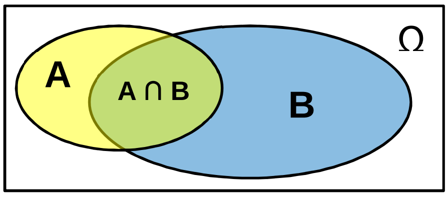
PROBABILITES CONDITIONNELLES, THEOREME DE BAYES INDEPENDANCE EN PROBABILITE

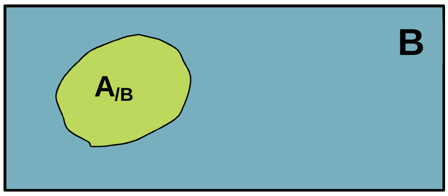
I. Probabilité conditionnelle :

A. Définitions :

Soit A et B deux événements quelconques d'un ensemble fondamental Ω. Cet ensemble est muni d'une loi de probabilité P sur $\mathrm{P}(\Omega)$. On s'intéresse ici à P(A) une fois l'évènement B réalisé. Ainsi, *on restreint l'ensemble des résultats Ω possibles à B*.

$$P\ (A \text{ sachant } B) = P_B(A) = P\ (A_{/B}) = \frac{\boldsymbol{P(A \cap B)}}{\boldsymbol{P(B)}}$$





<u>Exemple d'application</u> :

Soit l'événement A « Avoir un cancer des poumons » et l'événement B « Etre fumeur régulier ».
P (A) = Probabilité d'avoir un cancer des poumons dans la population générale (Fumeur + non fumeur).
P (A) = 0,03

P (B) = Probabilité de compter parmi les fumeurs réguliers dans la population générale.
P (B) = 0,1

$P(A \cap B)$ = Probabilité par rapport à l'ensemble de la population Ω d'être à la fois fumeur régulier ET de développer un cancer des poumons.
P ($A \cap B$) = 0,02

P (A /B) = Probabilité chez les fumeurs de développer un cancer des poumons.
→ **P (A /B)** = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}02}{0{,}1}$ = **0,2** soit 20% de risque pour un fumeur de développer un cancer des poumons.

B. Théorème de la multiplication :

Si on reprend la relation : $P\ (A_{/B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, et $P\ (B_{/A}) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

on peut en déduire que :

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(B \cap A) = P\ (A_{/B})\ x\ P(B) = P\ (B_{/A})\ x\ P(A)}$$

Exemple concret :

Un jeu de 32 cartes. Je tire 3 cartes successivement sans les remettre dans le paquet.
Je souhaite connaître la probabilité pour tirer 3 As.
Probabilité (1er tirage = AS, 2^{e} tirage = As, 3^{e} tirage = As) = Probabilité (1er AS ∩ 2^{e} As ∩ 3^{e} As).

P (1er As) = $\frac{4}{32}$; P(2^{e} As / $_{1er\ As}$) = $\frac{3}{31}$; P(3^{e} As / $_{1er\ As\ \cap\ 2e\ As}$) = $\frac{2}{30}$

On déduit: P (1er AS ∩ 2^{e} As ∩ 3^{e} As) = $\frac{4}{32} \times \frac{3}{31} \times \frac{2}{30}$

Remarque: P (1er AS ∩ 2^{e} As ∩ 3^{e} As) se dit aussi P(1er AS **ET** 2^{e} As **ET** 3^{e} As).
Dans ce cas on multiplie les probabilités conditionnelles entre elles : $\frac{4}{32} \times \frac{3}{31} \times \frac{2}{30}$

⇨ Du théorème de la multiplication découle la formule de Bayes

II. Formules et Théorème de Bayes :

A. Formule de Bayes :

Soient A et B deux événements quelconques d'un ensemble fondamental Ω muni d'une loi de probabilité P sur P(Ω).
On se place dans le cas d'une probabilité conditionnelle P(A / $_B$).
Du théorème de la multiplication on peut en déduire la formule de Bayes :

⇨Théorème de la multiplication : **P(A∩B) = P(B∩A) = P (A $_{/B}$) x P(B) = P (B $_{/A}$) x P(A)**

⇨Formule de Bayes :

$$\mathbf{P\ (B_{/A}) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P\ (A\ |B)x\ P(B)}{P(A)}}$$

$$\mathbf{P\ (A_{/B}) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\ |A)x\ P(A)}{P(B)}}$$

Exemple d'application (suite) :

On rappelle l'événement A « Avoir un cancer des poumons » et l'événement B « Etre fumeur régulier ».
P (A) = Probabilité d'avoir un cancer des poumons dans la population générale (Fumeur + non fumeur).
P (A) = 0,03

