Tut'Rentrée

Evènements et probabilités élémentaires

La théorie des **probabilités** est une branche des **mathématiques** qui permet de modéliser les phénomènes où le hasard intervient. On sélectionne un **échantillon** de la population **au hasard**, puis on **extrapole** à l'ensemble de la population les résultats obtenus sur cet échantillon.

- On appelle **population** un ensemble **d'objets** très grand voire infini. Ex : L'ensemble des habitants de France.

- On appelle **échantillon** tout **sous-ensemble** de cette population. C'est sur lui que l'on établit généralement les études statistiques. Ex : Les habitants de Nice.

Mais travailler sur des échantillons ou extraits pose 2 types de problèmes :

1. un problème de **représentativité.** *(A l'issue d'une étude statistique sur les habitants de Nice, peut-on extrapoler une conclusion à l'ensemble de la population Française ?)*

2. un problème de **confiance** *(On reproduit, cette étude statistique sur les habitant de Paris, Limoges ou Marseille, obtiendrait on les mêmes résultats ?)*

I Ensembles et éléments:

A Quelques définitions :

- un **ensemble** est une **liste**, une collection d'objets définis

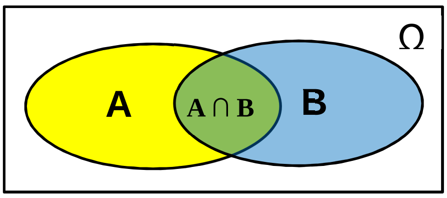
- les **objets** appartenant à cet ensemble sont appelés **éléments**.

On a les notations suivantes :

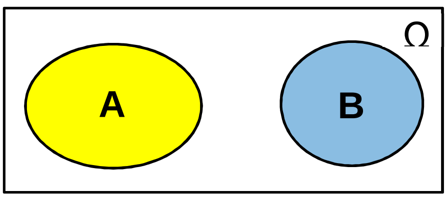
1. Ω ou E ensemble universel
2. ϵ = appartient
3. C = inclus
4. Ø = ensemble vide

B Les opérations :

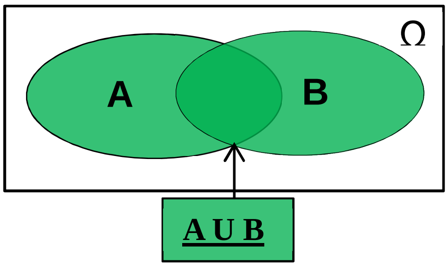
- **A ∩ B** ou **intersection**, c'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.



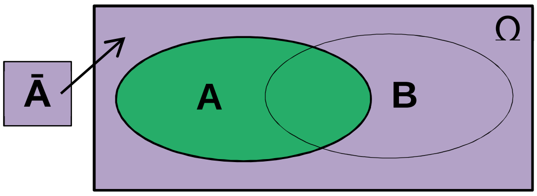
Si l'ensemble **A ∩ B** est vide on dira que A et B sont **disjoints**.



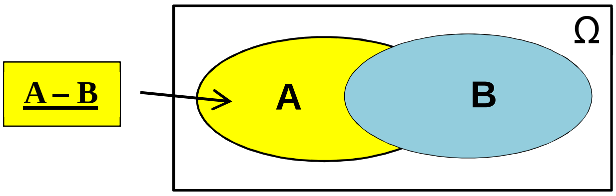
- **A U B** ou **union**, c'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B:



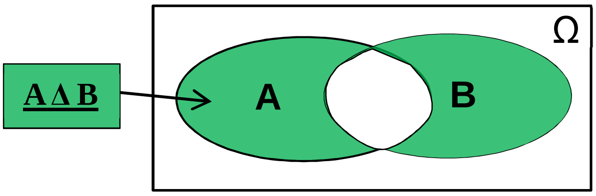
- **Ā** ou **complémentaire** de A. C'est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A, c'est à dire :



- **A – B** ou **différence**, c'est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B ou **complémentaire de B relatif à A** :



- **A Δ B** ou **différence symétrique**, c'est l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à A ou à B mais pas à A ∩ B. C"est un lien de nature **exclusive**.



On peut aussi dire que : **AΔB = A U B - A ∩ B**

C Ensembles :

- Un ensemble peut être :

1. **fini** : il contient un nombre fini d'éléments (ex : { 1,2,3,4}) . L'ensemble vide est aussi un ensemble fini. *(Nota : un ensemble fini est forcément dénombrable)*

2. **Infini :** il contient un nombre infini d'éléments (ex : {ensemble des entiers naturels}).

