Equations différentielles pour la modélisation en santé

Bon, bon, bon, bienvenue sur ce tout nouveau cours du Pr. Maignant portant sur les équations différentielles. Comme vous avez dû le remarquer, la diapo est très peu expliquée et détaillée. Vous trouverez donc dans cette fiche l'intégralité de la diapo + toutes mes recherches (en italique pour le cours, en bleu pour les exemples). Toutes les explications, propriétés et exemples que vous trouverez sur cette fiche proviennent donc des vidéos d'Yvan Monka (qui, je vous rassure, est un vrai prof de math). Ces ajouts ne sont en théorie PAS A APPRENDRE, mais sont là pour votre compréhension.
J'ai fait en sorte d'éclaircir le maximum de notions mais certains passages du cours restent assez flous. La fiche est donc susceptible de changer au fil du temps en fonction des réponses du professeur Maignant. Bon courage !

I) Introduction

a) Définitions

Rappel (ou nouveauté) : Une équation différentielle est une équation dont les inconnus représentent des fonctions.
Par exemple : dans l'équation 3y' + 5y = 0, on cherche la fonction qui, lorsque l'on multiplie 3x sa dérivé et 5x la fonction pure donne 0.
La plupart du temps, de nombreuses fonctions sont solutions de ces équations.

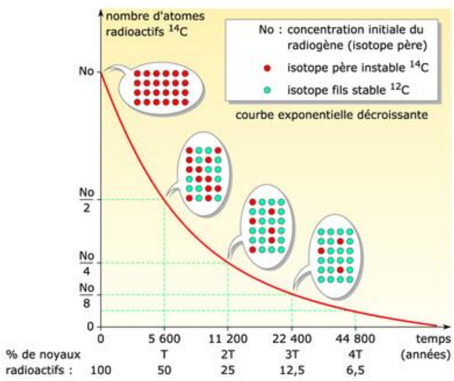
Toute **Equation différentielle (ED)** est une équation reliant une fonction et ses dérivées d'ordre 1, 2, …n.

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Les solutions d'une telle équation s'appellent le **flot**.

b) Utilité des équations différentielles

Décroissance radioactive du ^{14}C



- ✓ Modéliser les oscillations d'un pendule, d'un ressort, d'une corde …
- ✓ Modéliser les circuits électriques
- ✓ Estimer un taux de radioactivité (demi-vie…)
- ✓ Dater au carbone 14
- ✓ Modéliser des systèmes complexes (comme par exemple le modèle proies – prédateurs)

II) Equations différentielles du premier ordre

Bon alors ces 2 paragraphes qui arrivent c'est de la définition d'ensemble, c'est là pour faire peur mais ça sert pas à grand-chose, donc osef.

Soit E un espace vectoriel normé complet sur R. On appelle équation différentielle du premier ordre une équation de la forme $y'=f(x,y)$, où f est une application continue sur un ouvert U de R × E à valeurs dans E.

On appelle solution de cette équation une application φ dérivable sur un intervalle I de R à valeurs dans E telle que, pour tout point x de I, $(x, \varphi(x))$ appartienne à U et que :

$$\varphi'(x)=f(x, \varphi(x))$$

a) *Résolution d'une ED du premier ordre sans second membre :*

Toute équation différentielle du premier ordre sans second membre s'écrit sous la forme :

y' + ay = 0 (E) où a est un réel quelconque.

Dans une ED du premier ordre, la fonction n'est dérivée qu'une fois (ici y'). Sans second membre signifie qu'il n'y a que la fonction au sein de l'équation, en effet on est sous la forme y' + ay = 0, il n'y a que le 0 de l'autre côté de l'équation. NB : Une ED de premier ordre a toujours une solution.

Remarquons que y = 0 est une solution dite évidente de (E). Cherchons maintenant les solutions non nulles.

Propriété : Lorsque l'on se trouve face à une équation différentielle du type :

$$y' = ay \quad (a \in IR)$$

alors l'ensemble des solutions peut s'écrire sous la forme :

$$y_c(x) = Ce^{ax} \quad (C \in IR)$$

(on peut utiliser la méthode dite de **séparation des variables** pour aboutir à ce résultat).
Autrement dit, pour n'importe quelle valeur réelle de C, la solution permettra de vérifier l'équation différentielle.