P (B) = Probabilité de compter parmi les fumeurs réguliers dans la population générale. **P (B) = 0,1**

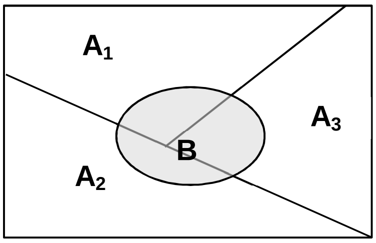
P(A ∩ B) = Probabilité par rapport à l'ensemble de la population Ω d'être à la fois fumeur régulier **ET** de développer un cancer des poumons. **P (A ∩ B) = 0,02**

P (A /B) = Probabilité chez les fumeurs de développer un cancer des poumons.
→ **P (A /$_B$)** = $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}02}{0{,}1}$ = **0,2** soit 20% de risque pour un fumeur de développer un cancer des poumons.

→ On cherche désormais à déterminer la probabilité pour une personne atteinte d'un cancer des poumons d'être un fumeur régulier = P (B /$_A$).

P (B /$_A$) = $\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B) \times P(B)}{P(A)} = \frac{0,2 \times 0,1}{0,03} = \frac{2}{3}$ = **0,67** soit 67% de fumeurs réguliers parmi les personnes atteintes d'un cancer des poumons.

B. Théorème de Bayes :



Les événements A_1, A_2 et A_3 forment une partition de l'ensemble fondamentale Ω. **A_1, A_2 et A_3 sont forcément disjoints !**

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$

Soit l'événement quelconque « **B** » inclus dans Ω.

⇨ Théorème des probabilités totales appliqué à B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

⇨ Application du Théorème de la multiplication:

$$P(B) = P(B/_{A1}) \times P(A_1) + P(B/_{A2}) \times P(A_2) + P(B/_{A3}) \times P(A_3)$$

⇨ Application de la formule de Bayes pour **A_1** par exemple (l'application pourrait être pour A_2 ou A_3 également):

$$P(A_{1\,/B}) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B|A1) \times P(A1)}{P(B)}$$

⇨ Il en découle le **Théorème de Bayes:**

On remplace simplement P(B) par P(B/A1) x P(A1) + P(B/A2) x P(A2) + P(B/A3) x P(A3)

$$P(A_{1\,/B}) = \frac{P(B|A1) \times P(A1)}{P(B/A1) \times P(A1) + P(B/A2) \times P(A2) + P(B/A3) \times P(A3)}$$

III. Diagramme en arbre :

Soit une séquence finie d'expériences avec un nombre fini de résultats. On considère que **les résultats possibles de l'expérience n dépendent de l'expérience n-1**. On parle de **probabilités conditionnelles** comme vu précédemment.

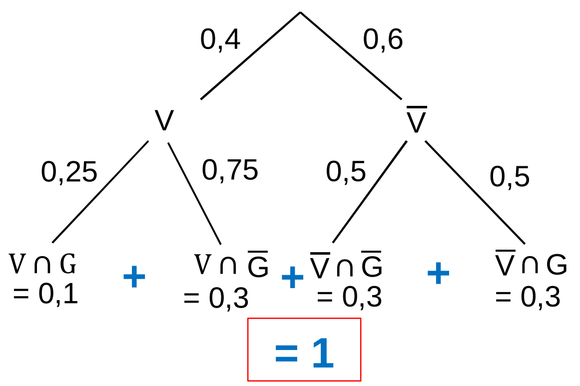
La manière la plus simple de représenter ce genre de séries d'expériences est un **diagramme en arbre**. Pour calculer la probabilité de « chaque feuille » on utilisera le **théorème de la multiplication.**

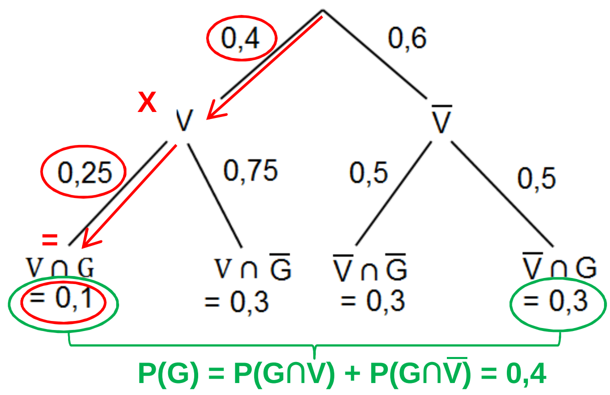
Exemple : On considère un échantillon de 100 personnes tirées au sort. Parmi cet échantillon, 40 ont été vaccinées contre la grippe soit 40%. Les 60 personnes restantes n'ont pas reçu cette prévention soit 60%. Parmi les patients vaccinés, 10 ont tout de même contracté la grippe, soit 25% d'entre eux. 30 des 60 personnes non vaccinées ont également eu la grippe soit 50% d'entre elles.

