Probabilités conditionnelles, théorème de Bayes indépendance en probabilités

Définitions de base

Ω Ensemble fondamental, l'univers : P(Ω)=1 cela représente 100% des évènements, la probabilité est certaine. [Exemple : *tous les étudiants en PACES de Nice*]

P(A) : Probabilité de l'événement A. [ex : *Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice ait les yeux bleus*]

P(Ā) ou P(∁A) : Probabilité de l'événement contraire de A, c'est-à-dire ne pas avoir A. [ex : *Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice n'ait PAS les yeux bleus*]

P(A∩B)=P(B∩A) : Probabilité de A **et** de B ou Probabilité de B et A (*c'est pareil*☺) ou probabilité de A **inter** B (car c'est l'intersection de l'évènement A et B). [ex : *Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice ait les yeux bleus et s'appelle Léo*]

I. Probabilités conditionnelles

A. Introduction

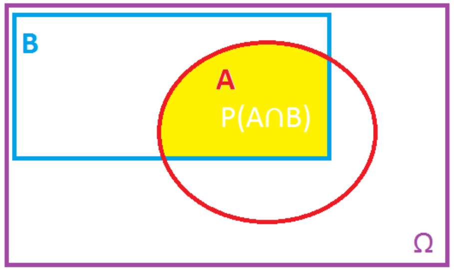
Définition : Une probabilité conditionnelle s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un événement A à **condition** qu'un autre événement B ait déjà été réalisé.

Remarque : *Ainsi on s'intéresse seulement aux évènements A réalisés parmi les événements B réalisés et non plus parmi tout l'univers.*

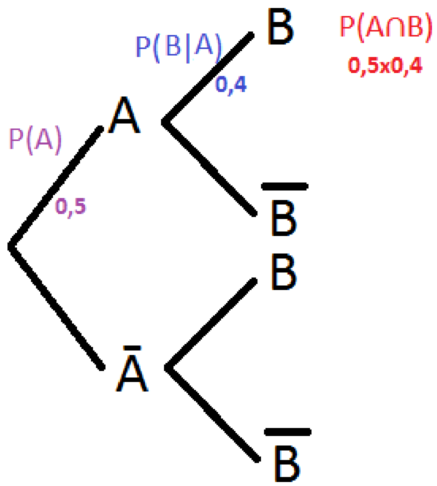
Notation : **P(A|B)=P$_B$(A)** Probabilité de A sachant B réalisé.

/!\ : **P(A|B)≠P(A∩B)** Les *probabilités conditionnelles* sont à distinguer des *probabilités d'une intersection* ! /!\

Schémas :

1)


2)


3)


1) P(A∩B) (probabilité d'une intersection) on regarde sur tout l'univers Ω, car on cherche la probabilité d'A ET B sur l'univers.

2) P(A|B) (probabilité conditionnelle) on regarde parmi la population B seulement, car on cherche la probabilité de A PARMI B.

3) Sur cet arbre on voit en bleu illustré la proba conditionnelle.

Exemple : La probabilité qu'un PACES ait perfecté la biostat **sachant** qu'il a assisté à tous les cours est égal au nombre de PACES qui ont perfecté la Biostat **et** assisté à tous les cours **sur** le nombre de PACES qui a assisté à tous les cours!

B. Définition de la probabilité conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

C. Théorème de la multiplication

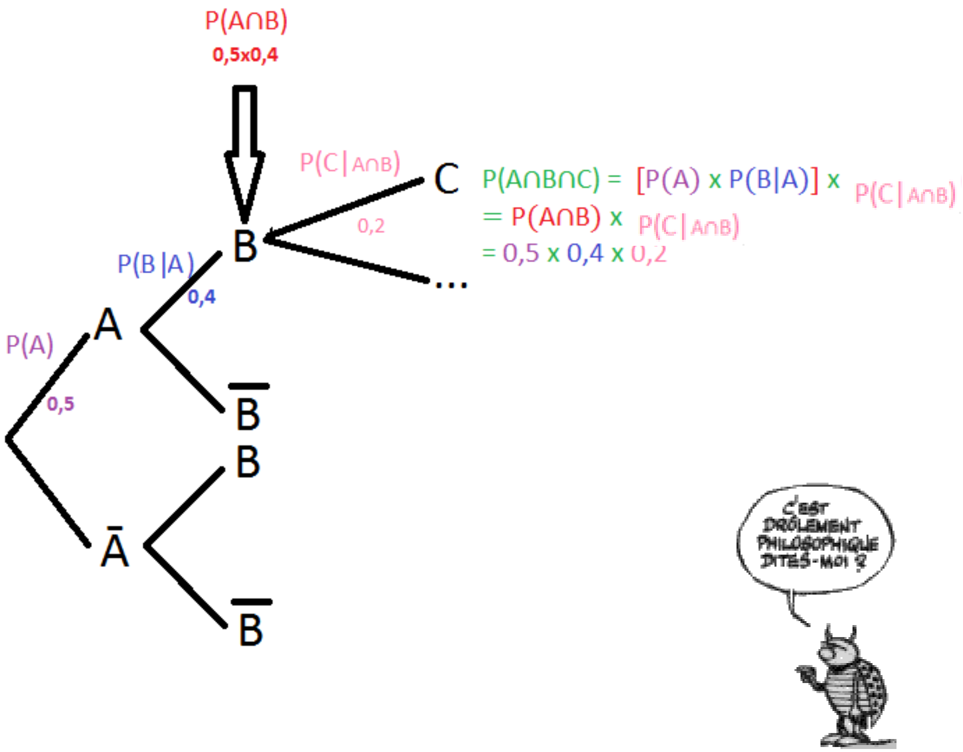
$$P(A\cap B) = P(B\cap A) = P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

