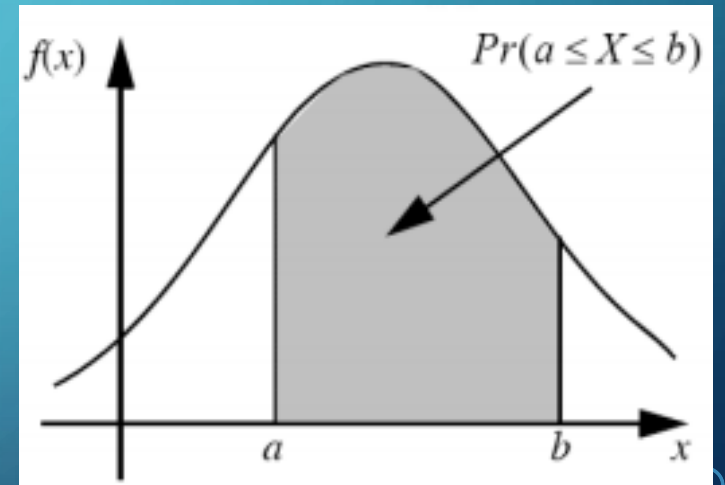
VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

Exemple :

La probabilité qu'un PACES mesure 1,60000...0.... mètres est **nulle**.

La probabilité qu'un PACES mesure entre 1,59m et 1,61m est **non nulle**.

La probabilité qu'un PACES mesure plus de 1,60m est **non nulle** aussi.

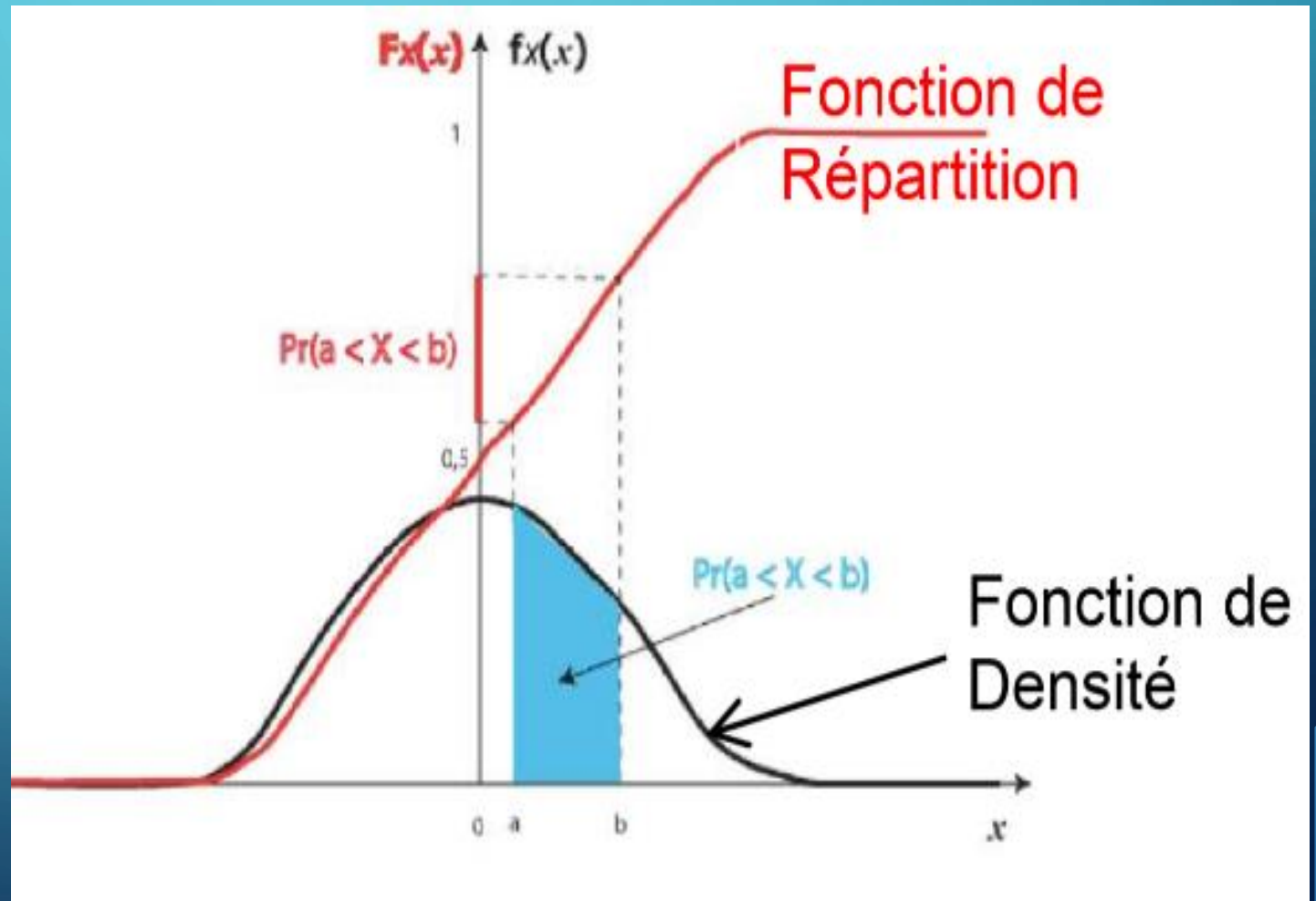


DENSITÉ DE PROBABILITÉ

Définition :

Une densité de probabilité est une fonction utilisée pour définir la loi de probabilité de X (=distribution de X).

