Probabilités élémentaires et dénombrements

Introduction aux probabilités, ensembles

Le terme « **statistique** » peut se présenter comme une **science**, une **grandeur** ou encore un **ensemble d'activités**. Dans les statistiques, on retrouve des **populations** qui sont un ensemble d'objets de même nature. L'étude de tous les éléments de cette population est très compliquée, et c'est pourquoi on a recours au système d'**échantillonnage**. Cela pose deux problèmes : on n'observe que **partiellement** la population et les individus de l'échantillon sont **différents** à chaque fois que l'on change d'échantillon

I. Définitions

Ensemble : Liste ou collection d'objets définis. Ex : les étudiants en PACES.

Élément de l'ensemble : Objet appartement à l'ensemble. Ex : vous-même au sein de l'ensemble « étudiants en PACES ».

→ L'ensemble peut se définir en **extension** (**=explicite**), on **liste** tous les éléments un à un. Ex : A = {a, b, c, d, e}

→Il peut aussi se définir en **compréhension** ou **intention** (**=implicite**), on donne des **propriétés** caractérisant les éléments. Ex : B = {x : x est une voyelle}

Quelques notions fondamentales :

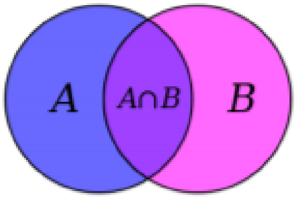
• p est un **élément** de l'**ensemble** A signifie que p **appartient** à A ($p \in A$). Ex : 1 appartient à l'ensemble A : {1 ; 2 ; 3}.
• Dire que l'ensemble B est une **partie** de l'ensemble A signifie que B est compris dans A ($B \subset A$). Ex : B : {1 ; 2} est une partie de A : {1 ; 2 ; 3}.
• L'ensemble vide est noté $\emptyset$.
• L'univers est noté Ω (oméga)

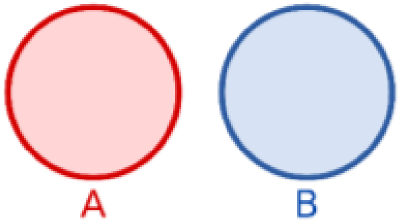
II. Opérations

1. L'intersection

Cette opération se note **« A ∩ B »** (A et B sont deux ensembles). Elle signifie que l'élément appartient à la fois à A **ET** à B, il se trouve donc à **l'intersection** des deux ensembles (image de gauche).

Il existe un cas particulier où **A ∩ B = Ø**, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de solution. Dans ce cas, les deux ensembles sont dits « **disjoints** », ils **ne se superposent pas**. Ainsi, un élément appartenant à A **ne pourra pas** appartenir à B et vice versa (image de droite).





2. La réunion

Cette opération se note **« A ∪ B »**. Elle signifie que l'élément appartient **soit à A, soit à B, soit aux deux en même temps**.

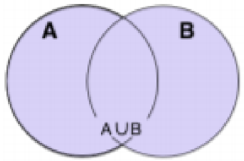


Schéma d'une réunion.

3. Le complémentaire

Notée $\complement A$ ou $\bar{A}$ ou A^c le complémentaire représente **tout ce qui n'appartient pas** à l'ensemble en question.

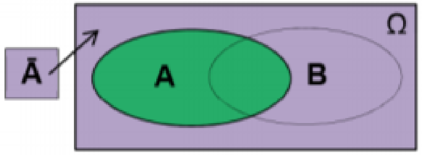
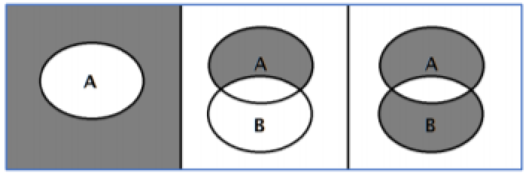


Schéma du complémentaire de A

4. La différence et la différence symétrique

Ces deux opérations ont un nom similaire mais sont très différentes. **La différence** est tout simplement notée **A-B** et représente ce qui <u>appartient à A, mais qui n'appartient pas à B</u>. Elle est aussi appelée complémentaire de B relatif à A. **La différence symétrique**, elle, représente <u>tout ce qui appartient à A ou à B, sans appartenir à A ∩ B</u>. Elle correspond au lien logique ou exclusif. On la note **AΔB = AUB - A∩B**



Schémas de gauche à droite : complémentaire, différence et différence symétrique.