Remarque : *En UE4 il est important de savoir le nom du théorème de la formule qu'on utilise* 😉

Remarque bis : *Le théorème peut se généraliser pour plus de deux événements de la manière suivante :*

$$P(A_1 \cap A_2 ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\dots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1})$$

Schéma : On cherche la probabilité d'avoir l'événement A, B et C!



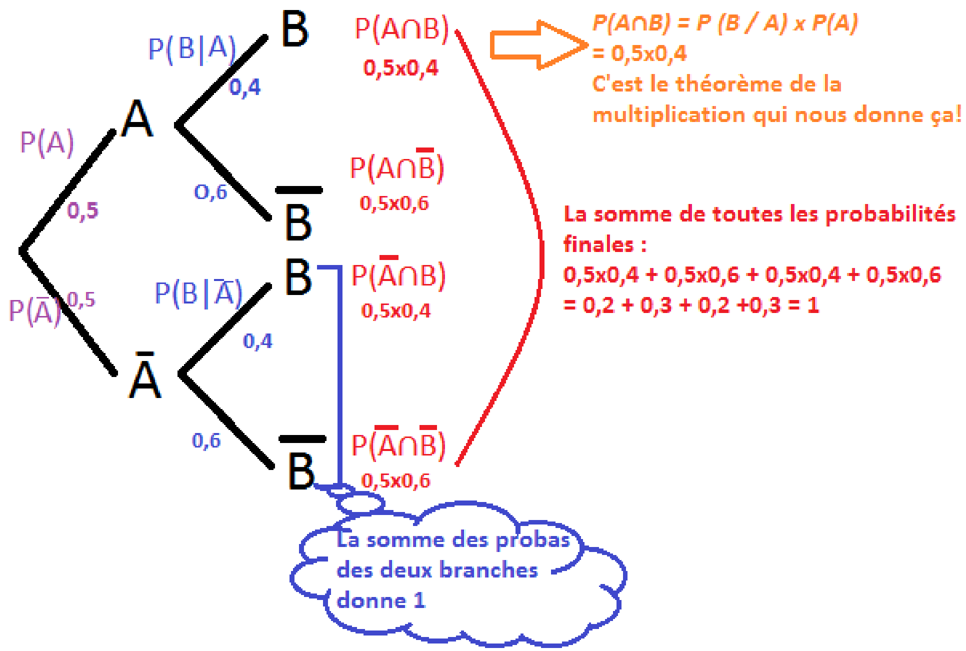
II. Diagramme en arbre

Définition :

- Soit une suite finie d'événements quand une expérience dépend du résultat de l'expérience passée ce sont des probabilités conditionnelles.
- On utilise les **arbres** pour illustrer les situations !

1. Selon le **théorème de la multiplication** la probabilité d'un chemin est le produit de chaque branche du chemin !
2. Les chemins s'excluent mutuellement.
3. La somme de toutes les probabilités des finalités doit être 1.

Schéma :



Exemple : Si l'évennement A considéré est « avoir plus de 20 ans » et l'évenement B « être blond ».

- Le chemin 1 : P(A∩B) est « avoir plus de 20 ans ET être blond »,
- Le chemin 2 est : P(A∩ B̄) est « avoir plus de 20 ans ET **ne pas** être blond »,

On comprend bien qu'un chemin est exclusif, les deux chemins ne sont pas compatibles ! Ils s'éxcluent donc (*on ne peut pas être blond et ne pas être blond à la fois*).

III. Formule et théorème de Bayes

A. Formule de Bayes

Définition d'une proba conditionnelle :

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(B\cap A) = P(A\cap B) = P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

=

Formule de Bayes :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \times P(B)}{P(A)}$$

<u>Remarque</u> : Ainsi à partir de la définition de la proba conditionnelle et du théorème de la multiplication en remplaçant dans les formules on trouve la formule de Bayes!