→ On note : $f(x)$

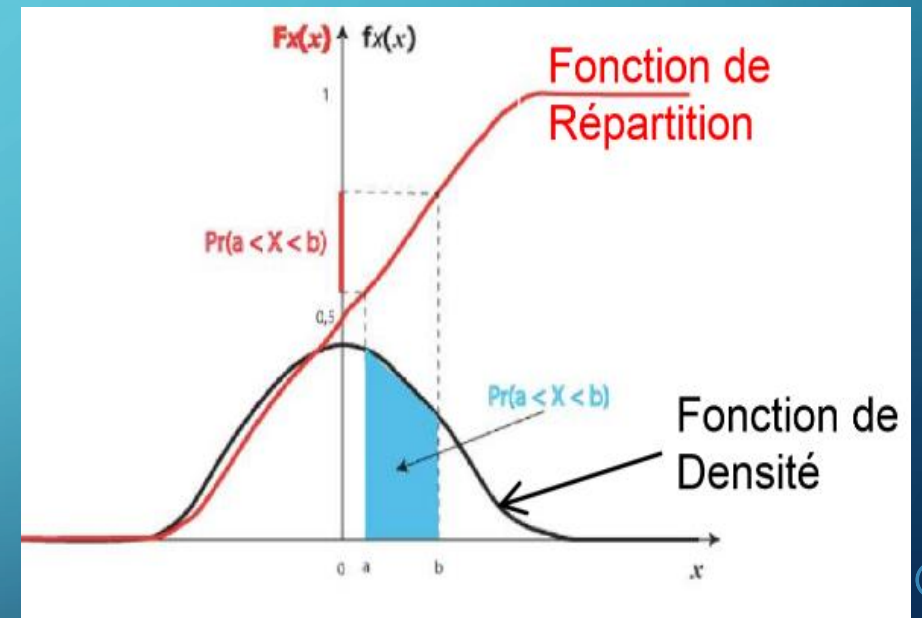


DENSITÉ DE PROBABILITÉ

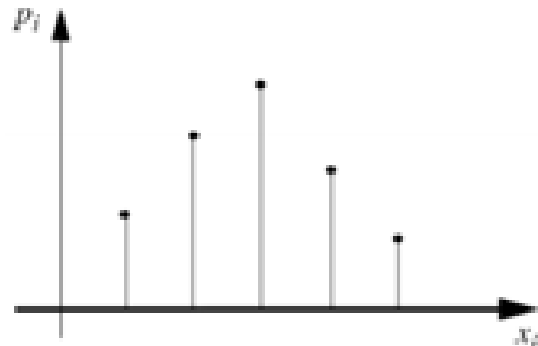
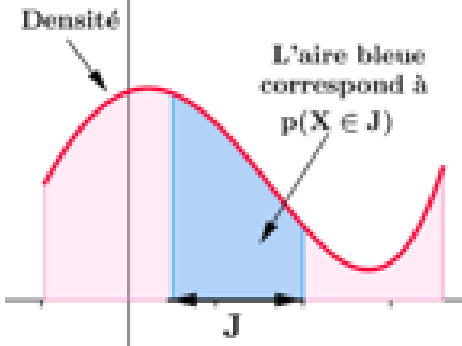


Rappels :

- $\int_a^b f(x)dx =$ intégrale de $f(x)$ sur $[a ; b] =$ aire sous la courbe de la fonction sur $[a; b]$ (zone bleue)
- $F(x)$ est la primitive de $f(x)$ ainsi $F(b) - F(a) \approx$ aire sous la courbe



La probabilité $P(a \leq X \leq b)$ est l'aire sous la courbe.

DISCRETE	CONTINUE
	
Sommes \sum	Intégrales \int
p_i	$f(x)dx$
$P(x_k \leq X \leq x_n) = \sum_{i=k}^{i=n} p_i$	$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
Propriétés	
$p_i \geq 0$	$f(x) \geq 0$
$\mu = E(x) = \sum_i x_i p_i$	$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$
$\sigma^2 = Var(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$	$\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 f(x)dx$
$\sigma^2 = Var(X) = \sum_i x_i^2 p_i - \mu^2$	$\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - \mu^2$

Rappel : La variance

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - \mu)^2$$



FONCTION DE RÉPARTITION: F(X)

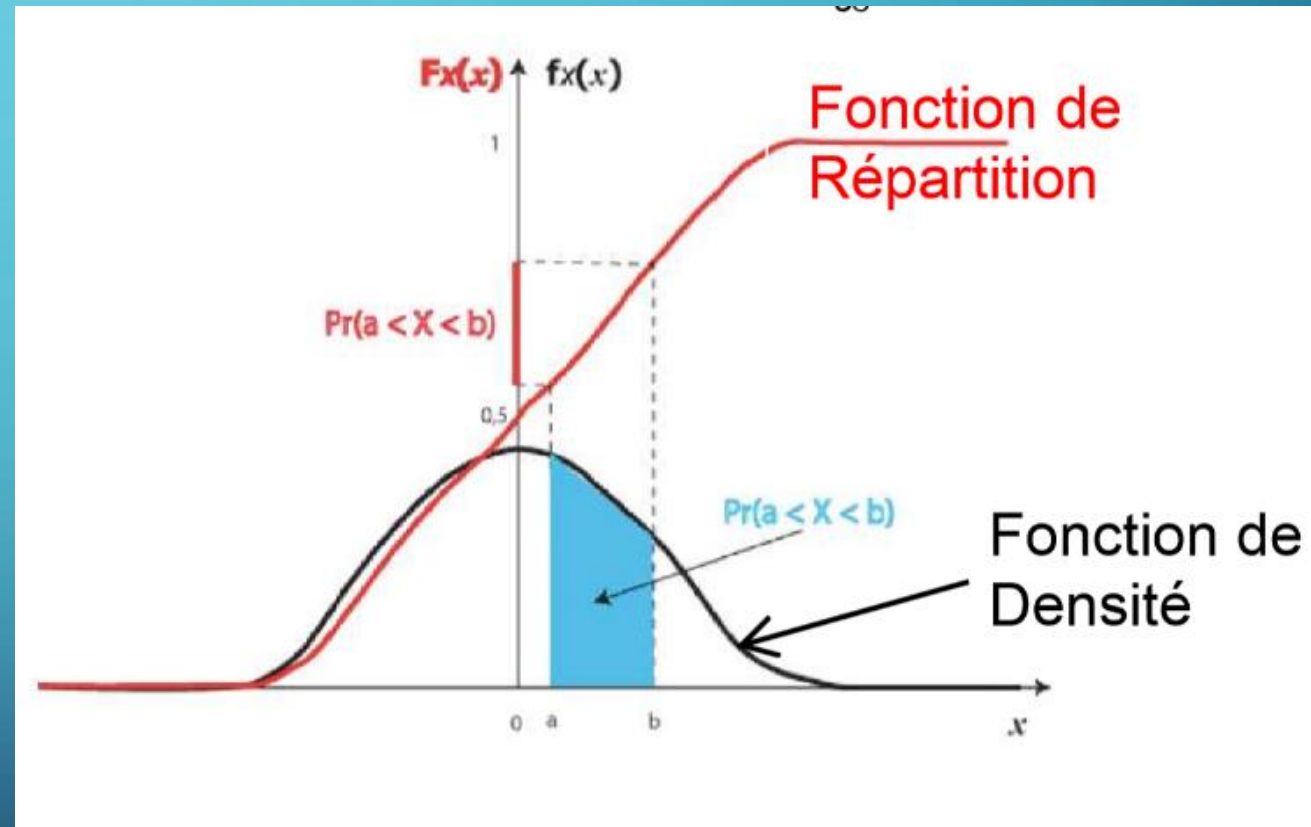
- Fonction **monotone croissante** et **continue**

- $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

- $P(a \leq X \leq b) =$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

= différence de hauteur sur l'axe des ordonnées de la fonction de répartition





Allez sur SOCRATIVE avec vos portables

LOGIN-Student-Room name : **PACESTTR** - cliquez sur Join

QRU TIME



A propos des lois de probabilité et des variables aléatoires.

Donnez la vraie.