Nota : un ensemble infini peut être dénombrable ou indénombrable :

- **dénombrable** : à chaque éléments de l'ensemble correspond un unique entier naturel.
  Ex : Ensemble A = { n : n est un entier pair}
- **indénombrable** (généralement des intervalles de R)

• Soit A et B deux ensembles, on appelle **"ensemble produit" l'ensemble A x B**, c'est l'ensemble des couples **ordonnés** (a,b) où a Є A et b Є B.

Exemple : A = {a,b,c} et B = {1,2}. A x B = {(a,1) (a,2) (b,1) (b,2) (c,1) (c,2) }

On peut généraliser ce produit à n ensembles *(appelé également « produit cartésien »)* :
Ex : E_1 x E_2 x E_3 x… x E_n.

$E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots \times E_n = \{\underbrace{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}_{\text{n-uplet}}\ (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)\ (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n) \ldots\}$

Exemple pour **n=2** : A = {a,b,c} et B = {1,2}. A x B = $\{\underbrace{(a,1)}_{\text{2-uplet } (= \text{couple})}$ (a,2) (b,1) (b,2) (c,1) (c,2) }

• Le **cardinal** d'un ensemble ou **card (E)** est le nombre d'éléments que contient un ensemble dénombrable.

Exemple : On lance un dé : Soit l'Univers Ω = ensemble des résultats possibles. Ω = {1,2,3,4,5,6}. Donc le Cardinal de Ω = 6.

Dans le cas d'un « ensemble produit » A x B on aura :

Card (A x B) = Card A x Card B

Nota: Le nombre d'éléments contenus dans un « ensemble produit » (A x B) est égal au produit du nombre d'éléments contenus dans chacun des ensembles A et B.

Exemple : On lance 2 dés différents (que l'on peut distinguer : dé n°1 et dé n°2):
Soit l'Univers Ω_1=ensemble des résultats possibles pour le dé n°1, Ω_1={1,2,3,4,5,6} et Card Ω_1 = 6.

Soit l'Univers Ω_2 =ensemble des résultats possibles pour le dé n°2 Ω_2={1,2,3,4,5,6}et Card Ω_2 = 6.

Soit l'Univers Ω, l'ensemble des résultats possibles à l'issue du lancer des 2 dés :
Card Ω = Card (Ω_1 x Ω_2) = Card Ω_1 x Card Ω_2 = 6x6 = 36

D Dénombrements :

Type de dénombrement	Ordonné / Non ordonné	Remise / Sans Remise	Formule
p-liste avec remise	Ordonné	Remise	**Card (E^p) = (Card E)^p**
Exemple : Soit un jeu de 32 cartes: on tire successivement 3 cartes en remettant à chaque fois la carte dans le paquet (= avec remise). Le cardinal de l'Univers Ω de l'ensemble des résultats possibles = 32^3. On souhaite ici connaître le nombre triplet de cartes possibles en tenant compte de l'ordre. Ex : (As de cœur, Roi de pique, Dame de trèfle), (Dame de trèfle, Roi de pique, As de cœur),…, (10 de carreau, As de pique, valet de carreau)			

