

COMPLEMENT AUX MATRICES :

Cette fiche vient compléter la fiche « BASES D'ALGEBRE LINEAIRE » (il est donc inutile de la regarder si vous n'avez encore jamais lu le cours sur les matrices). En effet, cette dernière fiche reprenait la partie « cours » de la diapo du professeur Mignant. Or le professeur a introduit beaucoup de notions dans ses exercices (en fin de diapo) dont il n'a pas du tout parlé dans la partie cours. C'est donc sur ces notions retrouvées dans les exercices que porte cette nouvelle fiche. Sortiront également bientôt des vidéos explicatives des qcm du prof, ainsi que des vidéos récap de cours, faites par vos 2 super tutrices pour les plus perdus d'entre vous !

Comme d'habitude avec moi : les exemples en vert, les notions que je vous ajoute en bleu ou encadrées en bleu. ET-ZE-PARTII

A. NOUVEAU VOCABULAIRE :

- ❖ Une matrice dite « creuse » est une matrice avec beaucoup de 0. Le produit de 2 matrices creuses peut donner la matrice nulle.

Ex : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- ❖ On note **P** la **matrice de passage** de A à B telle que **APA-1=B**. On utilisera cette égalité également sous la forme **AP=BA**, ou **P=A-1BA**

B. PROPRIETES DES TRANSPOSEES :

- ❖ La transposée d'une matrice existe toujours. **TOU-JOURS !**
- ❖ La transposée d'une matrice inversible est toujours inversible !

Ex : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Sa transposée est ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

On peut calculer son déterminant : $\det(A) = ad-bc = 2*4-3*1 = 5 \neq 0$ donc A et tA sont inversibles.

C. MATRICES INVERSIBLES :

- ❖ Pour toute matrice carrée, si A^{-1} existe, alors A^{-1} et A commutent toujours. *Cela s'explique par la propriété suivante.*
- ❖ **Si et seulement si $AB=BA=I$, alors A est une matrice inversible d'inverse B** qu'on pourra alors noter A^{-1} . Cette propriété est réciproque : **Si A est une matrice inversible d'inverse B, alors $AB=BA=I$. Une matrice inversible et son inverse commutent donc toujours.** *Attention, il faut absolument que $AB=BA=I$. Si on a seulement $AB=I$ on peut dire que B est un inverse de A, mais pas que A est inversible !! Visiblement selon l'exercice 10 du prof, une matrice peut donc avoir un inverse sans être inversible +++ Pour être inversible il faut absolument la commutativité, soit $AB=BA=I$.*

D. MATRICES (ANTI)SYMETRIQUES :

- ❖ Rappel de la 1^{ère} fiche : Une matrice est dite **symétrique** si sa **diagonale principale** (du haut à gauche vers le bas et la droite) constitue un **axe de symétrie**. **Ex :** $\begin{bmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{bmatrix}$
- ❖ Pour toute matrice **symétrique** on a ${}^tA=A$: « une matrice est dite symétrique si sa **transposée est égale à elle-même** ». On a alors aussi ${}^tA - A = 0$. **Ex :** La matrice $Y \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ symétrique

- ❖ Une matrice est dite « antisymétrique » lorsque $tB = -B$, c.a.d. si sa transposée est égale à son opposé. On a alors $tB+B=0$. On peut remarquer que ça ne peut concerner que les matrices carrées, mais également uniquement les matrices dont la diagonale a ses coefficients nuls.

Ex 1 : soit la matrice $B \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 9 \\ -7 & -9 & 0 \end{bmatrix}$. Sa transposée (on inverse lignes et colonnes) est $tB = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -7 \\ -2 & 0 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$.
 B vérifie donc bien $tB = -B$. B est donc **antisymétrique**.

Ex 2 : Soit la matrice $C \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Or $tC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \neq -C \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, donc C n'est pas antisymétrique.

! ATTENTION : La symétrie ou l'asymétrie d'une matrice n'influe pas sur son inversibilité !

On ne peut PAS compter vrai un item tel que « Soit X une matrice symétrique. Donc X est inversible ». Pour connaître l'inversibilité, il faut calculer le déterminant ou en savoir plus sur la matrice X !

E. PROPRIETES DES MATRICES DIAGONALES :

- ❖ Toute puissance d'une matrice diagonale est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les puissances des coefficients diagonaux de la matrice de départ. *Exemple 1) ci-dessous*
- ❖ Dans le cas d'une matrice diagonale **inversible** : les éléments diagonaux de l'inverse sont les inverses des éléments de la matrice. *Exemple 2)*
- ❖ Toujours pour une matrice diagonale **inversible** : $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, soit : « l'inverse de la puissance est égal à la puissance de l'inverse ». *Exemple 3)*
- ❖ Toute matrice diagonale **commute** avec n'importe quelle de ses puissances, et leur inverse. De manière plus générale, toute matrice diagonale commute avec toute autre matrice diagonale.

Ex : Soit la matrice $J \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1) $J^n = \begin{bmatrix} 8^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) $J^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) $(J^n)^{-1} = (J^{-1})^n = \begin{bmatrix} 1/8^n & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

F. TUT'ASTUCE : CALCUL DE DETERMINANT 3*3 :

- ❖ Vous connaissez sûrement maintenant la méthode « traditionnelle » donnée par le prof pour calculer le déterminant d'une matrice 3*3, mais voilà un premier coup de pouce pour mieux visualiser :

$$\text{Det} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a \cdot \text{Det} \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \cdot \text{Det} \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \cdot \text{Det} \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}.$$


Grace au système de couleurs on peut visualiser :

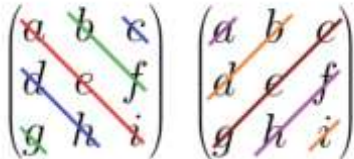
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Ça nous donne donc :

$$\text{Det} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

- ❖ 2eme possibilité pour calculer ce déterminant si la formule du cours vous donne mal à la tête : La règle de Sarrus (trouvée par la formidable BloodyMary)

- Multiplication** des coefs barrés de la même couleur : 
- Addition** des 3 produits de chaque matrice : $aei + dhc + bfg$ et $ceg + dbi + afh$
- Soustraction** de ces 2 résultats : $aei + dhc + bfg - (ceg + dbi + afh)$



Mot de fin : C'est fini pour ce cours dont vous avez enfin toutes les notions nécessaires pour aborder les qcm du prof !
 Courage à tous, la Biostat vous embrasse fort.