- A) On note $g(x)$ la fonction de répartition
- B) On note $F(x)$ la fonction de densité
- C) Pour une loi de proba discrète on peut calculer une proba à partir de l'aire sous la courbe de la fonction de densité.
- D) Pour une loi de proba continue on peut calculer une proba à partir de l'aire sous la courbe de la fonction de répartition.
- E) C'est clairement une arnaque, tout est faux !

CORRECTION

- A) On note $g(x)$ la fonction de répartition FAUX Fonction de répartition c'est $F(x)$
- B) On note $F(x)$ la fonction de densité FAUX Fonction de densité c'est $f(x)$
- C) Pour une loi de proba ~~discrete~~ on peut calculer une proba à partir de l'aire sous la courbe de la fonction de densité. FAUX CONTINUE
- D) Pour une loi de proba continue on peut calculer une proba à partir de l'aire sous la courbe de la fonction de ~~répartition~~. FAUX De densité
- E) C'est clairement une arnaque, tout est faux !



V) LOIS DE PROBABILITES CONTINUES

Youpi!

LOI EXPONENTIELLE : $E(\lambda)$

- Paramètres : λ : Taux de défaillance instantanée
- Utilisation : Pour décrire un *processus de mortalité/défaillance* lors duquel le *risque instantané de mort/taux de défaillance* est **constant**.
- Exemple : *La radioactivité*
- Lien avec la Loi de Poisson : Si un événement suit une loi de Poisson de paramètre λ alors le temps qui s'écoule entre deux réalisations consécutives est $\frac{1}{\lambda}$ car distribué selon une loi exponentielle.



FORMULES

Fonction de densité :

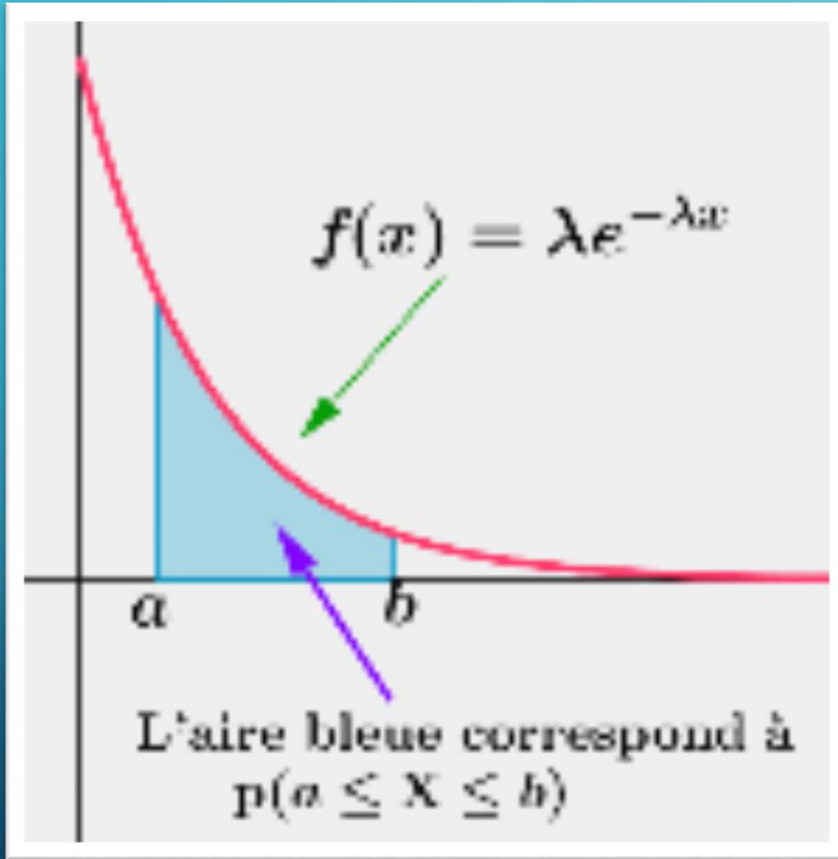
$$f(x) = e^{-\lambda x} \text{ avec } \lambda > 0 \text{ et } x \geq 0$$

Fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

REPRÉSENTATION

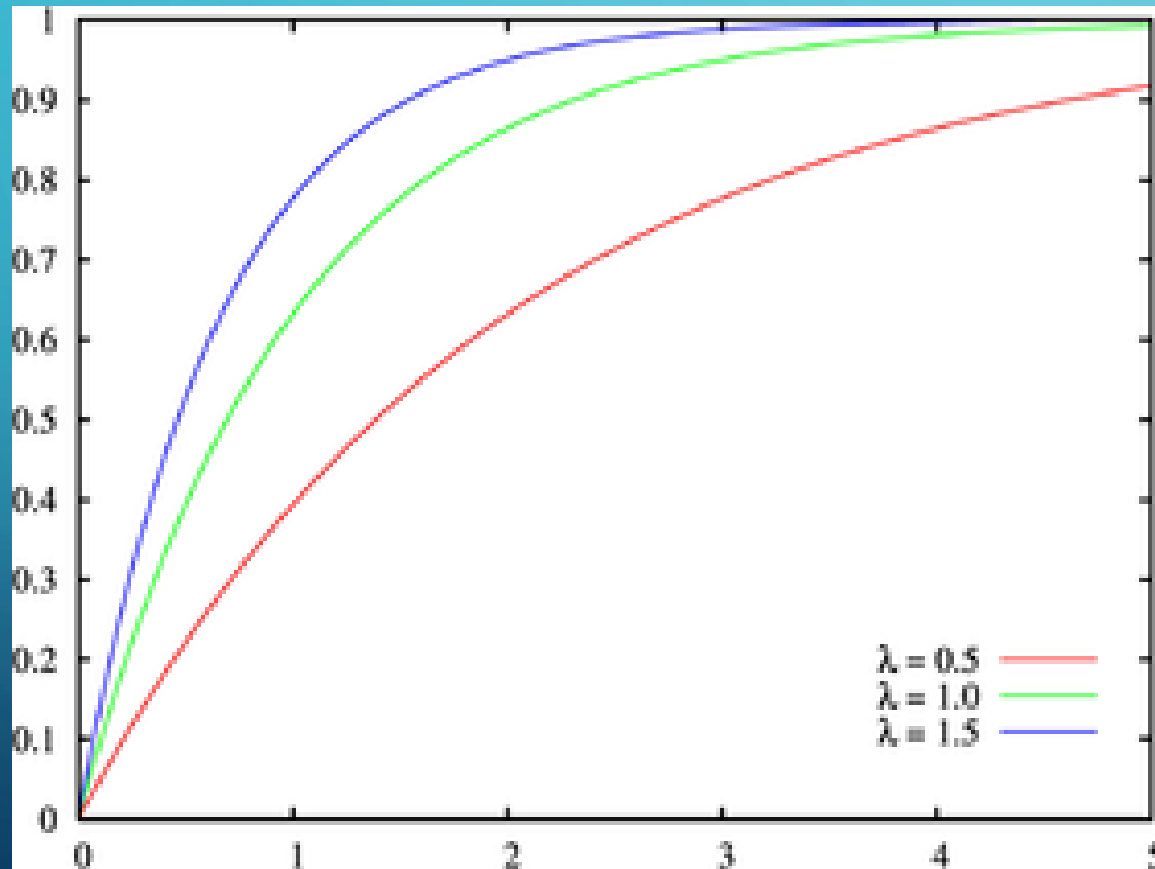


- Fonction de densité :

L'intersection de $f(x)$ avec l'axe des ordonnées est $f(0) = \lambda$.