<table>
<tr><td>Arrangement de n éléments pris p à p</td><td>Ordonné</td><td>Sans Remise</td><td>$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Exemple</u> : On dispose de 3 cartes : As, Roi , Dame. On tire <u>SUCCESSIVEMENT</u> (≠ simultanément !) 2 cartes <u>sans remise</u>. Le nombre d’arrangements possibles (cad le nombre de couples de cartes possibles <u>en tenant compte de l’ordre</u> de tirage) est égal à :
$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3\times2\times1}{1}$ = 6, soit (As,Roi) (As,Dame) (Roi, As) (Dame, As) (Dame, Roi) (Roi, Dame)</td></tr>
<tr><td>Arrangement avec répétition</td><td>Ordonné</td><td>Avec Remise</td><td>$\mathbf{p^n}$</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Exemple</u> : Combien de noms (même improbables) à 3 lettres peut-on écrire avec l’ensemble de l’alphabet (26 lettres) ? Réponse : 26^3 (ex : ACH, CHA, CJK, VBN, …)</td></tr>
<tr><td>Permutation d’un ensemble fini à n éléments</td><td>Avec Ordre</td><td>Sans Remise</td><td>$\mathbf{P_n = n\,!}$</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Exemple</u> : On dispose de 4 cartes : As, Roi, Dame et Valet de cœur. On les tire une à une <u>sans les remettre</u> jusqu’à ce qu’il n’y en ait plus.
Le nombre de suite de cartes (= permutations) possibles est donc :
P_4 = 4 ! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24 permutations. (R, D, V, As) (D, R, V, As) (V, As, R, D)….</td></tr>
<tr><td>Permutations avec « répétition »</td><td>Avec Ordre</td><td>Sans Remise</td><td>$P_n = \frac{n!}{(k1!k2!k3!...kr!)}$</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Exemple</u>: 9 chevaux sont au départ d’une course hippique : 2 chevaux bleus (B_1 et B_2), 3 Rouges (R_1, R_2 et R_3) et 4 Jaunes (J_1, J_2, J_3 et J_4). Le nombre de classements possibles à l’arrivée en ne <u>tenant compte que des catégories est</u> :
$P_9 = \frac{n!}{(k1!k2!k3!)} = \frac{9!}{(2!3!4!)} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(2\times1\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1)} = \frac{7\times6\times5\times3\times2}{1}$ = 42 x 30 = 1260 classements possibles, l’ordre au sein d’une même catégorie n’étant pas important :
(R_1, B_2, J_3, J_4, R_3, B_1, J_2, R_2, J_1) = (R_2, B_1, J_4, J_1, R_1, B_2, J_3, R_3, J_2) par exemple.
n = Nombre total de chevaux au départ de la course.
Il y a 3 catégories de chevaux : Bleu, Rouge et Jaune.
k1 = nombre de chevaux bleus, k2 = nombre de chevaux Rouge, k3 = nombre de chevaux Jaunes.</td></tr>
<tr><td>Combinaison de n éléments pris p à p parties d’un ensemble</td><td>Sans Ordre</td><td>Sans Remise</td><td>$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Exemple</u> : Soit le même exemple que pour les arrangements de n éléments pris p à p : On dispose de 3 cartes : As, Roi, Dame. On tire <u>SIMULTANEMENT</u> (≠ successivement !) 2 cartes sans remise. Le nombre de combinaisons possibles (cad le nombre de paires de cartes possibles <u>en ne tenant pas compte de l’ordre</u> de tirage) est égal à :
$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3\times2\times1}{2}$ = 3, soit : (As,Roi) = (Roi, As), (As,Dame) = (Dame, As), (Dame, Roi) = (Roi, Dame)</td></tr>
</table>

II Eléments de probabilités :

A Définitions :

Phénomène aléatoire : phénomène dont **on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance**, dont le résultat est lié au **hasard**. *Les calculs des probabilités modélisent les phénomènes aléatoires.*

$\neq$

Phénomène déterministe : phénomène dont **on peut prévoir le résultat** à l'avance grâce aux lois de la physique. Ils observent une certaine **régularité de comportement**

- On appelle « **épreuve » une expérience aléatoire**.

Exemple : On lance 3 fois une pièce. Les 3 lancers de la pièce (pile ou face) constituent une épreuve.

- On appelle **Ω** l'**ensemble des résultats** possibles de cette épreuve, c'est **l'évènement certain**. Chaque résultat sera donc forcément un élément de Ω.

Exemple : On réalise l'épreuve citée ci-dessus.
L'ensemble des résultats possibles (Ω) est : ((f,f,f) ; (f,p,f);(f,f,p) ;(f,p,p);(p,f,f);(p,p,f);(p,p,p) ;(p,f,p)). Donc Card Ω = 2^3 = 8 (arrangement avec répétition). A l'issue des trois lancers, on obtiendra forcément un de ces 3 triplets.

- Un **sous-ensemble de Ω** est appelé un évènement. Il s'agit d'un ensemble de résultats. (si Ω est dénombrable).

Exemple : « Obtenir pile au 2ème lancer » constitue un évènement de Ω. Il est composé des résultats de l'expérience suivants : (f,p,f) ;(f,p,p) ;(p,p,f) ;(p,p,p).
Donc ((f,p,f) ;(f,p,p) ;(p,p,f) ;(p,p,p)) = sous ensemble ou évènement « obtenir pile au 2ème lancer ».

- **Un évènement élémentaire {a}** est un **résultat unique** de Ω. C'est un évènement défini par un résultat précis pour chaque lancer (1er lancer = pile, 2ème lancer = pile, 3ème lancer = face) à contrario de l'évènement « obtenir pile au 2ème lancer » qui contient plusieurs évènements élémentaires.