5. Opérations importantes à connaitre

C'est important de savoir jongler avec les différentes opérations (ne vous inquiétez pas, **il n'est pas nécessaire d'apprendre tout ça par cœur**, une fois que vous avez compris **c'est juste de la logique**).

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \Omega = A$
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup \complement A = \Omega$	$A \cap \complement A = \varnothing$
$\complement\complement A = A$	$\complement\Omega = \varnothing, \complement\varnothing = \Omega$
$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$	$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

III. Ensembles

1. Les différents types d'ensembles

Ensembles finis	Ensembles infinis	
	Dénombrables	**Indénombrables**
Ensemble **nul**, ou contenant un **nombre fini** d'éléments). *<u>Ex :</u> A = {1 ; 2 ; 3}*	Chaque éléments peut être **compté** *<u>Ex :</u> l'ensemble des entiers naturels (1, 2, 3, 4, 5 …)*	On ne **peut pas compter** tous les éléments *<u>Ex :</u> l'ensemble des réels (1, 1.1, 1.11, 1.111 …), on ne peut pas tout compter **car il y a une infinité de nombres entre 1 et 2** par exemple)*

2. Les ensembles produits

Soient deux ensembles : A et B. L'ensemble produit de A et B est l'ensemble des couples **ordonnés (a ; b)**, avec a ∈ A et b ∈ B. Pour calculer le nombre de couples possibles d'un ensemble produit, il faut faire : **Card(A) * Card(B)**

avec Card(A) le nombre d'éléments de l'ensemble A.

Ex : si A : {rouge ; bleu} et B : {1 ; 2 ; 3}, alors l'ensemble produit de A et B est {(rouge ; 1), (rouge ; 2), (rouge ; 3), (bleu ; 1), (bleu ; 2), (bleu ; 3)} à 2 * 3 = 6 possibilités.

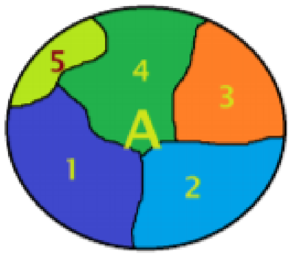
3. Les familles d'ensembles

Soit l'ensemble A = {1, 2, 3}. Cet ensemble est constitué de différents sous-ensembles ({1}, {1, 2} …), et tous ces sous-ensembles forment la famille des parties de A. Un ensemble contenant **p éléments possède 2^p parties** (= sous-ensembles).

Ex : Soit A = {a ; b}, ici, la famille des parties de A est P(A) : {∅, {a}, {b}, {a , b}}, c'est-à dire toutes les « combinaisons » que l'on peut réaliser avec l'ensemble A.

4. La partition

La partition est la division de l'ensemble A en sous-ensembles **disjoints** dont la **réunion forme A**.



Ce schéma représente une partition de l'ensemble A

DENOMBREMENTS

Les dénombrements permettent, en fonction des situations, de calculer le nombre de **possibilités de tirages** lors d'épreuves de **probabilités**. Il existe différentes formules à apprendre et à savoir appliquer **en fonction du dénombrement à effectuer** !

I. La p-liste avec remise

La p-list avec remise est utilisée lors des **tirages ordonnés avec remise**, c'est-à-dire que, par exemple, on tire une boule, on note le numéro, puis on la repose dans l'urne avant d'en tirer une nouvelle. Ainsi, **l'ensemble dans lequel on tire est toujours le même** !

La formule utilisée est **$Card(E)^p$**, avec Card(E) le nombre d'éléments de l'ensemble et p le nombre de tirages.

Ex : j'ai les 26 lettres de l'alphabet (Card(E) = 26) et je veux savoir combien de mots de 3 lettres je peux former … Il y 26^3 mots possibles (« aaa », « aab », « boa », « zyx » …), l'ordre compte et « aba » est différent de « baa » !

II. L'arrangement de n éléments pris p à p

L'arrangement, lui, est utilisé pour les **tirages ordonnés sans remise** (= tirages successifs), dans ce cas, au lieu de reposer la boule dans l'urne, **on la garde avec nous** et on retire dans un ensemble qui est donc **légèrement différent** (il y a une boule en moins).