REPRÉSENTATION



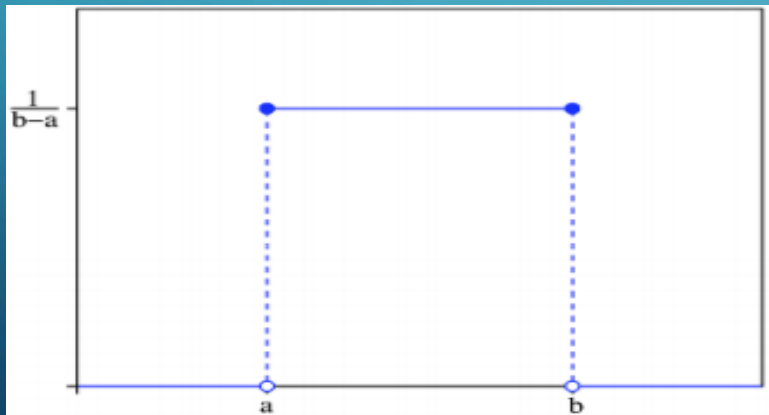
Fonction de répartition : On voit bien que $F(x)$ part de 0 pour atteindre 1.



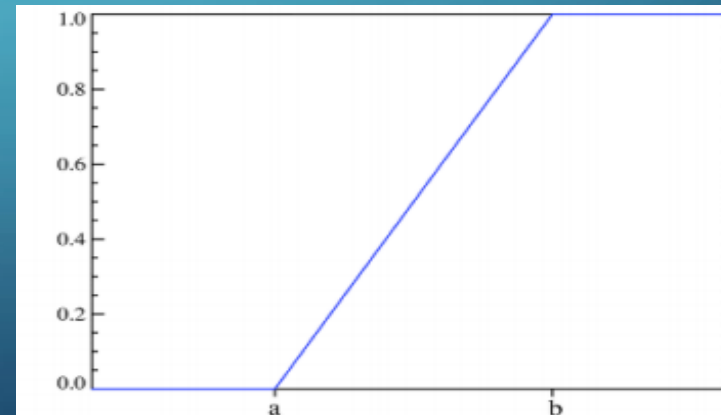
LOI UNIFORME : $U([A ; B])$

- Paramètres $[a ; b] \in \mathbb{R}$: l'intervalle appartient à l'ensemble des réels (\mathbb{R}).
- Utilisation : La loi uniforme est en fait constante c'est-à-dire que peu importe x la probabilité est toujours la même.

Fonction de densité



Fonction de Répartition



FORMULES

Fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a ; b] \text{ et } f(x) = 0 \text{ quand } x \notin [a ; b]$$

Fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{x-a}{(b-a)}$$

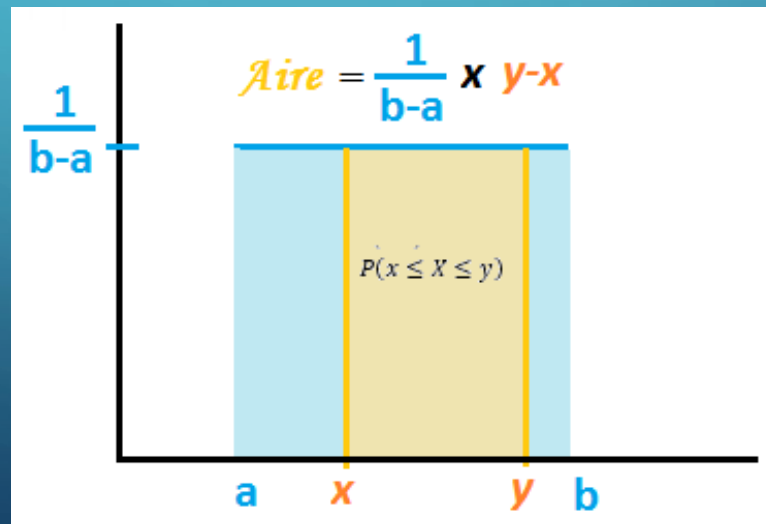
$$P(x \leq X \leq y) = \int_x^y \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{y-x}{(b-a)}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

EXPLICATIONS

- La probabilité est donnée par l'aire sous la courbe de densité qui ici est un rectangle. La totalité de l'aire doit donner 1. Sa largeur est $[a ; b] = b - a$. Soit A son aire :

$$A = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b-a} \times (b-a) = 1$$



EXEMPLE

- *Eva doit se rendre à Pasteur. Elle ne regarde pas les horaires de bus et attend gentiment à l'arrêt de Valrose. Un bus part toutes les ½ heure de la gare routière. Eva attend de 11:00 à 11:30. Quelle est la probabilité que le bus arrive avant 11:15 pour que Eva soit à l'heure pour le déjeuner?*

Qui a une idée?

Prenez le temps y a des bonbons à gagner



RÉPONSE

$$P(X \leq 11,25) = \int_{11}^{11,5} \frac{1}{(11,5-11)} dx = \int_{7,5}^8 \frac{1}{0,5} dx = \frac{11,25-11}{(11,5-11)} = \frac{0,25}{0,5} = 0,5.$$
 Il y a donc 50% de chance que Eva prenne le bus avant 11:15 et donc 50% de chance pour qu'elle arrive en retard pour manger son bagel.

LOI NORMALE : $N(\mu ; \sigma)$



Paramètres

- μ : La moyenne de X
- σ : L'écart-type de X
- X : Variable aléatoire

Utilisation : La loi Normale sert TOUT le temps (c'est la vie les gars !). Elle décrit la répartition naturelle de phénomènes, biologiques par exemples.

REPRÉSENTATION ET FORMULES

Vous devez bien m'apprendre !

Fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ si } x \in [-\infty ; +\infty]$$

Fonction de répartition :

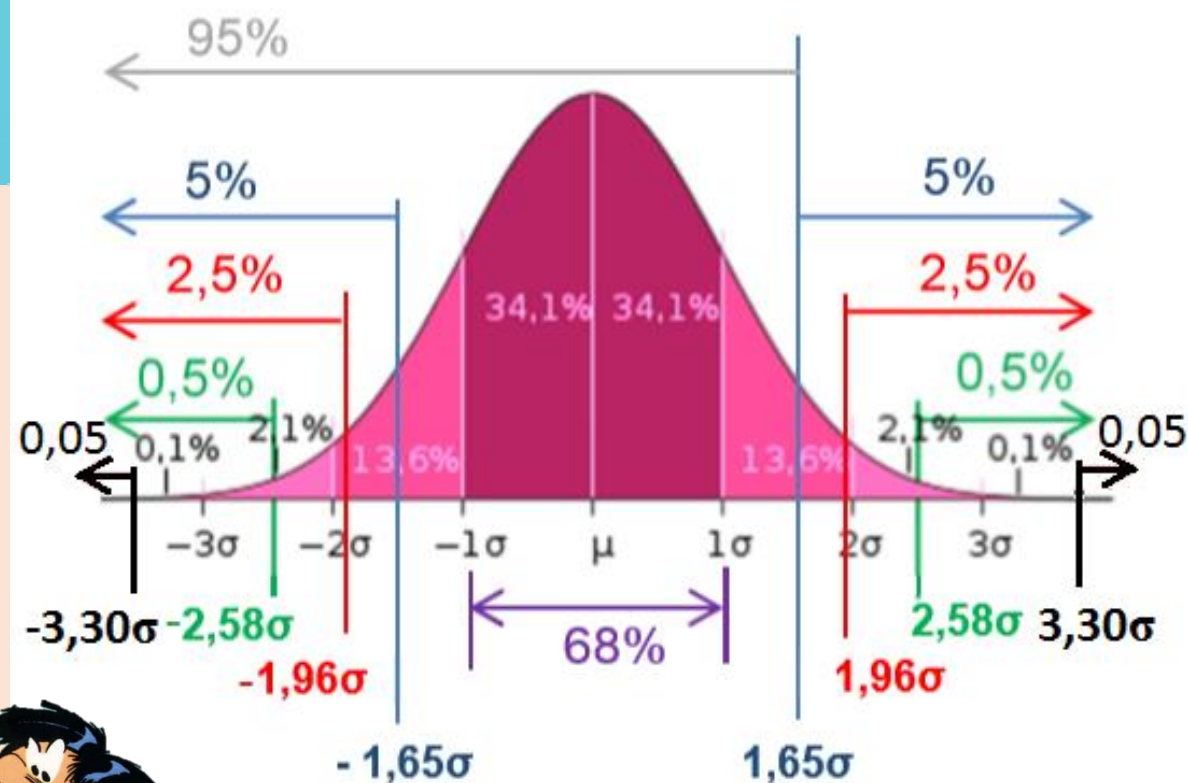
$$P(X < \mu - 1,65 \sigma \text{ ou } X > \mu + 1,65 \sigma) = 10\%$$

$$P(X < \mu - 1,96 \sigma \text{ ou } X > \mu + 1,96 \sigma) = 5\%$$

$$P(X < \mu - 2,58 \sigma \text{ ou } X > \mu + 2,58 \sigma) = 1\%$$

$$P(X < \mu - 3,30 \sigma \text{ ou } X > \mu + 3,30 \sigma) = 0,1\%$$

$$P(\mu - 1\sigma < X < \mu + 1\sigma) = 68\%$$



Moi pauvre petit PACES ?

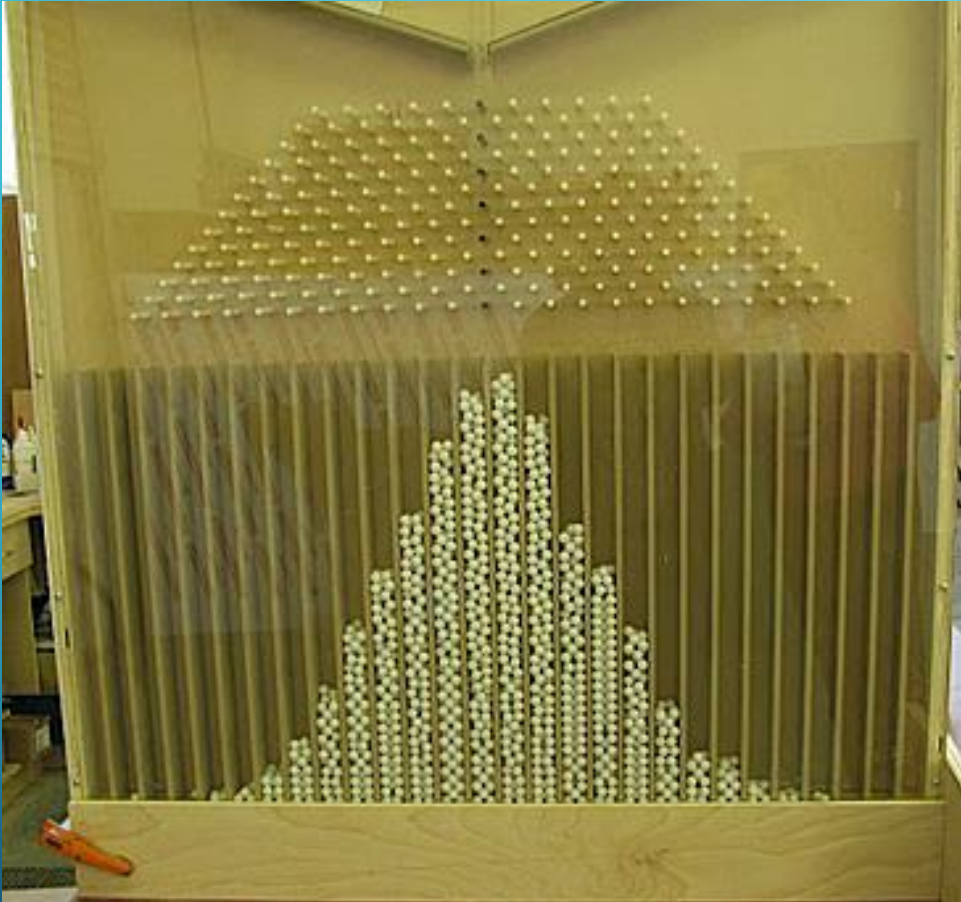
COURBE DE GAUSS

Fonction de densité : C'est une courbe en cloche appelée **courbe de Gauss**.

