VARIABLES ALEATOIRES ET LOIS DE PROBABILITE DISCRETE ET CONTINUE

I. DEFINITIONS

Dans ce cours on décrira des opérations précises (= **épreuve**) menant à un résultat aléatoire (=un évènement élémentaire).

/!\ On parle de **variable aléatoire** quand le résultat est un **nombre**. Une variable aléatoire est donc une épreuve menant à des évènements élémentaires qui sont des nombres.

Ex : lancer un dé est une variable aléatoire (résultat de 1 à 6), mais pas tirer une carte de jeu car les évènements ne sont ici pas des nombres.

On distingue les variables aléatoires **discrètes** et **continues** :

- **Discrète** si le résultat fait partie d'un **ensemble fini ou dénombrable**. Ex : le nombre de pages de tes ronéos d'anat'.
- **Continue** si le résultat est compris dans $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$. On l'appelle aussi **variable à densité**. Ex : dosage de la glycémie.

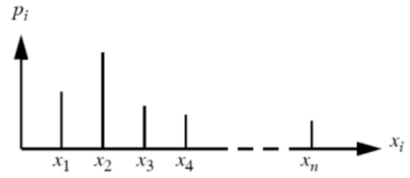
II. VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X discrète est définie en donnant l'ensemble des valeurs $p_1, p_2, \cdots, p_n$ qui sont les probabilités de ses différentes éventualités $x_1, x_2 \ldots, x_n$.

Soit $p_i = P(X = x_i)$ donc $\mathbf{0 \leq p_i \leq 1}$ *et* $\mathbf{\sum p_i = 1}$

On peut représenter cette loi par une table ou un diagramme en bâtons :

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$



A. PARAMETRES

- **MOYENNE** : la moyenne **µ** de la variable aléatoire X est la valeur moyenne des résultats que l'on obtiendrait en répétant indéfiniment l'épreuve. C'est un indicateur de **position**.

$$\mu = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_ip_i$$

/!\ : la moyenne de $x^2 \neq \mu^2$

- **ESPERANCE** : notée E(X), c'est un synonyme de la moyenne en probabilités et statistiques.

Théorèmes de l'espérance :

- Soit X une v.aléatoire et k une constante réelle : ***E(kX) = k E(X)*** ; ***E(k + X) = E(X) + k***
- Soit X et Y deux variables aléatoires : ***E(X+Y) = E(X) + E(Y)***

On peut généraliser cette dernière formule en disant que « *l'Espérance de la somme est la somme des Espérances* ».

- **VARIANCE et ECART-TYPE** : Notée **σ^2**, la variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. L'écart-type est sa racine carrée, **σ**. Ce sont des paramètres de **dispersion**.

Soit a une constante on a : *Var(X+a) = Var(X)* et *Var(aX) = a^2Var(X)*

- **VARIABLE CENTREE REDUITE :** on la définit comme

Soustraire sa moyenne à X permet de la « centrer ».
La diviser par son écart-type permet d'avoir une variable « réduite ».

$$\boxed{Y = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

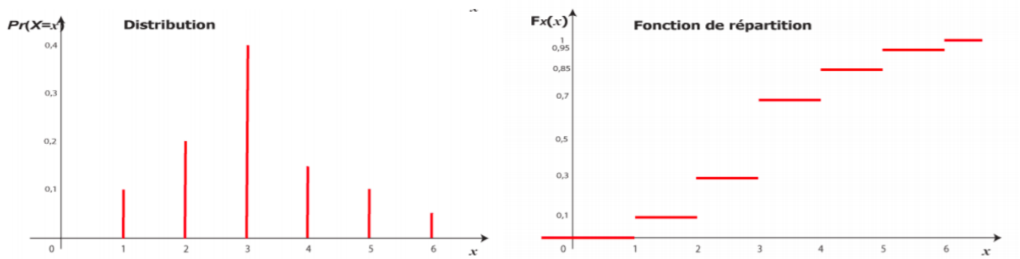
On a alors ***E(Y) = 0*** et ***Var (Y) = 1***

- **FONCTION DE REPARTITION :** on la définit comme ***F(x) = P(X≤x).*** C'est une fonction **cumulative** car on additionne toutes les probabilités (pi) des xi survenus avant x. C'est une fonction toujours **monotone croissante**.

Ex : la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2 au cours d'un lancer de dé est égal à la probabilité de tirer un 1 + la probabilité de tirer un 2.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

/!\ La fonction de répartition est à bien distinguer de la fonction de distribution



NEW La fonction de répartition est une fonction en escalier pour les variables aléatoires discrètes. Les discontinuités de x se produisent pour les valeurs de x ayant des probabilités non nulles. La hauteur de la discontinuité est la probabilité de X=x.