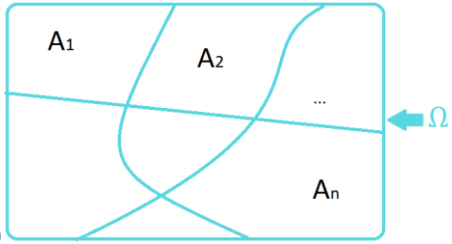
B. Théorème de Bayes

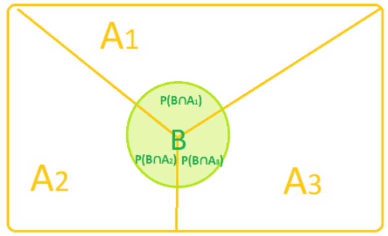
<u>Introduction</u> :

Soit un univers Ω formé par un ensemble d'événements de A_1 à A_n.

On dit que cet ensemble d'événements de A_1 à A_n constitue une **partition** de Ω.

<u>Schéma</u> :

1) 

2) 

1) Ensemble d'événements de A_1 à A_n dont l'union frome Ω

2) Illustration du théorème des probabilités totales :

$$P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + P(B\cap A_3)$$

Théorème des probabilités totales :

$$P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + \dots + P(B\cap A_n)$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(B\cap A_n) = P(B \mid A_n) \times P(A_n)$$

=

$$P(B) = P(B \mid A_1)\times P(A_1) + P(B \mid A_2)\times P(A_2) + \dots + P(B \mid A_n)\times P(A_n)$$

+

Formule de Bayes :

$$P(A_n \mid B) = \frac{P(B \mid An) \times P(An)}{P(B)}$$

=

Théorème de Bayes :

$$P(An \mid B) = \frac{P(B \mid An) \times P(An)}{P(B \mid A1)\times P(A1) + P(B \mid A2)\times P(A2) + \dots + P(B \mid An)\times P(An)}$$

IV. Evénements indépendants

A. Introduction

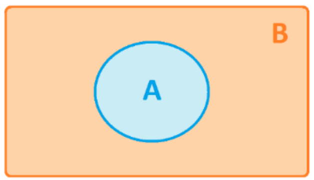
<u>Définition</u> :
Deux événements sont indépendants si P(B∩A) = P(A) x P(B).
Les événements sont indépendants dans la mesure où la probabilité de réalisation de A ne change pas avec la réalisation de B. Soit **P(A|B)=P(A)** et **P(B|A)=P(B)** !

<u>Conséquences</u> :
- A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
- $\overline{A}$ et B sont indépendants.

<u>Cas de trois événements</u> :
Soient A, B et C.
Si ils sont indépendants deux à deux (*A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B*).
Et si P(A∩B∩C)=P(A)xP(B)xP(C)
Alors ces trois événements sont indépendants !
Remarque : *La seconde condition n'est pas une conséquence de la première. C'est-à-dire que les trois événements peuvent être indépendants deux à deux <u>mais</u> on peut avoir :* P(A|B∩C) ≠ P(A).

B. Indépendance et inclusion

<u>Définition</u> :
A ⊂ B : A est **inclus** dans B → P(A∩B)=P(A)
Remarque : On a P(A∩B)=P(B|A)xP(A) avec la proba de B sachant A égale à 1, car A étant inclus dans B on est certain d'avoir B !
<u>Exemple</u> : A : « être blond » B : « avoir les cheveux clairs », les deux ne sont pas indépendants et A est inclus dans B.
<u>Schéma</u> :



<u>Conséquences</u> :

Formule de Bayes quand A ⊂ B :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Formule de Bayes quand B ⊂ A :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(B \mid A) = \frac{P(B)}{P(A)}$$

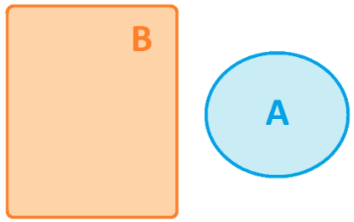
/!\ A et B ne sont PAS indépendants /!\

C. Indépendance et exclusion

<u>Définition</u> :
(A∩B)=∅ ; P(A∩B)=0 : A et B sont **exclusifs/disjoints /incompatibles**

→ **P(A|B)=P(B|A)=0**

<u>Exemple</u> : A : « être majeur » B : « être mineur », les deux ne peuvent pas se produire en même temps ils sont incompatibles.
<u>Schéma</u> :



/!\ A et B ne sont PAS indépendants /!\

/!\ A ne pas confondre /!\	
Incompatibles=exclusifs=disjoints	**Indépendants**
Ne fait PAS intervenir leur probabilité	Liés à leur probabilité
Ne peuvent PAS se produire en même temps	Peuvent se produire en même temps (*la réalisation d'un n'influençant pas l'autre*)
Défini par : P (A∪B) = P(A) + P(B) Donne : **P (A∩B)=0**	P (A∩B) = P(A) x P(B)