Exemple : On pose l'équation différentielle suivante :

$$3y' + 5y = 0$$

On transforme l'ED afin qu'elle soit sous la forme de la propriété (y' = ay) :

$$3y' = -5y$$
$$\Rightarrow y' = \frac{-5}{3}y$$

On a bien y' = ay avec $a = -\frac{5}{3}$, on peut donc conclure, d'après la propriété, que la solution générale de l'ED est :

$$y(x) = Ce^{-5/3x} \quad (C \in IR)$$

b) Résolution d'une équation différentielle du premier ordre avec second membre réel :

Toute équation différentielle du premier ordre *(toujours pas de dérivé seconde)* avec **second membre** s'écrit de la forme :

y' + ay = b (E') où a et b sont des réels quelconques *(b étant le second membre)*

Propriété : Lorsque l'on se trouve face à une ED du premier ordre avec second membre du type :

$$y' = ay + b$$

alors l'ensemble des solutions peut s'écrire sous la forme :

$$y_c(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in IR$$

La solution de cette équation est donc la somme de la solution de l'équation sans second membre (Ce^{ax}) et d'une solution particulière $y_0 = -\frac{b}{a}$ *(vu juste après).*

Exemple version corrigée (changement de signe) : On pose l'équation différentielle suivante :

$$2y' - y = 3$$

On transforme l'ED afin qu'elle soit sous la forme de la propriété (y' = ay + b) :

$$2y' = y + 3$$
$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

On a bien y' = ay + b avec a = ½ et b = 3/2 , on peut donc conclure, d'après la propriété, que la solution générale de l'ED est :

$$y(x) = Ce^{1/2x} - 3 \text{ , } C \in \mathbb{R}$$

On retrouve effectivement une solution sous la forme Ce^{ax} (solution générale) + y_0 (solution particulière). **Diapo : Si l'ED est directement sous la forme y' + ay = 0 alors les solutions générales peuvent simplement s'écrire : Ce^{-ax} +++ *(donc si ED : y' + ay = 0 alors S = Ce^{-ax} et si ED : y' = ay alors S = Ce^{ax} , logique vu que le a change de côté et donc de signe*)**

Nouvelle version : Et si l'ED est directement sous la forme y' + ay = b alors les solutions générales peuvent simplement s'écrire : Ce^{-ax} + b/a+++ *(donc si ED : y' + ay = b alors S = Ce^{-ax} + b/a et si ED : y' = ay + b alors S = Ce^{ax} - b/a)* *donc dans tous les cas on change juste les signes*

Pourquoi la solution particulière y_0 = b/a ? *(pas dans la diapo)*

Tout d'abord, il faut savoir qu'une solution particulière d'une ED est constante, on peut donc l'écrire sous la forme :

$$p(x) = k$$

Souvenez-vous, les solutions des équations différentielles sont des fonctions.
La fonction p vérifie l'équation différentielle, on remplace donc y par la fonction p en reprenant l'ED de l'exemple précédent :

$$y' = \frac{1}{2}p(x) + \frac{3}{2}$$

On remplace y' par la dérivé de p(x) qui, je le rappelle, est une constante :

$$0 = \frac{1}{2}p(x) + \frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{2}p(x) = \frac{-3}{2}$$
$$p(x) = \frac{-3/2}{1/2}$$
$$p(x) = -3$$

On retrouve bien notre solution particulière constante sous la forme b/a

c) Résolution d'une équation différentielle du premier ordre avec une fonction en second membre

Lorsque le second membre est une fonction, on procède par la **méthode de la variation de la constante** suivie d'une intégration (calcul intégral).

i) *Premier Théorème* *(à mon avis ce théorème osef puisque vous n'aurez jamais le temps de calculer une intégrale au CC)*

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$; elle est définie par :

$$\forall x \in I, y(x) = y_0 e^{A(x_0)-A(x)} + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}dt.$$

ii) *Deuxième Théorème*

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, solutions générale et particulière)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I, $\bar{y}$ une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur I. Soit de plus y une fonction dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $y' + ay = b$ sur I.
(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, sur I, on ait

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\lambda e^{-A}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

Exemple : On considère l'équation différentielle :

$$y' - 2y = x^2$$

On cherche d'abord à montrer que **$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$** est une solution particulière de l'équation *(ce n'est pas dans la diapo c'est juste pour vous aider à comprendre). Pour cela, on va remplacer y par $u(x)$ dans notre ED afin de retrouver l'égalité $u'(x) - 2u(x) = x^2$:*

On commence en calculant $u'(x)$: $u'(x) = -x - \frac{1}{2}$

Puis on remplace dans l'équation : $u'(x) - 2u(x)$

$$= -x - \frac{1}{2} - 2\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$$

$$= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$= \cancel{-x} \cancel{-\frac{1}{2}} + x^2 + \cancel{x} + \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$= x^2$$