Exemple : ($\underbrace{(f,f,f)}_{\textit{Evènement élémentaire}}$; (f,p,f) ;(f,f,p) ;(f,p,p) ;(p,f,f) ;(p,p,f) ;(p,p,p) ;(p,f,p))

- **Ø** est appelé **événement impossible**.

Exemple : (p,p,p,p) est un évènement impossible.

B Probabilités et propriétés :

- On associe à une probabilité sur Ω une **fonction P** qui à chaque **évènement A** de Ω associe **un réel de l'intervalle [0,1]**. Une probabilité est donc forcément comprise entre 0 et 1.

Exemple : Soient 3 gobelets. Une boule est cachée sous l'un des gobelets. La probabilité de trouver la boule en retournant un seul gobelet est de 1/3 = 0,33.

P doit vérifier certaines propriétés :

1. **P(Ω) = 1**

Exemple : P (« trouver la boule en retournant les 3 gobelets ») =1

2. **P (Ø) = 0**

Exemple : P (« ne trouver aucune boule en retournant les 3 gobelets ») = 0

3. **Si A ∩ B = Ø** alors, **P(AUB) = P(A) + P(B).** On dit que A et B sont incompatibles. On peut généraliser à 3,4, …, n évènements incompatibles entre eux.

<u>Exemple</u> : Soient les évènements A : « la boule se trouve sous le gobelet 1 » et B : « la boule se trouve sous le gobelet 2 ».

- *A ∩ B = Ø, la boule ne peut pas être à la fois dans le gobelet 1 et le gobelet 2*
- *P (A U B) = P (« la boule soit sous le gobelet 1 ou 2)*
  = P(A) + P(B) = P (« la boule soit sous le gobelet 1 ») + P (« la boule soit le gobelet 2 »)
  = 1/3 + 1/3 = 2/3 = 0,67

4. <u>Généralisation : théorème des probabilités totales :</u> **P(CUB) = P(C) + P(B) – P(C∩B)**

<u>Exemple</u> : Soient les évènements C : « la boule se trouve sous le gobelet 1 ou 2 » et B : « la boule se trouve sous le gobelet 2 ».

- *L'évènement C∩B est « la boule se trouve sous le gobelet 2 »*
- *P(CUB) = P(C) + P(B) – P(C∩B)*
  = P (« la boule se trouve sous le gobelet 1ou 2 ») + P (« la boule se trouve sous le gobelet 2 » - P(« la boule se trouve sous le gobelet 2)
  = 2/3 +1/3 – 1/3 = 2/3 = 0,67

5. **P (Ā) = 1 – P(A)**

<u>Exemple</u> : soit A l'évènement : « la boule se trouve sous le gobelet 1 ». Ā est l'évènement : « la boule se trouve sous le gobelet 2 ou 3 »
P (Ā) = P (« la boule soit sous le gobelet 2 ou 3)
= 1 – P(A) = 1 – P (« la boule soit sous le gobelet 1)
= 1 – 1/3 = 2/3

6. **si B c C alors P(B) ≤ P(C)**

<u>Exemple</u> : Soit C l'évènement : « la boule se trouve sous le gobelet 1 ou 2 » et B l'évènement : « la boule se trouve sous le gobelet 2 ».

- *B c C*
- *P(B)=P(«la boule soit sous le gobelet 2»)=1/3 ≤ P(C)=P(«la boule soit sous le gobelet 1 ou 2»)=2/3*

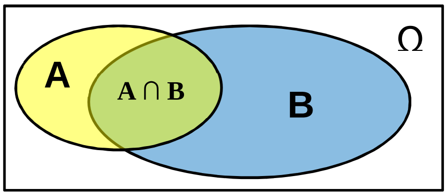
Probabilité conditionnelle, théorème de Bayes et indépendance en probabilité

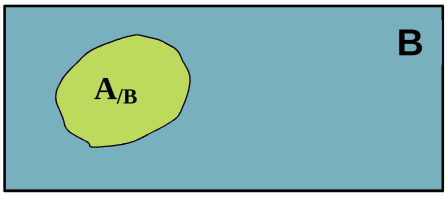
I Probabilité conditionnelle :

A Définitions :

Soit A et B deux événements quelconques d'un ensemble fondamental Ω. Cet ensemble est muni d'une loi de probabilité P sur P(Ω). On s'intéresse ici à P(A) une fois l'évènement B réalisé. Ainsi, ***on restreint l'ensemble des résultats Ω possibles à B***.

$$\textit{P (A sachant B)} = \mathbf{P_B(A) = P(A_{/B})} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$