III. LOIS DE PROBABILITE DISCRETES

A. Loi de BERNOULLI B(p)

L'Epreuve de **Bernoulli** est une expérience aléatoire dont l'issue est un « succès » ou un « échec ».

Paramètres : **p** : probabilité d'un succès
q = 1-p : probabilité de l'échec
X est la variable aléatoire donnant le nombre de « succès » pendant l'épreuve (0 ou 1).

$$\boxed{P(X=k) = p^k(1-p)^{1-k} = p^k q^{1-k} \qquad \text{pour} \qquad k \in \{0,1\}}$$

Pour la loi de Bernoulli, on a alors : ***μ=p*** et ***σ² = p(1-p) = pq***

Ex : Tu as face à toi un sac contenant 15boules rouges et 3 boules noires. On considère que « tirer une boule noire » constitue un succès, et on en cherche la probabilité. $P(x=1) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

B. Loi BINOMIALE B(n,p)

La loi **Binomiale** consiste en la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

Paramètres : **n** : nombre d'essais indépendants
p : probabilité d'un succès
q = 1-p : probabilité d'un échec
X : variable aléatoire donnant le nombre de « succès » à l'issue de n essais (de 0 à n).

$$\boxed{P(X=k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad \text{pour} \qquad 0 \le k \le n}$$

Rappel : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ On a alors ***μ=np*** et ***σ² = np(1-p) = npq***

Remarques :

- Si **p=0,50** la forme du diagramme de probabilités d'une distribution normale est **symétrique**
  Si **p>0,50** on parle **d'asymétrie positive**. Si **p<0,50** on parle **d'asymétrie négative**.

- Quand n est grand la forme devient symétrique.
  Quand n est grand et si p n'est pas trop proche de 0 ni de 1 alors la loi binomiale tend vers la loi **normale**.

- Si X une variable aléatoire suit B(n1,p) et Y suit B(n2, p), alors X+Y suit la loi binomiale B(n1 + n2 , p)

- La loi Binomiale repose sur le principe du tirage **non exhaustif** (**indépendant** des autres tirages), cad que les éléments sélectionnés sont remis dans l'échantillon. p ne varie donc pas.
  Mais il existe aussi le tirage **exhaustif** (**dépendant** des autres tirages) : sans remise. p varie au fil des tirages.

- **Taux de sondage :** $\frac{n}{N}$
  (n la taille de l'échantillon, N l'effectif de la population)

Si $\frac{n}{N} \leq 0,10$ on applique la loi **Binomiale**.

SINON, on utilise la loi **Hypergéométrique**.

Ex : On prend un dé. On considère l'évènement « obtenir un chiffre pair » comme un succès de probabilité p=0,5. On tire 3 fois (n=3) notre dé de manière indépendante. On cherche la probabilité d'obtenir 2 chiffres pairs (soit P(X=2)).

$P(X = 2) = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!1!} \times 0,5^2 \times 0,5 = 3 \times 0,125 = 0,375$

C. Loi HYPERGEOMETRIQUE H(N,D,n)

Soit une population de N individus parmi lesquels D ont un caractère donné. On prélève un échantillon n de cette population N. Les individus de l'échantillon sont tirés simultanément (l'ordre de tirage n'a pas de sens) et sans remise.

Paramètres: **N** : effectif de la population
D : nb de personnes présentant le caractère étudié dans la population
D/N : probabilité p d'avoir le caractère étudié

$$\boxed{\mathbf{P(X = k) = \frac{C_D^k * C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}}} \qquad min(0; n-D) \leq k \leq max(n; D)$$

On a donc $\mu = \frac{nD}{N} = np$ et $\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1} = npq \times \frac{N-n}{N-1}$

Ex : Dans une usine, sur 100 boîtes de médicaments (N), 30 ont un défaut (D). On tire au sort 20 machines (n) et on cherche la probabilité d'en obtenir 1 seule ayant un défaut : $P(X = 1) = \frac{C_{30}^1 * C_{70}^{19}}{C_{100}^{20}}$

NEW *La loi Hypergéométrique et la loi Binomiale sont proches, et ont la même Espérance. Leur variance n'est par contre pas tout à fait identique puisqu'il existe le facteur $\frac{N-n}{N-1}$ en plus pour l'hypergéométrique. Cependant, quand le taux de sondage est faible et donc n petit et N grand, ce facteur se rapproche de 1 et la variance se rapproche donc de celle de la Binomiale. On comprend donc mieux les conditions d'approximation.*

D. LOI **GEOMETRIQUE G(p)**

On répète des épreuves de **Bernoulli jusqu'à l'obtention d'un succès**.