C'est un modèle de distribution naturelle courant



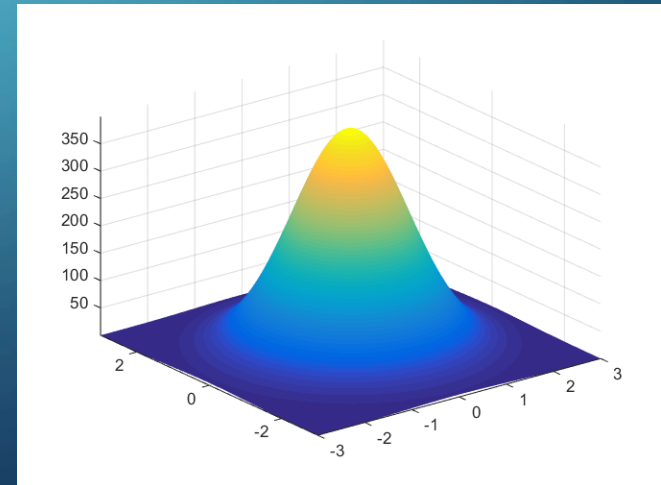
Planche de Galton

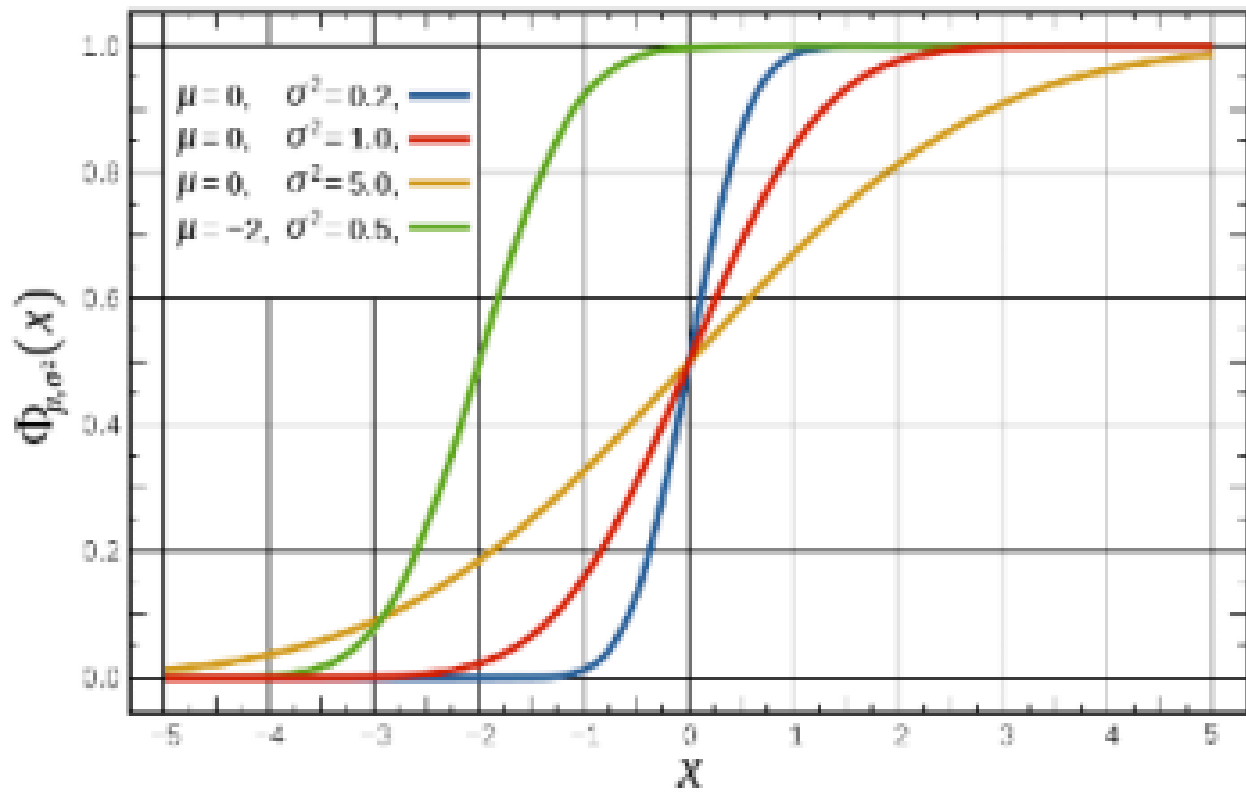


Tas de sable



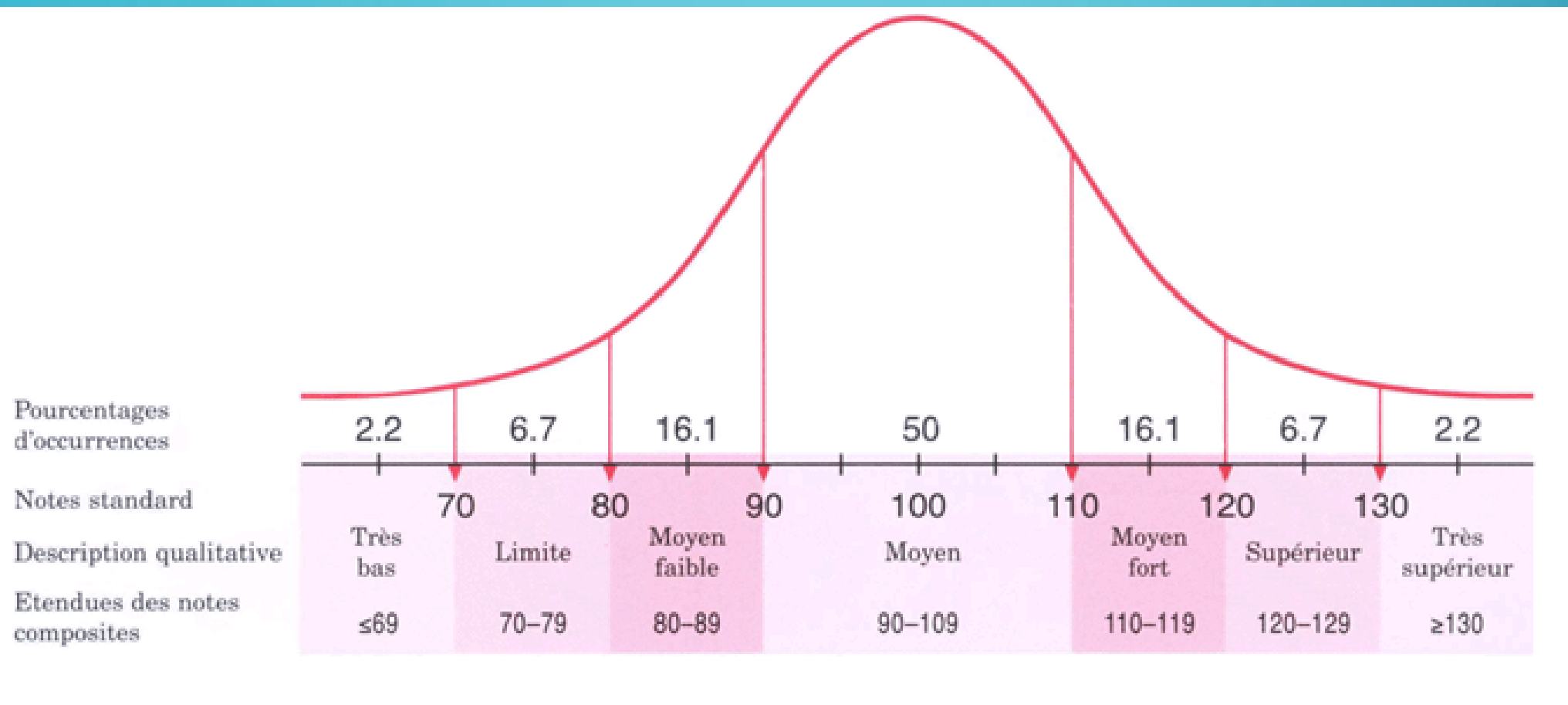
Gauss en 3D





- Fonction de répartition : Ici toutes les courbes [sauf la verte] ont la même moyenne (notée X sur le graph). Ainsi le point d'intersection de toutes ces courbes a pour coordonnées $(0 ; 0,5)$. Donc 50% est atteint au niveau de X .