Exemple d’application :
Soit l’événement A « Avoir un cancer des poumons » et l’événement B « Etre fumeur régulier ».
P (A) = Probabilité d’avoir un cancer des poumons dans la population générale (Fumeur + non fumeur).
P (A) = 0,03

P (B) = Probabilité de compter parmi les fumeurs réguliers dans la population générale.
P (B) = 0,1

$P(A \cap B)$ = Probabilité par rapport à l’ensemble de la population Ω d’être à la fois fumeur régulier **ET** de développer un cancer des poumons.
P $(A \cap B)$ = 0,02

$P_B(A)$ = Probabilité chez les fumeurs de développer un cancer des poumons.
→ $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}02}{0{,}1}$ = 0,2 soit 20% de risque pour un fumeur de développer un cancer des poumons.

B Théorème de la multiplication :

Si on reprend la relation $P_B(A)$ (ou $P(A_{/B})$) $= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, et $P_A(B)$ (ou $P(B_{/A})$) $= \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ on peut en déduire que :

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(B \cap A) = P_B(A) \times P(B) = P_A(B) \times P(A)}$$

Du théorème de la multiplication découle la formule de Bayes

II Formule de Bayes :

Soient A et B deux événements quelconques d'un ensemble fondamental Ω muni d'une loi de probabilité P sur P(Ω).
On se place dans le cas d'une probabilité conditionnelle $P(A/_B)$ (= $P_B(A)$). Du théorème de la multiplication on peut en déduire la formule de Bayes :

Théorème de la multiplication : $\mathbf{P(A\cap B) = P(B\cap A)} = P_B(A)$ **x** $\mathbf{P(B)} = P_A(B)$ **x** $\mathbf{P(A)}$

Formule de Bayes :

$$\mathbf{P_A(B)} = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P_B(A) x\, P(B)}{P(A)}$$

$$\mathbf{P_B(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P_A(B) x\, P(A)}{P(B)}$$

Exemple d'application (suite) :
On rappelle l'événement A « Avoir un cancer des poumons » et l'événement B « Etre fumeur régulier ».
P (A) = Probabilité d'avoir un cancer des poumons dans la population générale (Fumeur + non fumeur).
P (A) = 0,03

P (B) = Probabilité de compter parmi les fumeurs réguliers dans la population générale. ***P (B) = 0,1***

$P(A \cap B)$ *= Probabilité par rapport à l'ensemble de la population Ω d'être à la fois fumeur régulier **ET** de développer un cancer des poumons. P (A ∩ B) = 0,02*

$P_B(A)$ = Probabilité chez les fumeurs de développer un cancer des poumons.
→ ***$P_B(A)$*** $= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0,02}{0,1}$ = ***0,2*** *soit 20% de risque pour un fumeur de développer un cancer des poumons.*

→ On cherche désormais à déterminer la probabilité pour une personne atteinte d'un cancer des poumons d'être un fumeur régulier = $P_A(B)$.

$P_A(B) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P_B(A) \text{ x } P(B)}{P(A)} = \frac{0,2 \text{ x } 0,1}{0,03} = \frac{2}{3}$ = **0,67** soit 67% de fumeurs réguliers parmi les personnes atteintes d'un cancer des poumons.

III Diagramme en arbre :

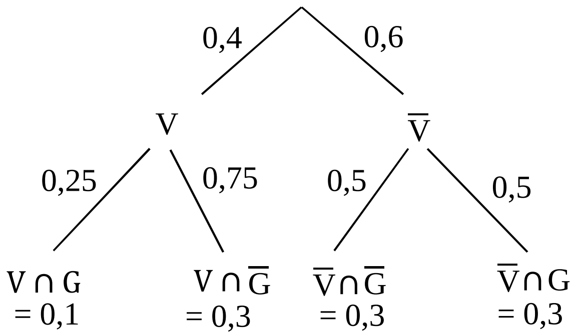
Soit une séquence finie d'expériences avec un nombre fini de résultats. On considère que **les résultats possibles de l'expérience n dépendent de l'expérience n-1**. On parle de **probabilités conditionnelles** comme vu précédemment.
La manière la plus simple de représenter ce genre de séries d'expériences est un **diagramme en arbre**. Pour calculer la probabilité de « chaque feuille » on utilisera le **théorème de la multiplication.**

Exemple : On considère un échantillon de 100 personnes tirées au sort. Parmi cet échantillon, 40 ont été vaccinées contre la grippe soit 40%. Les 60 personnes restantes n'ont pas reçu cette prévention soit 60%.
Parmi les patients vaccinés, 10 ont tout de même contracté la grippe, soit 25% d'entre eux. 30 des 60 personnes non vaccinées ont également eu la grippe soit 50% d'entre elles.

