

# Probabilités conditionnelles, théorème de Bayes indépendance en probabilités

## Définitions de base

$\Omega$  Ensemble fondamental, l'univers :  $P(\Omega)=1$  cela représente 100% des évènements, la probabilité est certaine. [Exemple : *tous les étudiants en PACES de Nice*]

$P(A)$  : Probabilité de l'évènement A. [ex : *Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice ait les yeux bleus*]

$P(\bar{A})$  ou  $P(\complement A)$  : Probabilité de l'évènement contraire de A, c'est-à-dire ne pas avoir A. [ex : *Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice n'ait PAS les yeux bleus*]

$P(A \cap B) = P(B \cap A)$  : Probabilité de A **et** de B ou Probabilité de B et A (*c'est pareil* 😊) ou probabilité de A **inter** B (car c'est l'intersection de l'évènement A et B). [ex : *Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice ait les yeux bleus et s'appelle Léo*]

## I. Probabilités conditionnelles

### A. Introduction

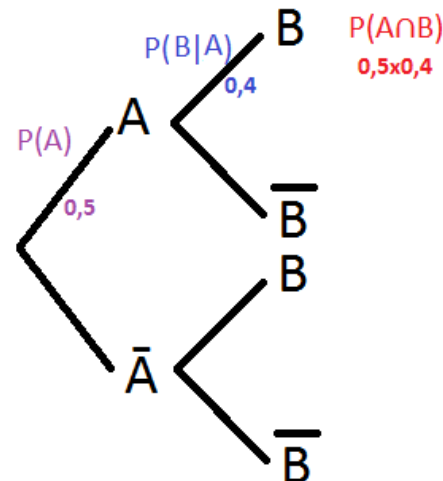
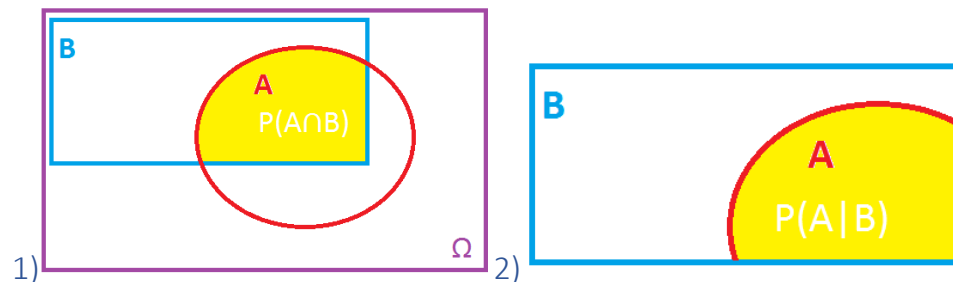
Définition : Une probabilité conditionnelle s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un évènement A à **condition** qu'un autre évènement B ait déjà été réalisé.

Remarque : Ainsi on s'intéresse seulement aux évènements A réalisés parmi les évènements B réalisés et non plus parmi tout l'univers.

Notation :  $P(A|B) = P_B(A)$  Probabilité de A sachant B réalisé.

⚠ :  $P(A|B) \neq P(A \cap B)$  Les probabilités conditionnelles sont à distinguer des probabilités d'une intersection ! ⚠

Schémas :



- 1)  $P(A \cap B)$  (probabilité d'une intersection) on regarde sur tout l'univers  $\Omega$ , car on cherche la probabilité d'A ET B sur l'univers.
- 2)  $P(A|B)$  (probabilité conditionnelle) on regarde parmi la population B seulement, car on cherche la probabilité de A PARMI B.
- 3) Sur cet arbre on voit en bleu illustré la proba conditionnelle.

3)

Exemple : La probabilité qu'un PACES ait **perfecté la biostat sachant** qu'il a **assisté à tous les cours** est égal au **nombre de PACES qui ont perfecté la Biostat et assisté à tous les cours** sur le **nombre de PACES qui a assisté à tous les cours**!