EXEMPLE : POIDS ; TAILLE...



LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE : $N(\mu ; \sigma) = N(0 ; 1)$

Paramètres

- $\mu=0$: La moyenne de X , elle est donc centrée sur 0
- $\sigma=1$: L'écart-type de X , elle est donc réduite
- Z : Variable aléatoire

Utilisation

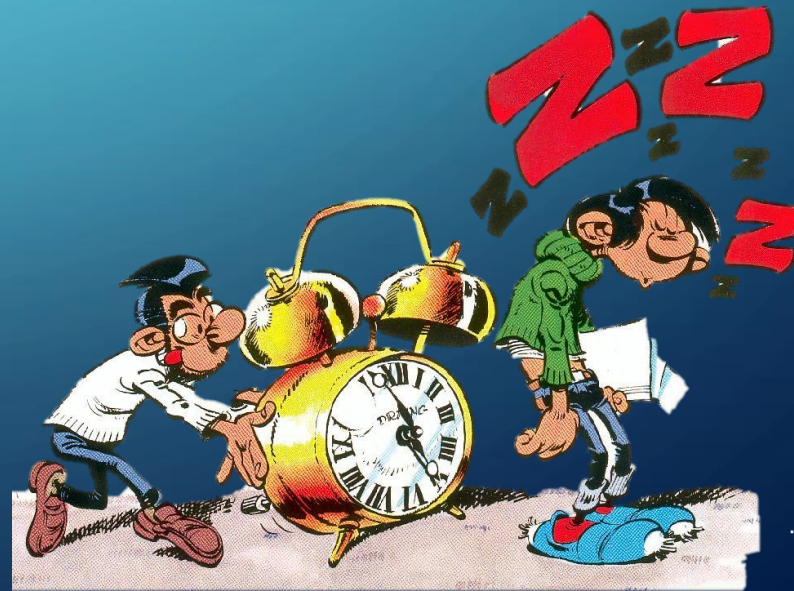
- La loi Normale centrée réduite est juste un **cas particulier** de la loi Normale. Lorsque l'on a une variable aléatoire qui suit une loi Normale dont le comportement nous est inconnu on la ramène à une loi Normale centrée réduite dont le comportement est connu, on pourra donc utiliser la table de la loi Normale centrée réduite.



PASSAGE DE LA LOI NORMALE À LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE : CHANGEMENT DE VARIABLE

- On a la variable aléatoire X qui suit une loi Normale $N(\mu ; \sigma)$. Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi Normale centrée réduite $N(0 ; 1)$.

- Ainsi $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$



EXEMPLE

Soit le taux d'alcoolémie des tuteurs qui suit une loi normale $N(0,5 ; 0,2)$. On cherche la probabilité qu'un tuteur ait plus de $0,5\text{g/L}$ et ne puisse pas conduire. On va donc changer de variable et passer à la loi Normale centrée réduite pour trouver cette proba.

	Pierre	Eva	Nicolas	Léo	Vincent	Mathilde	Vera	MOYENNE	ECART TYPE
X : Taux d'alcoolémie en g/L	0,8	0,7	0,4	1	0,4	3	0,8	1,014285714	3,325841922
Z : (X-m)/s	-0,064430517	-0,09	-0,1847008	-0	-0,18	0,597	-0,06	0	1

Allez sur SOCRATIVE avec vos portables

LOGIN-Student-Room name : **PACESTTR** - cliquez sur Join



QRU

La variable aléatoire X [poids des Paces de l'amphi] suit une loi Normale. En moyenne un PACES pèse 60Kg (en Septembre 😊), de plus $\sigma=10$ **Quelle(s) proposition(s) est (sont) exacte(s) ?**

- A) La variable X suit la loi Normale $N(30 ; 10)$
- B) La variable X suit la loi Normale $N(10 ; 60)$.
- C) On transforme la variable X en la variable Z qui est centrée réduite car on ne connaît pas le comportement de la centrée réduite
- D) La variable X suit la loi $B(60 ; 10)$
- E) Tout est faux, ce sont des mensonges dû à un complot du GIEC, des illuminatis, de l'industrie du sucre et de Michael Jackson.



ON CORRIGE

A) La variable X suit la loi Normale $N(30 ; 10)$ FAUX $N(60; 10)$

B) La variable X suit la loi Normale $N(10 ; 60)$. FAUX $N(60; 10)$

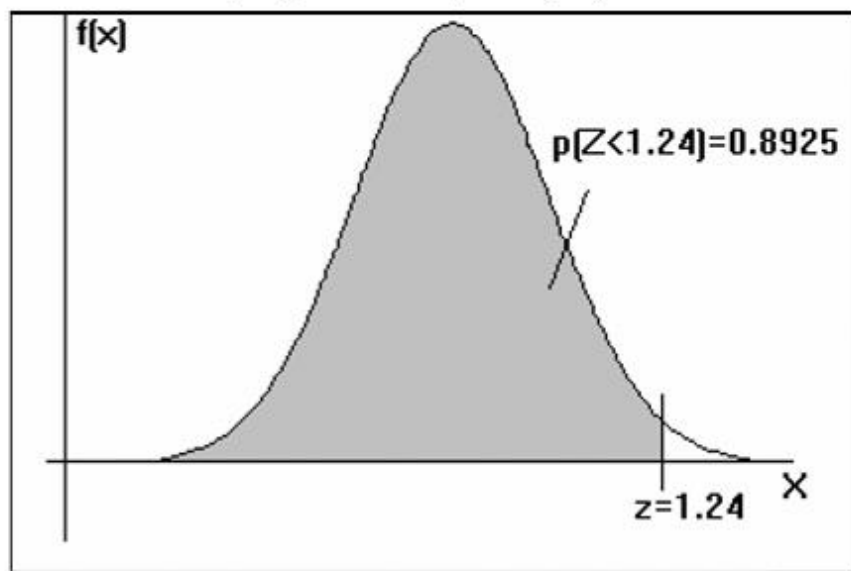
C) On transforme la variable X en la variable Z qui est centrée réduite car on ne connaît pas le comportement de la centrée réduite FAUX Justement on connaît le comportement de la centrée réduite