On a donc prouvé que $u(x)$ est une solution particulière de l'ED $y' - 2y = x^2$. *En remplaçant y par $u(x)$ dans l'équation, l'égalité est vérifiée.*

On va maintenant chercher à trouver les solutions générales de notre équation différentielle. Pour cela, une propriété nous dit que face à une équation de la forme
$y' = ay + f$ ($y' = 2y + x^2$ dans l'exemple), l'ensemble des solutions est représenté par la somme de 2 fonctions :

$$x \to u(x) + v(x)$$

où $u(x)$ est une solution particulière de l'équation $y' = ay + b$,
et $v(x)$ est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Nous venons de monter que u(x) était bel et bien une solution particulière de l'ED y' = 2y + x^2.

Il faut maintenant trouver v(x), c'est-à-dire une solution quelconque de l'équation : y' = 2y. Pour cela on va simplement utiliser la propriété vu page 2 qui nous dit que pour chaque ED de type y' = ay , il existe une solution générale/quelconque de la forme $y_c(x) = Ce^{-ax}$ (C ϵ IR).

On peut donc définir les solutions de l'équation y' = 2y comme étant : **$v(x) = Ce^{-2x}$** (C ϵ IR).

Et on peut enfin définir la forme générale des solutions de l'équation y' = 2y + x^2 :

$$y_c(x) = u(x) + v(x)$$

$$y_c(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x} \quad (C \in IR).$$

On se rend compte que l'on retrouve bien la formule du théorème de la page précédente, à savoir :

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\lambda e^{-A}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

$$y_c(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$$

(Je pense que C et λ ont la même signification soit une constante)

On vérifie également que **A** soit bien une primitive de **a** sur *I* avec **a** = 2 dans l'équation de base et **A** = $2x$ dans le résultat final, soit sa primitive.

On a montré que pour n'importe quelle valeur de C, la fonction $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle y' = 2y + x^2.

On a donc prouvé que si l'on connaît une solution particulière de l'équation, on en connaît toutes les solutions. Le théorème est démontré pour ce cas particulier.

III) Equations différentielles du second ordre

a) *Résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants*

i) *Equation homogène (sans second membre)*

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. On appelle polynôme caractéristique de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

• **Cas complexe** ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1. Si $\Delta \neq 0$, soient r_1 et r_2 les racines distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.
2. Si $\Delta = 0$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

• **Cas réel** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

1. Si $\underline{\Delta > 0}$, soient r_1 et r_2 les racines (réelles) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
2. Si $\underline{\Delta = 0}$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. Si $\underline{\Delta < 0}$, soient $r + i\omega$ et $r - i\omega$ les racines (complexes conjuguées) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x))\, e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que l'on peut aussi mettre sous la forme $x \mapsto \lambda \sin(\omega x + \phi)e^{rx}$ ou $x \mapsto \lambda \cos(\omega x + \phi)e^{rx}$, $\lambda, \phi \in \mathbb{R}$.

Si de plus une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ est fixée, avec $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, alors la valeur des constantes est fixée. L'équation avec condition initiale possède une unique solution.

Exemple : On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Pour la résoudre on va d'abord poser le polynôme caractéristique associé :

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

On va maintenant résoudre cette équation du second degré :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4 > 0$$

Δ > 0 donc 2 solutions réelles à l'équation caractéristique :

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3$$

Propriété : Lorsqu'un polynôme caractéristique d'une ED possède 2 solutions réelles alors l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle est sous la forme :

$$y_{c1c2}(x) = C_1e^{r1x} + C_2e^{r2x} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})$$

Donc, l'ensemble des solutions de notre équation différentielle peut se noter, d'après la propriété :

$$y_{c1c2}(x) = C_1e^{1x} + C_2e^{3x} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})$$

Nous venons donc de développer le premier point du théorème (Δ ≠ 0 et Δ > 0).

Deuxième exemple : On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Pour la résoudre on va d'abord poser le polynôme caractéristique associé :

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

On va maintenant résoudre cette équation du second degré :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$$

$\Delta = 0$ donc 1 unique solution réelle à l'équation caractéristique :

$$r = \frac{-b}{2a}$$

$$r = \frac{4}{2}$$

$$r = 2$$

Propriété : Lorsqu'un polynôme caractéristique d'une ED possède 1 unique solution réelle alors l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle est sous la forme :

$$\mathbf{y_{c1c2}(x) = (C_1\, x + C_2)e^{rx}} \qquad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})$$

(dans la diapo C_1 est représentée par λ et C2 par μ)

Donc, l'ensemble des solutions de notre équation différentielle peut se noter, d'après la propriété :

$$y_{c1c2}(x) = (C_1\, x + C_2)e^{2x} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})$$

Nous venons donc de développer le deuxième point du théorème ($\Delta = 0$).