Voici la formule : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$, avec p le nombre de tirages et n le nombre d'objets de l'ensemble (prononcé « arrangement de p éléments parmi n »).

→**Explication du « n! »** : 3! , prononcé factoriel de 3, donne 3*2*1. Pour 4! Cela donnerait 4 * 3 * 2 *1. **Attention, le factoriel de 0 donne 1 !**

Ex : j'ai les 26 lettres de l'alphabet (n = 26), et je veux savoir combien de mots de 3 lettres (p = 3) je peux former … (/!\ Ici, chaque lettre est utilisable UNE FOIS (tirage sans remise) /!\)

$\rightarrow A_{26}^{3} = \frac{26!}{(26-3)!} = 26 * 25 * 24 = 15\,600$

III. L'arrangement avec répétition

Celui-ci est similaire à la p-liste avec remise, il est donc utilisé lors des **tirages ordonnés avec remise**. Ainsi, si on tire x fois parmi n éléments, la formule est … $\mathbf{n^x}$. Au final, si on regarde les formules et les utilisations, **la p-liste et l'arrangement avec répétition c'est pareil** !

Ex : on tire dans un paquet de 52 cartes une carte, on la repose, on en tire une autre, il y a 52^2 possibilités de tirages !

IV. Permutation d'un ensemble fini à n éléments

La permutation est utilisée pour les **tirages ordonnés sans remise**. Elle est donc semblable à l'arrangement de n éléments pris p à p, mais lorsque **p est égal à n** (le nombre d'objets tirés est le même que le nombre d'objets total). En d'autres termes, c'est donc un tirage ordonné de **tous les éléments de l'ensemble**. La formule, est la suivante : **n!**, avec n le nombre d'éléments de l'ensemble.

Ex : vous disposez de 5 cartes (O, R, A, N et G), vous vous demandez combien de mots de 5 lettres vous pouvez former mais là on peut utiliser qu'une fois chaque lettre : → 5!=120

V. Permutation avec répétition

Ce dénombrement est utilisé pour lors des **permutations d'un ensemble**, lorsque plusieurs éléments de l'ensemble appartiennent à une même catégorie (k1, k2, k3 … kx) et qu'on ne **considère que la catégorie** pour l'ordre. Permutation signifie simplement que l'on « mélange » l'ensemble afin d'obtenir un ordre différent. Pour calculer le nombre de combinaisons, on fait :

$$\frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{k1! * k2! * \ldots * kn!}}$$

avec n le nombre d'éléments de l'ensemble et k les nombres d'éléments par catégorie.

Ex : une urne contient 5 boules rouges, 3 noires, 4 bleues et 2 vertes. Combien existe-il d'ordre de tirage en prenant en compte uniquement la couleur des boules ? → $\frac{14!}{5!*3!*4!*2!}$

VI. La combinaison de n éléments pris p a p

Enfin, la combinaison est utilisée lors des **tirages non ordonnés sans remise (= tirages simultanés)**, c'est-à-dire que l'on va tirer par exemple trois boules d'un coup et regarder lesquelles on a eu. **L'ordre ne compte donc pas** et « bleue-bleue-rouge » est similaire à « rouge-bleue-bleue ». Et voilà la dernière formule des dénombrements : $C_n^p = \frac{n\,!}{p\,!(n-p)\,!}$

avec n le nombre d'éléments de l'ensemble et p le nombre d'éléments tirés.

Ex : en tirant au hasard 4 cartes d'un coup dans un paquet de 54 cartes, je me demande combien de combinaisons sont possibles ?

$\rightarrow C_{54}^{4} = \frac{54\,!}{4\,!(54-4)\,!}$

ÉLÉMENTS DE PROBABILITÉ

I. Introductions et définitions

Il existe deux types de phénomènes :

• **les phénomènes déterministes** : l'issue est **prévisible** : on peut prévoir le résultat à l'avance comme par exemple avec les lois de physique

• **les phénomènes aléatoires** : l'issue n'est **pas prévisible**, le résultat est dû au hasard (cela peut être un lancer de dé par exemple).

Une **expérience aléatoire** (ou **épreuve**) est une expérience dont le résultat **n'est pas prévisible**, c'est donc un phénomène aléatoire.

En probabilités, on travaille dans un ensemble fondamental (noté Ω) qui représente **l'ensemble des résultats possibles**. Un évènement, quant à lui, est un **sous-ensemble** de **l'ensemble fondamental**.