### B. Définition de la probabilité conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

### C. Théorème de la multiplication

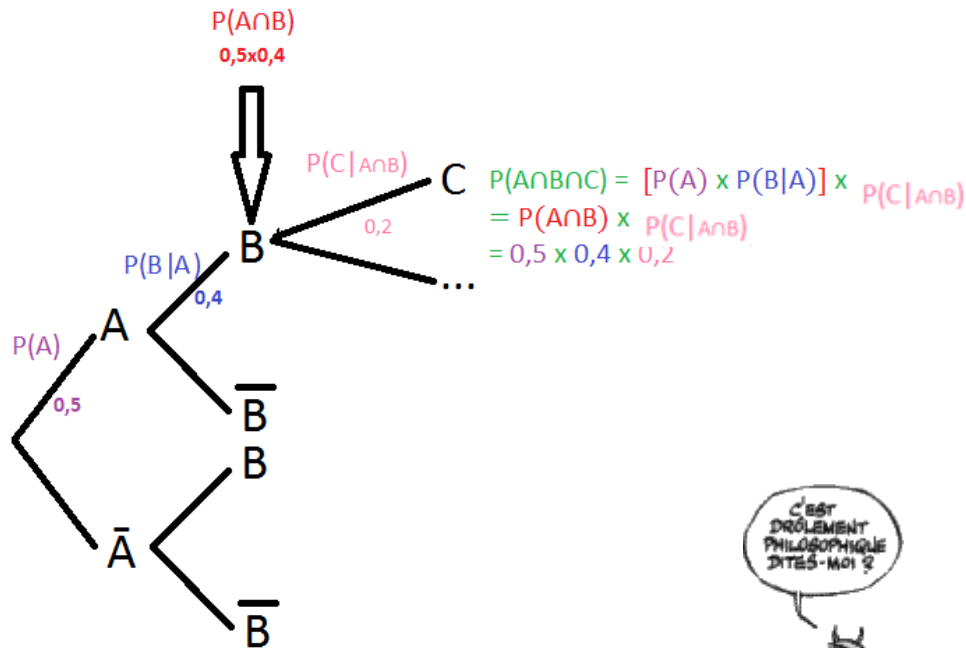
$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A | B) \times P(B) = P(B | A) \times P(A)$$

Remarque : En UE4 il est important de savoir le nom du théorème de la formule qu'on utilise 😊

Remarque bis : Le théorème peut se généraliser pour plus de deux événements de la manière suivante :

$$P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1) \dots P(A_n/A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{n-1})$$

Schéma : On cherche la probabilité d'avoir l'événement A, B et C!

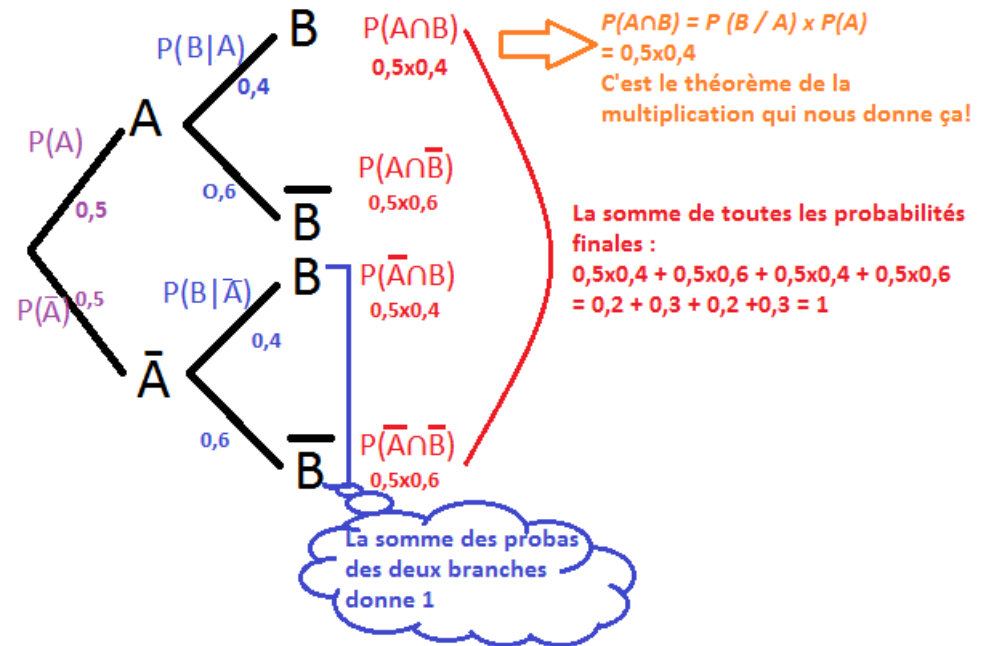


### II. Diagramme en arbre

Définition :

- Soit une suite finie d'événements quand une expérience dépend du résultat de l'expérience passée ce sont des probabilités conditionnelles.
  - On utilise les **arbres** pour illustrer les situations !
1. Selon le **théorème de la multiplication** la probabilité d'un chemin est le produit de chaque branche du chemin !
  2. Les chemins s'excluent mutuellement.
  3. La somme de toutes les probabilités des finalités doit être 1.

Schéma :



Exemple : Si l'événement A considéré est « avoir plus de 20 ans » et l'événement B « être blond ».

- Le chemin 1 :  $P(A \cap B)$  est « avoir plus de 20 ans ET être blond »,
- Le chemin 2 est :  $P(A \cap \bar{B})$  est « avoir plus de 20 ans ET **ne pas** être blond »,

On comprend bien qu'un chemin est exclusif, les deux chemins ne sont pas compatibles ! Ils s'excluent donc (*on ne peut pas être blond et ne pas être blond à la fois*).

### III. Formule et théorème de Bayes

#### A. Formule de Bayes

**Définition d'une proba conditionnelle :**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

+

**Théorème de la multiplication :**

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A | B) \times P(B) = P(B | A) \times P(A)$$

=

**Formule de Bayes :**

$$P(B | A) = \frac{P(A | B) \times P(B)}{P(A)}$$

Remarque : Ainsi à partir de la définition de la proba conditionnelle et du théorème de la multiplication en remplaçant dans les formules on trouve la formule de Bayes!