Paramètres : **X** : v-a « nb d'essais nécessaires » à l'obtention du 1er succès
p : probabilité d'un succès
q : probabilité d'un échec

$$\boxed{P(X=k)=p(1-p)^{k-1}=pq^{k-1} \qquad \text{pour} \qquad k\in\mathbb{N}^*}$$

On a alors $\mu=\frac{1}{p}$ et $\sigma^2=\frac{1-p}{p^2}$

Ex : on lance un dé jusqu'à obtenir un 2. La probabilité d'obtenir un 2 au bout de 2 essais est $P(x=2)=\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^1$.
Explication formule : avoir un 2 au bout de 2 essais signifie échouer 1 fois (q^1) puis réussir 1 fois (p). La puissance (q^x) comptabilise le nombre d'échecs avant de réussir.

E. Loi de **POISSON P(λ)**

Utilisée pour déterminer la probabilité qu'un certain nombre d'évènements se réalisent **par unité** de temps (ou de volume, de surface). On la retrouve souvent dans les domaines de la qualité, la sécurité et la fiabilité.

$$\boxed{P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad \lambda>0 \qquad k\in\mathbb{N}}$$

Paramètres : **λ** : **taux** moyen avec lequel un évènement particulier se produit en général.
X : variable aléatoire qui donne le nombre d'évènement particulier qui se produisent dans la situation étudiée.
μ = σ² = λ

Ex : Un médecin spécialiste reçoit en moyenne 2 patients par heure. Quelle est la probabilité qu'il voit 2 patients en 2h ? On a λ=2 en 1h donc λ=4 pour 2h.

$$P(x=2)=\frac{4^2e^{-4}}{2!}=8e^{-4}$$

(à noter : la somme de 2 variables aléatoires de Poisson suit une loi de poisson avec comme paramètre $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$)

IV. VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

Ce qui caractérise une variable aléatoire continue, c'est qu'elle a une probabilité nulle d'être égale à un nombre donné

P(X=k) = 0 *; P(X=11,111) = 0 ; P(X=√2) = 0*

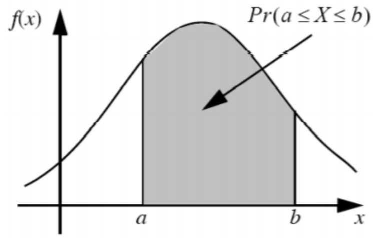
On utilisera donc des intervalles : **P(a ≤ X ≤ b) ≠ 0**

- **La densité de probabilité :**

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx$$

C'est une fonction utilisée pour définir la loi de probabilité de X.

P(a ≤ X ≤ b) est **l'aire sous la courbe.**

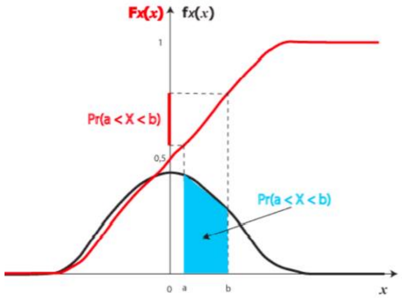


Le passage du discret au continu transforme les probabilités en fonctions et les sommes en intégrales. En découlent quelques propriétés *(jetez-y un œil mais à mon sens ce n'est pas le genre de choses trop susceptibles de tomber…)*

- $f(x)\ge 0$ (analogue à $p_i\ge 0$)
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=1$ (analogue à $\sum_i p_i=1$)
- $\mu=E(X)=\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$ (analogue à $\sum_i x_ip_i$)
- $\sigma^2=var(X)=\int_{\mathbb{R}}(x-\mu)^2f(x)dx$ (analogue à $\sum_i(x_i-\mu)^2p_i$)
- $\sigma^2=var(X)=\int_{\mathbb{R}} x^2f(x)dx-\mu^2$ (analogue à $\sum_i x^2p_i-\mu^2$)

- **<u>La Fonction de Répartition :</u>**

Elle est toujours **croissante, monotone et continue**. Partant de 0 pour x → -∞ . Atteignant 1 pour x → +∞ . (en rouge la fonction de répartition, en noir la fonction de densité)



V. Lois de probabilités continues

A. Loi **EXPONENTIELLE E(λ)**

On l'utilise dans des situations où le « risque instantané » de décès ou « taux de défaillance » est constant. (durée de vie d'un composant…)