Soit « V » l'évènement « être vacciné », «$\overline{V}$» l'événement « Non vacciné », « G » l'événement « Avoir la grippe » et « $\overline{G}$ » l'événement « Ne pas avoir la grippe ».

Probabilités directement issues de l'énoncé :
$P(V) = 0,4$
$P(\overline{V}) = 0,6$
$P_V(G) = 0,25$
$P_{\overline{V}}(G) = 0,5$

<u>Construction de l'arbre</u> :



1. ***La probabilité qu'un chemin particulier de l'arbre se réalise est, d'après le théorème de la multiplication, le produit des probabilités de chaque branche du chemin***. Ici, par exemple cela signifie que la probabilité qu'une personne soit à la fois vaccinée et déclare la grippe ($V \cap G$) est de 0,1.

2. ***Les chemins s'excluent mutuellement.*** Ici, par exemple, le fait d'être vacciné exclue totalement la partie de l'arbre concernant les personnes non vaccinées.

3. ***La somme de toutes les probabilités finales obtenues doit être de 1***.

<u>Probabilités calculées à partir de l'énoncé</u> :

$P_V(\overline{G}) = 1- P_V(G) = 1- 0,25 = 0,75$
$P_{\overline{V}}(\overline{G}) = 1- P_{\overline{V}}(G) = 1- 0,5 = 0,5$

$P(V \cap G) = P_V(G) \times P(V) = 0,25 \times 0,4 = 0,1$
$P(V \cap \overline{G}) = P_V(\overline{G}) \times P(V) = 0,75 \times 0,4 = 0,3$

$P(\overline{V} \cap G) = P_{\overline{V}}(G) \times P(\overline{V}) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$
$P(\overline{V} \cap \overline{G}) = P_{\overline{V}}(\overline{G}) \times P(\overline{V}) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$

IV Les évènements indépendants :

A Définition :

Deux évènements A et B sont dits **<u>indépendants</u>** si et seulement si :

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

<u>Exemple</u> :
Soit l'événement « A » « réussir le concours de médecine », et l'événement « B » « Avoir eu la varicelle étant

enfant », sont objectivement deux événements totalement indépendants. Donc la probabilité de réussir la PAES ET d'avoir eu la varicelle, soit $P(A \cap B)$, est bien $P(A) \times P(B)$.

Le contre-exemple serait :
L'évènement « A » « Etre un fumeur régulier », et l'événement « B » « développer un cancer du poumon ». Développer un cancer du poumon pouvant être une conséquence du tabagisme, les événements A et B ne sont donc pas indépendants.

Ainsi, pour deux événements indépendants A et B, **la probabilité pour que A se produise ne sera pas influencée par la probabilité que B se produise et inversement**. D'où :

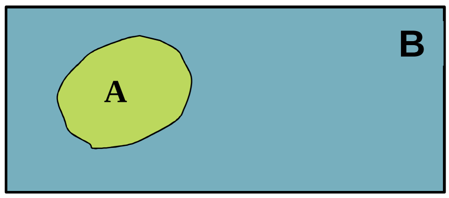
$$\mathbf{P_A(B) = P(B)}$$
$$\mathbf{P_B(A) = P(A)}$$

C Indépendance et inclusion :

- Soient deux évènements A et B tels que **A C B**. On a alors **$A \cap B$ = A** et **$P(A \cap B) = P(A)$**. On a:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

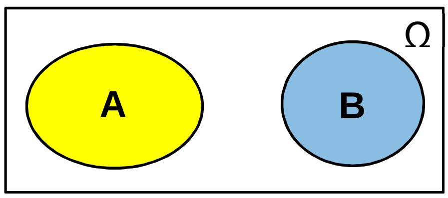
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$



Ainsi, lorsque A est inclus dans B, les deux évènements ne peuvent pas être indépendants.

- Soient deux évènements A et B disjoints. Alors, $P(A \cap B) = 0$, d'où

$$\mathbf{P_B(A) = P_A(B) = 0}$$



Lorsque deux évènements sont disjoints, ils ne sont pas indépendants.

Ne pas confondre :

Incompatibles ($P(A \cup B) = P(A) + P(B)$) $\neq$ **Indépendants ($P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$)**