Ex : l'ensemble fondamental peut être « Les résultats d'un lancer de dé », et un évènement de cet ensemble peut être « Obtenir un chiffre pair ».

Il existe plusieurs types d'événements

• **l'évènement élémentaire** : constitué uniquement **d'un seul résultat** de l'ensemble. Ex : « Obtenir un 3 » lors d'un lancer de dé

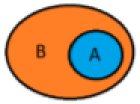
• **l'événement impossible ou ensemble vide** (ne contient **aucun résultat** possible) Ex : obtenir un 7 à un lancer de dé

• **l'événement certain** : l'ensemble contient **tous les résultats** possibles

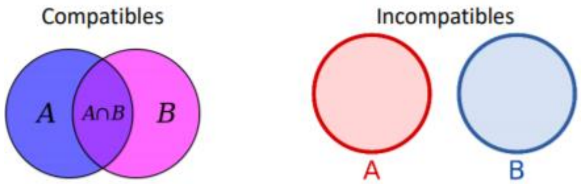
Ex : obtenir un chiffre entre 1 et 6 en lançant le dé

II. Probabilités

Une probabilité associe à un évènement un nombre allant **de 0 à 1**, elle permet de mesurer la chance de réalisation de l'évènement en question. Il y a quelques subtilités à connaître à propos des probabilités :
•P(ø) = 0, ce qui signifie que l'évènement impossible ne peut pas se produire (logique).
• P(Ω) = 1
• Si P(A ∩ B) = 0, alors A et B s'excluent mutuellement, ils sont dits incompatibles. Cela signifie que les deux évènements ne peuvent pas se produire en même temps (par exemple, on ne peut pas obtenir pile et face lorsqu'on lance une pièce). Dans ce cas-là, P(A ∪ B) = P(A) + P(B).
• $P(\bar{A})=1-P(A)$



• Si A est inclus dans B, alors P(A) ≤ P(B).
• **P (A ∪ B) = P (A) + P(B) – P(A∩B) = théorème des probabilités totales**
• **Donc si A et B sont incompatibles, A ∩ B = ∅ donc P(A ∪ B) = P(A) + P(B)**



La propriété d'additivité forte ou formule de Poincaré ou d'inclusion-exclusion ou de crible (#SynonymesÀConnaître)

Cette propriété permet de connaître la formule lorsque l'on veut calculer une **union entre plusieurs évènements**. Elle est généralisable à n'importe quel nombre n. Pour **n = 3**, elle donne :

P(A ∪ B ∪ C) = P(A) + P(B) + P(C) – P(A∩B) – P(B∩C) – P(C∩A) + P(A∩B∩C)

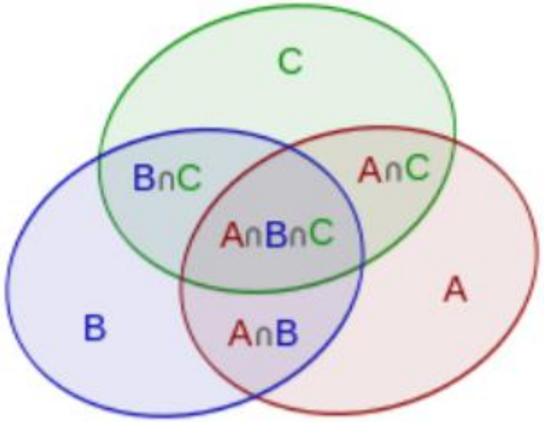


Schéma lorsque n = 3. Ceci est important à connaître et à comprendre !!

Il est facile de décortiquer cette formule : on veut savoir que vaut la probabilité des trois évènements ensemble. On additionne donc leurs différentes probabilités, puis on enlève les intersections. Cependant, **en enlevant les trois intersections, on laisse un « trou » au milieu**, d'où le rajout de l'intersection des 3 évènements en même temps.

III. Equiprobabilité

Lors d'une situation d'équiprobabilité, chaque évènement élémentaire a **la même probabilité** (c'est comme au loto, chaque boule a autant de chance que les autres d'être tirée). Dans ce cas-là, la probabilité d'un évènement A est :

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

avec Card(A) le « nombre de cas favorables » et Card(Ω) le « nombre de cas possibles ».