Soit « V » l'évènement « être vacciné », «$\overline{V}$» l'événement « Non vacciné », « G » l'événement « Avoir la grippe » et « $\overline{G}$ » l'événement « Ne pas avoir la grippe ».

Probabilités directement issues de l'énoncé :
P (V) = 0,4
P ($\overline{V}$) = 0,6
P(G / V) = 0,25
P(G / $\overline{V}$) = 0,5

Construction de l'arbre :





1. ***La probabilité qu'un chemin particulier de l'arbre se réalise est, d'après le théorème de la multiplication, le produit des probabilités de chaque branche du chemin***. Ici, par exemple cela signifie que la probabilité qu'une personne soit à la fois vaccinée et déclare la grippe ($V \cap G$) est de 0,1.

2. ***Les chemins s'excluent mutuellement.*** Ici, par exemple, le fait d'être vacciné exclue totalement la partie de l'arbre concernant les personnes non vaccinées.

3. ***La somme de toutes les probabilités finales obtenues doit être de 1***.

Probabilités calculées à partir de l'énoncé :

P ($\overline{G}$ / V) = 1- P (G / V) = 1- 0,25 = 0,75
P ($\overline{G}$ / $\overline{V}$) = 1- P (G / $\overline{V}$) = 1- 0,5 = 0, 5

P ($V \cap G$) = P (G / V) x P (V) = 0,25 x 0,4 = 0,1
P ($V \cap \overline{G}$) = P ($\overline{G}$ / V) x P (V) = 0,75 x 0,4 = 0,3

P ($\overline{V} \cap G$) = P (G / $\overline{V}$) x P ($\overline{V}$) = 0,5 x 0,6 = 0,3
P ($\overline{V} \cap \overline{G}$) = P ($\overline{G}$ / $\overline{V}$) x P ($\overline{V}$) = 0,5 x 0,6 = 0,3

ATTENTION

Ne pas confondre :

Probabilité conditionnelle : Proportion de sujet présentant A **PARMI** la population B : **P (A / B)**

Probabilité d'une intersection : Proportion de tous les sujets qui présentent à la fois A **ET** B : **P (A ∩ B)**

IV. Les évènements indépendants :

A. Définition :

Deux évènements A et B sont dits indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exemple :
L'événement « A » « réussir le concours de médecine », et l'événement « B » « Avoir eu la varicelle étant enfant », sont objectivement deux événements totalement indépendants. Donc la probabilité de réussir la PAES ET d'avoir eu la varicelle, soit $P(A \cap B)$, est bien $P(A) \times P(B)$.

Le contre-exemple:
L'évènement « A » « Etre un fumeur régulier », et l'événement « B » « développer un cancer du poumon ». Développer un cancer du poumon pouvant être une conséquence du tabagisme, les événements A et B ne sont donc pas indépendants.
Dans ce cas $\mathbf{P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)}$

Ainsi, pour deux événements indépendants A et B, la probabilité pour que A se produise ne sera pas influencée par la probabilité que B se produise et inversement. D'où :

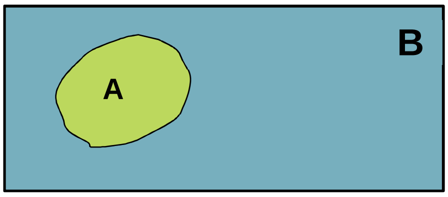
$$P(B / A) = P(B)$$
$$P(A / B) = P(A)$$

B. Indépendance et inclusion :

Soient deux évènements A et B tels que **A C B**. On a alors $\mathbf{A \cap B = A}$ et $\mathbf{P(A \cap B) = P(A)}$.
On a:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

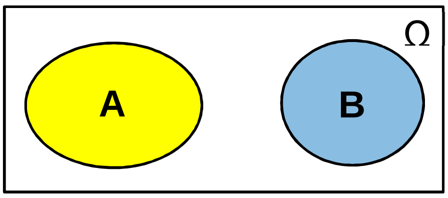


Ainsi, lorsque A est inclus dans B, les deux évènements ne peuvent pas être indépendants.

C. Independence et exclusion

Soient deux évènements A et B disjoints. Alors, $\mathbf{P(A \cap B) = 0}$, d'où

$$P(A / B) = P(B / A) = 0$$



Lorsque deux évènements sont disjoints, ils ne sont pas indépendants.

ATTENTION

Ne pas confondre :

Incompatibles : P(AUB) = P(A) + P(B) ≠ **Indépendants : P(A∩B) = P(A) x P(B)**