Troisième exemple : *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

Pour la résoudre on va d'abord poser le polynôme caractéristique associé :

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

On va maintenant résoudre cette équation du second degré :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$$

$\Delta < 0$ donc 2 solutions complexes conjuguées à l'équation caractéristique :

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{2-4i}{2} \qquad\qquad = \frac{2+4i}{2}$$

$$= 1 - 2i \qquad\qquad = 1 + 2i$$

Propriété : Lorsqu'un polynôme caractéristique d'une ED possède 2 solutions complexes conjuguées ($r + i\omega$ et $r - i\omega$) alors l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle est sous la forme :

$$y_{c1c2}(x) = (C_1\sin(\omega x) + C_2\cos(\omega x))e^{rx} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})$$

Donc, l'ensemble des solutions de notre équation différentielle peut se noter, d'après la propriété :

$$y_{c1c2}(x) = (C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x))e^{1x} \qquad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})$$

Nous venons donc de développer le troisième point du théorème ($\Delta < 0$).

i) Equation avec second membre

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

En gros en déterminant un x_0 spécifique, il n'y a qu'une seule solution à l'équation. Pas grand-chose à rajouter pour ce premier théorème, il ne me semble pas hyper important.

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\bar{y}$ une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ sur I. Soit de plus $y : I \to \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $ay'' + by' + cy = d$ sur I.
(ii)

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\widetilde{y}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

Exemple : On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y + 4y = e^{-2x}$$

Propriété : L'ensemble des solutions d'une ED de second ordre avec second membre correspond à la somme des solutions générales de l'équation homogène associée (sans second membre) et d'une solution particulière de l'ED.

Première étape : Nous allons d'abord chercher l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée soit :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Seulement, nous avions déjà résolu cette équation dans le point précédent (exemple 2 page 6) et nous avions conclu que l'ensemble des solutions d'une telle équation était :

$$y_{c1c2}(x) = (C_1x + C_2)e^{2x} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})$$

Deuxième étape : Il ne nous reste donc plus qu'à trouver une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 4y + 4y = e^{-2x}$.

Etant donné que le second membre est une fonction exponentielle il y a tout un raisonnement particulier à réaliser mais le prof n'aborde absolument pas ce point-là dans la diapo donc ça ne sert à rien d'alourdir la fiche pour rien. On se contentera donc du résultat (désolé pour le manque d'explications).

Une solution particulière de l'ED est sous la forme : $\frac{1}{16}e^{-2x}$

Troisième étape : On va maintenant déterminer les solutions générales de l'équation différentielle. Pour ce faire, il suffit d'additionner les solutions générales de l'équation homogène associée et la solution particulière de l'ED.

On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de l'ED s'écrit sous la forme :

$$y(x) = (C_1x + C_2)e^{2x} + \frac{1}{16}e^{-2x} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})$$

On se rend compte que l'on retrouve bien la formule du théorème :

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\tilde{y}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

$$y(x) = \frac{1}{16}e^{-2x} + (C_1x + C_2)e^{2x}$$

Pour n'importe quelle valeur de C, la fonction $(C_1x + C_2)e^{2x} + \frac{1}{16}e^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 4y + 4y = e^{-2x}$. On a donc prouvé que si l'on connaît une solution particulière de l'équation, on en connaît toutes les solutions. Le théorème est démontré pour ce cas particulier.

RECAP des solutions générales +++ :

ED du premier ordre sans second membre :

$$y_c(x) = Ce^{-ax}$$

ED du premier ordre avec second membre réel :

$$y_c(x) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$$

ED du premier ordre avec une fonction en second membre :

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\lambda e^{-A}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

ED du second ordre sans second membre à coefficients constants :

Si $\Delta > 0$: $y_{c1c2}(x) = C_1e^{r1x} + C_2e^{r2x}$

Si $\Delta = 0$: $y_{c1c2}(x) = (C_1x + C_2)e^{rx}$

Si $\Delta < 0$: $y_{c1c2}(x) = (C_1\sin(\omega x) + C_2\cos(\omega x))e^{rx}$

ED du second ordre avec second membre à coefficients constants :

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\tilde{y}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