- **<u>Fonction de densité :</u>** $\boxed{\mathbf{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}}}$ avec $\lambda > 0$ et $x \geq 0$

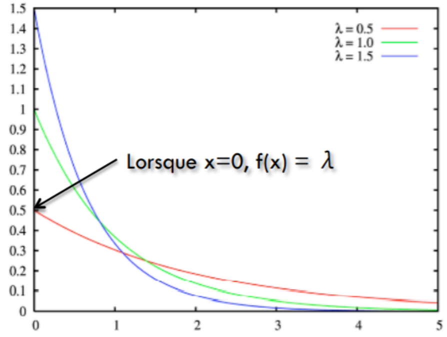
Paramètres : **λ** = taux de défaillance instantané
μ = 1 / λ
σ² = 1 / λ²

- **<u>Fonction de répartition:</u>** $\boxed{f(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \mathbf{1 - e^{-\lambda x}}}$

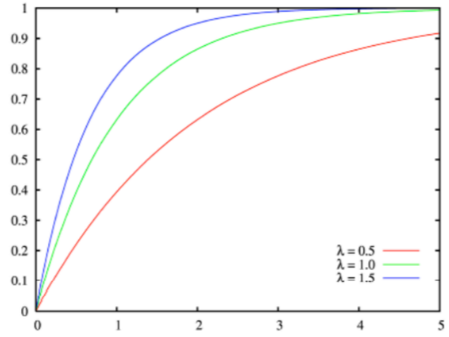
Si un évènement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ, le **temps entre deux réalisations consécutives** de l'évènement considéré est distribué selon une **<u>loi exponentielle de paramètre 1/λ</u>.**

Exemple : La radioactivité peut être décrite car à chaque instant le taux de radioactivité (la probabilité de désintégration) est constant. C'est-à-dire que peu importe le temps écoulé ou le nombre d'atomes déjà désintégrés la probabilité que le noyau se désintègre reste la même pour un instant donné.

<u>Densité de probabilités (f):</u>



<u>Fonction de répartition (F):</u>



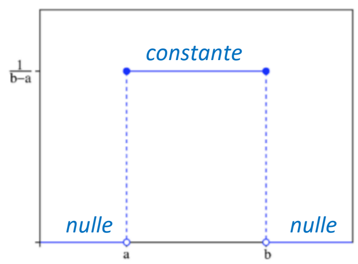
B. Loi **UNIFORME U(a ;b)**

- **<u>Fonction de densité</u>** : $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$

$f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$

avec $\lambda > 0$ et $x \geq 0$

<u>Densité de probabilités (f):</u>



Paramètres : intervalle [a,b] ∈ ℝ

$\mu = \frac{a+b}{2}$ et $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

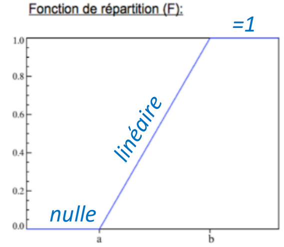
<u>Toutes les valeurs ont la même probabilité</u> (par exemple un lancer de dé, on a 1/6 de chance pour chaque valeur)

- **<u>Fonction de répartition :</u>**

Exemple : l'heure d'arrivée du bus suit une loi uniforme de densité f(x) = ¼ dans l'intervalle [8h38 ; 8h42]. Quelle est la probabilité qu'il passe avant 8h40 ?

$$P(X \leq 8h40) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Fonction de répartition (F):

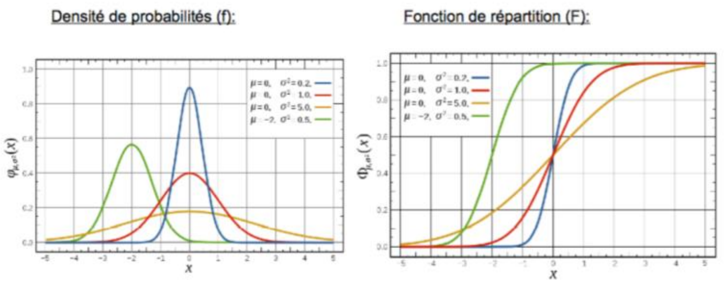


C. Loi NORMALE N(μ. σ)

Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$ pour $-\infty \geq x \geq +\infty$

Paramètres : **μ** et **σ** , respectivement moyenne et écart-type de X.

La **densité** de probabilité d'une v-a normale est **symétrique** autour de μ et a deux points d'inflexion aux abscisses μ - σ et μ + σ. Son utilisation est très vaste.