Ex : Dans une urne, il y a 15 boules, dont 7 bleues. L'évènement A est « tirer une boule bleue », P(A) = 7/15.

IV. Probabilités : ensemble fini

Lorsque l'on travaille sur un ensemble fini, la probabilité de l'évènement est **comprise entre 0 et 1**. De plus, la somme des probabilités de tous les évènements est **toujours égale à 1**.

Ex : considérons un dé biaisé : P(1) = 1/3, P(2) = 1/6, P(3) = 1/12, P(4) = 1/12, P(5) = 1/4.

Trouver P(6) = ?

1/3 + 1/6 + 1/12 + 1/12 + 1/4 + ? = 1 → ? = 1 – 11/12 = 1/12

V. Probabilités : ensemble infini

Le prof ne détaille pas trop cette partie, la fiche sera éditée s'il rajoute des explications cette année, mais pour l'instant il ne donne que cette formule :

$$p_i \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$$

La probabilité d'un élément quelconque est alors la somme des p_i correspondant à ses éléments tel que :

$$p_\infty = \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

NB : Le choix des p_i est arbitraire et dépend de considérations à priori (lancers de dé indépendants les uns des autres) ou d'estimations (c'est le problème des stats mais si on répète les expériences un grand nombre de fois on peut s'approcher de la valeur des p_i.

VI. Formule bonus

Soit un lot de N produits. Parmi ces produits, il y a D produits qui sont défectueux. On décide de prélever un échantillon de n produits, et l'on se demande quelle est la probabilité Ak de trouver k produits défectueux dans cet échantillon. Pour cela, il existe cette formule :

$$P(A_k) = \frac{C_D^k * C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

$$Rappel : C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Ex : sur un lot de 150 bouteilles d'Ice Tea, 12 sont périmées. On prélève un échantillon de 25 bouteilles. Quelle est la probabilité de prélever 4 bouteilles périmées ?

$$\longrightarrow \frac{C_{12}^4 * C_{150-12}^{25-4}}{C_{150}^{25}}$$

Tableau récap

Avec remise		Sans remise			
Ordonné		Ordonné			Non ordonné
p-liste avec remise	Arrangements avec répétition	Arrangements de n éléments pris p à p	Permutation d'un ensemble fini à n éléments	Permutations avec répétition	Combinaisons de n éléments pris p à p parties d'un ensemble
On prend 1 élément dans E, on le remet et on répète p fois	On prend 1 élément dans n, on le remet et on répète p fois	On prend SUCCESSIVEMENT (=les uns après les autres) p éléments parmi n sans remettre	On prend les éléments 1 à 1 sans les remettre jusqu'à épuisement p = n	On prend les éléments 1 à 1 jusqu'à épuisement en ne tenant compte que des catégories	On prend SIMULTANEMENT (=tous en même temps) p éléments parmi n
$(\text{Card } E)^p$	n^p	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$n!$	$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\ldots k_x!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Dédicaces :

C'est bon les gars, vous êtes arrivés à la fin de ce cours, il y a pas mal de rappels du lycée (surtout dans la première partie), au concours les QRU sont assez simples avec un peu de réflexion, sachez bien différencier les circonstances d'utilisation de chaque type de dénombrement, confondez pas vos arrangements et vos combinaisons puis tout se passera bien !

- Pour commencer, grosse dédicace à mes cotuts : Léa sans qui j'aurai jamais su comment commencer ma fiche, et Charles qui est un génie de word+powerpoint (même s'il l'avoue pas), je vous aime trop <3
- A toute la team MTB et la team doublant
- A Quentin ce bogoss qu'on attend tous en P2
- A mes fillotes : Thi Mai, Lucie, Audrey, Clara et Lisa, je crois en vous !
- A ma famille de l'année dernière : Bøo, Escarboucle, Niccoliculi, Sachacétabulum, Alexandra, Noelyse et Diegzzzzz
- A SLAASH la grosse folle du tutorat
- A Toupitou et Tristampax (aussi des grands fou du tutorat, vous approchez pas trop d'eux)
- A mes vieilles de biostats qui sont vraiment les meilleures (les autres matières sont jaloux parce que leurs vieux sont pas aussi cool)
- A vous tous de vous être lancés dans cette année de folie, donnez vous à fond parce que ça vaut vraiment le coup !