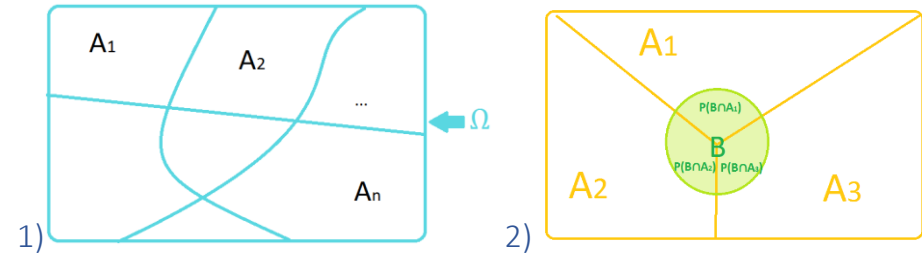
#### B. Théorème de Bayes

Introduction :

Soit un univers  $\Omega$  formé par un ensemble d'événements de  $A_1$  à  $A_n$ .

On dit que cet ensemble d'événements de  $A_1$  à  $A_n$  constitue une **partition** de  $\Omega$ .

Schéma :



1) Ensemble d'événements de  $A_1$  à  $A_n$  dont l'union forme  $\Omega$

2) Illustration du théorème des probabilités totales :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$

**Théorème des probabilités totales :**

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

+

**Théorème de la multiplication :**

$$P(B \cap A_n) = P(B | A_n) \times P(A_n)$$

=

$$P(B) = P(B | A_1) \times P(A_1) + P(B | A_2) \times P(A_2) + \dots + P(B | A_n) \times P(A_n)$$

+

**Formule de Bayes :**

$$P(A_n | B) = \frac{P(B | A_n) \times P(A_n)}{P(B)}$$

=

**Théorème de Bayes :**

$$P(A_n | B) = \frac{P(B | A_n) \times P(A_n)}{P(A_1 | B) \times P(A_1) + P(A_2 | B) \times P(A_2) + \dots + P(A_n | B) \times P(A_n)}$$

## IV. Événements indépendants

### A. Introduction

Définition :

Deux événements sont **indépendants** si  $P(B \cap A) = P(A) \times P(B)$ .

Les événements sont indépendants dans la mesure où la probabilité de réalisation de A ne change pas avec la réalisation de B. Soit  $P(A|B)=P(A)$  et  $P(B|A)=P(B)$  !

Conséquences :

- A et  $\bar{B}$  sont indépendants.
- $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.
- $\bar{A}$  et B sont indépendants.

Cas de trois événements :

Soient A, B et C.

**Si ils sont indépendants deux à deux** (A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B).

**Et si**  $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

**Alors ces trois événements sont indépendants !**

Remarque : La seconde condition n'est pas une conséquence de la première. C'est-à-dire que les trois événements peuvent être indépendants deux à deux mais on peut avoir :  $P(A|B \cap C) \neq P(A)$ .

### B. Indépendance et inclusion

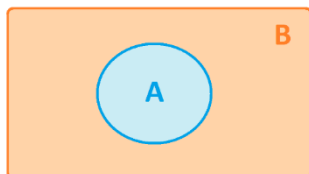
Définition :

$A \subset B$  : A est **inclus** dans B  $\rightarrow P(A \cap B) = P(A)$

Remarque : On a  $P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$  avec la proba de B sachant A égale à 1, car A étant inclus dans B on est certain d'avoir B !

Exemple : A : « être blond » B : « avoir les cheveux clairs », les deux ne sont pas indépendants et A est inclus dans B.

Schéma :



Conséquences :

**Formule de Bayes quand  $A \subset B$  :**

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A | B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

**Formule de Bayes quand  $B \subset A$  :**

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(B | A) = \frac{P(B)}{P(A)}$$

$\nabla$  A et B ne sont **PAS** indépendants  $\nabla$

### C. Indépendance et exclusion

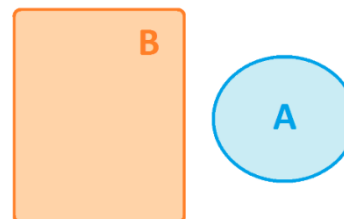
Définition :

$(A \cap B) = \emptyset$  ;  $P(A \cap B) = 0$  : A et B sont **exclusifs/disjoints/incompatibles**

$\rightarrow P(A|B) = P(B|A) = 0$

Exemple : A : « être majeur » B : « être mineur », les deux ne peuvent pas se produire en même temps ils sont incompatibles.

Schéma :



$\nabla$  A et B ne sont **PAS** indépendants  $\nabla$

$\nabla$ A ne pas confondre $\nabla$	
Incompatibles=exclusifs=disjoints	Indépendants
Ne fait <b>PAS</b> intervenir leur probabilité	Liés à leur probabilité
Ne peuvent <b>PAS</b> se produire en même temps	Peuvent se produire en même temps (la réalisation d'un n'influençant pas l'autre)
Défini par : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Donne : $P(A \cap B) = 0$	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$