Valeurs limites importantes à savoir

- il y a 10 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1,65\sigma$ ou $X > \mu + 1,65\sigma$
- il y a 5 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1,96\sigma$ ou $X > \mu + 1,96\sigma$
- il y a 1 chance sur 100 pour que $X < \mu - 2,58\sigma$ ou $X > \mu + 2,58\sigma$
- il y a 1 chance sur 1000 pour que $X < \mu - 3,30\sigma$ ou $X > \mu + 3,30\sigma$

On utilisera principalement la 2^{e} ligne, surtout pour les tests statistiques. Une variable aléatoire distribuée normalement a 5 chances sur 100 de présenter un écart à la moyenne supérieur à 1,96 (arrondi souvent à 2).

Ex : La taille des hommes adultes suit une loi normale de moyenne μ=1,80 et d'écart-type σ=6cm.
68% de cette population est comprise dans [μ-1σ ; μ+1σ] soit entre 1,74m et 1,86m.
95% de cette population se trouve dans l'intervalle [μ-1,96σ ; μ+1,96σ]
La proportion d'homme dont la taille est inférieure à 168,2 cm (μ - 1,96σ) ou supérieure à 191,8 cm (μ + 1,96σ) est de 2,5% + 2,5% = 5%

La proportion d'homme dont la taille est supérieure à 189,9 cm (μ + 1,65σ) est de 5%. La proportion d'homme dont la taille est inférieure à 189,9 cm (μ + 1,65σ) est de 95%.

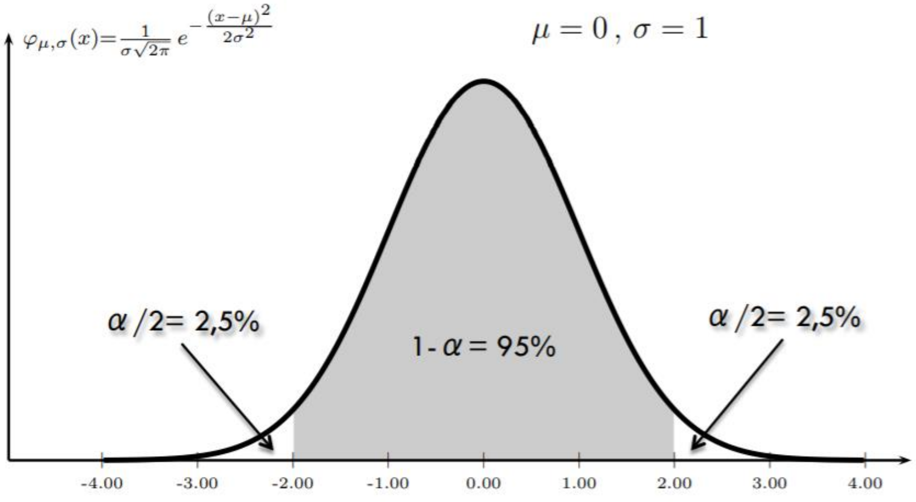
D. Loi Normale Centrée Réduite N(0 ; 1)

La loi normale centrée réduite est une loi normale de **moyenne 0 et de variance 1**.

Centrée → Autour de la moyenne **μ = 0**
Réduite → Ayant une variance **σ = 1**
N(μ ; σ) => N(0 ; 1)

$$\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

Ce changement de variable est très utile en pratique, on peut ramener n'importe quel problème de probabilité à distribution normale (qui suit donc une loi normale) à un seul cas : celui de la loi normale centrée réduite



VI. APPROXIMATIONS

Certaines lois peuvent être approximées par d'autres selon certaines conditions :

LOIS	CONDITIONS	CONSEQUENCE
BINOMIALE → POISSON	Si **N>50** **p≤0,10** **np ≤ 5**	**B(n;p) → P(λ=np)**
BINOMIALE → NORMALE	Si **np ≥ 5** **nq ≥ 5**	**B(n;p) → N(np;√npq)**
POISSON →NORMALE	Si **λ > 25**	**P(λ) → N(λ;√ λ)**

Et voilà, nous sommes (déjà !) à la fin de ce cours. Si tu es arrivé(e) jusque-là BRAVO, je sais que ce n'est pas un cours évident, mais je t'assure que c'est possible de le comprendre et même de le maîtriser avec de l'entrainement !

Comme c'est mon premier support j'en profite pour remercier tous les copains de P1 sans qui le moral n'aurait jamais tenu jusqu'au bout : Ju, Eli, Adrien, Anélia, Joss, L, l'Ekz évidemment et tout le Co (merci pour votre accueil !).

A toi qui lis encore cela, ne lâches rien ! Crois en toi, la ligne d'arrivée est peut-être bien plus près que tu ne le penses…