D) La variable X suit la loi $B(60 ; 10)$ FAUX $N(60; 10)$

E) Tout est faux VRAI



TABLE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

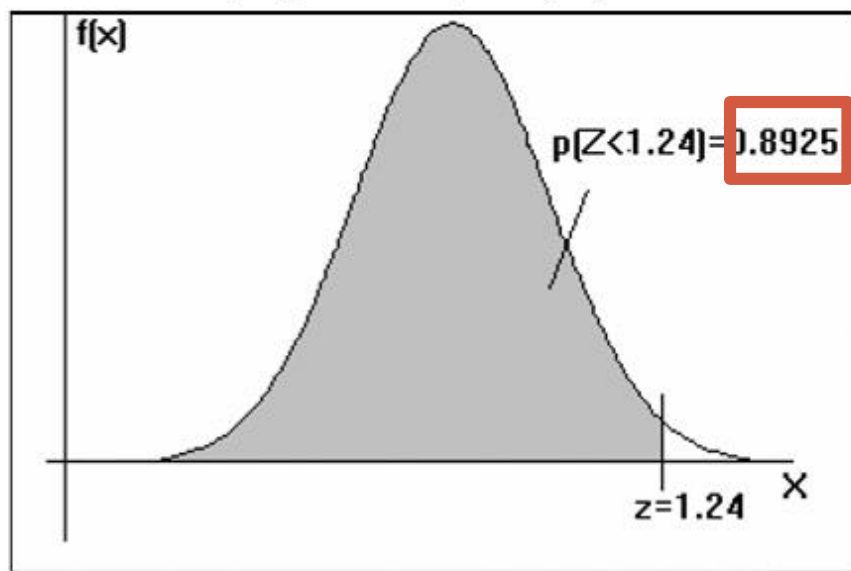


Rannels:

Exemple: Sachant $P(Z < 1,24) = 0,8925$, on en déduit:
 1/ $P(Z > 1,24) = 1 - P(Z < 1,24) = 1 - 0,8925 = 0,1075$
 2/ $P(Z < -1,24) = P(Z > 1,24) = 0,1075$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382

TABLE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE



Rannels:

Exemple: Sachant $P(Z < 1,24) = 0,8925$, on en déduit:
 1/ $P(Z > 1,24) = 1 - P(Z < 1,24) = 1 - 0,8925 = 0,1075$
 2/ $P(Z < -1,24) = P(Z > 1,24) = 0,1075$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382

VI) APPROXIMATION

En gros quoi...



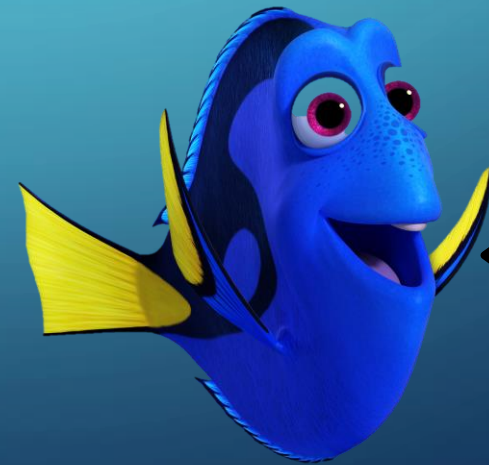
Loi Binomiale \rightarrow Loi de Poisson



Si
 $n > 50$; $p \leq 0,10$ et $np \leq 5$

Alors
 $B(n ; p) \rightarrow P(\lambda = np)$

La loi Binomiale a ainsi été
approximée par la loi de
Poisson



Coucou moi c'est
Nicolas ! Retrouvez
moi en SSH au S2 !
Aimez moi svp <3

Loi Binomiale \rightarrow Loi Normale

Si
 $np \geq 5$ et $nq \geq 5$

Alors
 $B(n ; p) \rightarrow N(np; \sqrt{npq})$

La loi Binomiale a ainsi
été approximée par la loi
Normale



← devant la Bioch à J-10 du cc



Loi de Poisson \rightarrow Loi Normale

Si
 $\lambda > 25$

Alors
 $P(\lambda) \rightarrow N(\lambda; \sqrt{\lambda})$

La loi de Poisson a ainsi
été approximée par la loi
Normale



Faut que
j'apprenne tout
ça !

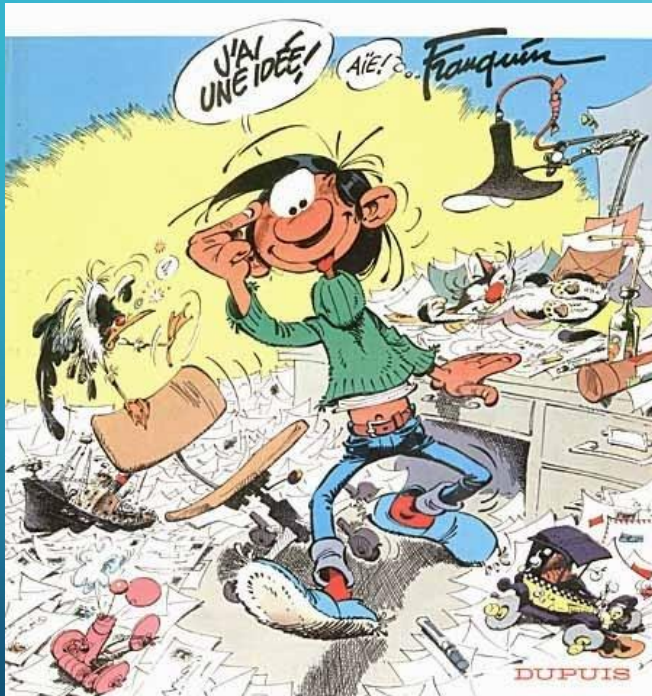


Allez sur SOCRATIVE avec vos portables

LOGIN-Student-Room name : **PACESTTR** - cliquez sur Join



QRU



Un hôpital possède 100 défibrillateurs. La probabilité qu'un défibrillateur tombe en panne est de 0,01. On suppose que le fonctionnement d'un défibrillateur est indépendant des autres. X « nombre de défibrillateurs qui tombent en panne » suit une loi binomiale. **Donner la proposition correcte :**

A) On a $B(100 ; 0,1)$

B) On a : $P(1)$

C) On a : $P(100 ; 0,01)$

D) On a ; $N(100 ; 0,01)$

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Allez sur SOCRATIVE avec vos portables

LOGIN-Student-Room name : **PACESTTR** - cliquez sur Join



QRU



Et oui une approximation

A) On a $B(100 ; 0,1)$ FAUX c'est $B(100 ; 0,01)$

B) On a : $P(1)$ VRAI on peut approximer la loi binomiale par Poisson car $n = 100 > 50$; $p = 0,01 \leq 0,10$ et $np = 1 \leq 5$, avec $\lambda = np = 1$

C) On a : $P(100 ; 0,01)$ FAUX juste non c'est une binomiale et une Poisson s'exprime pas ainsi

D) On a ; $N(100 ; 0,01)$ FAUX idem