IV) Modèles en équations différentielles

a) Le modèle de Lotka – Volterra

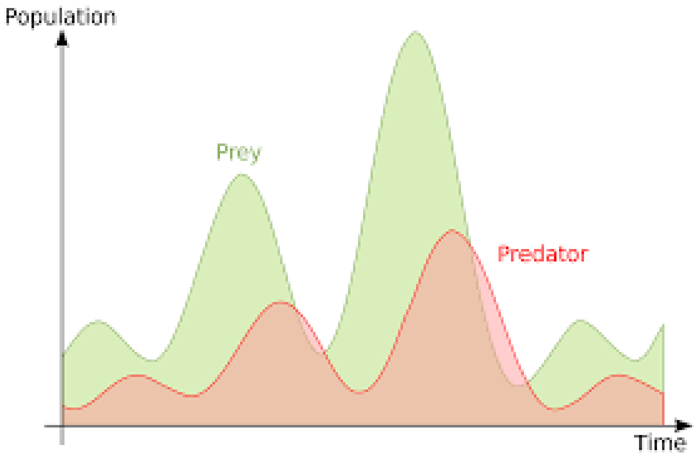
En mathématiques, les **équations de prédation de Lotka-Volterra**, que l'on désigne aussi sous le terme de **« modèle proie-prédateur »**, sont un couple d'équations différentielles non-linéaires du **premier ordre**, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent.

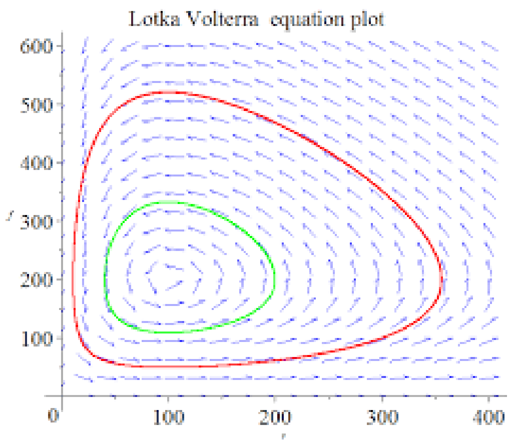
Dans ce système, **t** désigne le temps, **x(t)** l'effectif des proies, **y(t)** l'effectif des prédateurs, **x'(t)** et **y'(t)** les variations des populations au cours du temps, **α** le taux de reproduction des proies, **β** le taux de mortalité des proies, **δ** le taux de reproduction des prédateurs et **γ** le taux de mortalité des prédateurs.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = y(t)(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$$

Ce système ne présentant pas de solution analytique, les solutions sont représentées par des schémas :





b) Le modèle de Verhulst

Verhulst a proposé de modéliser la dynamique de population, le cycle de vie d'une innovation etc…
Ce problème se modélise par une équation différentielle de la forme :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) \end{cases}$$

Autrement dit l'évolution de la population est une fonction de la population et de la population au carré. *(je suppose en développant la 2[e] équation)*

En faisant un changement de variable z = $\frac{1}{y}$, on obtient : $z' = rz\left(1 - \frac{1}{kz}\right)$ = rz – r/k

Soit : $z' = rz - \frac{r}{k}$ c'est-à-dire une **équation du premier ordre avec second membre** (cas vu auparavant).

<u>Point Exercice</u> (tout ce que dit le prof dans les exercices mais pas dans la diapo de cours pur, A SAVOIR QUAND MEME) :

- Une ED du premier ordre ne peut pas ne pas avoir de solution.
- Une ED linéaire du premier ordre a une infinité de solution. Elle a une unique solution passant par un point donné (de type (a, b)).
- Une ED **quelconque** (tout ordres confondus) n'a pas forcément d'écriture analytique simple et n'a pas nécessairement de solution
- Les solutions du modèle **de Lotka – Volterra** sont **périodiques**, c.à.d que les deux fonctions x(t) et y(t) passent par des mêmes valeurs à intervalles de temps réguliers
- Lors de l'étude d'une décroissance radioactive de noyaux, λ désigne la vitesse de décroissance, il s'exprime comme l'inverse d'un temps
- *On passe pour le QCM de Biophy…*
- Pour déterminer une solution particulière d'une ED du premier ordre avec une fonction en second membre, on peut utiliser la méthode de la **variation de la constante**
- Une primitive de $\frac{-b(x)}{a(x)}$ n'a pas forcément de forme analytique
- *Bon l'exercice 11 c'est une calamité, je demanderai une co détaillée au prof*

Fin