

Correction DM n°3 : Equations Différentielles

Tutorat 2020-2021 : 14 QCMS



QRU 1 : D

- A) Faux : Une solution est $y = e^{-5x}$ mais cette solution n'est pas l'unique solution de l'équation
B) Faux : La fonction n'est dérivée qu'une fois, il s'agit donc d'une ED de premier ordre
C) Faux : Toute solution s'écrit Ce^{-5x} où C désigne une **constante**
D) Vrai
E) Faux

QRU 2 : B

On est sous la forme $y' + ay = b$, la forme des solutions générales est donc $Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$ donc : **$Ce^{-4x} + 3$**

- A) Faux
B) Vrai
C) Faux
D) Faux
E) Faux

QRU 3 : E

On pose l'ED suivante : $7y' + 6y = 15$; il s'agit donc d'une ED de premier ordre avec second membre constant. La forme des solutions générales est donc : $Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$. Seulement, une valeur se trouve devant y' , ce qui nous écarte de la forme de la propriété. On va donc devoir développer :

$$7y' + 6y = 15$$
$$y' + 6/7y = 15/7$$

On a donc $a = 6/7$ et $b = 15/7$; on peut maintenant remplacer dans la formule des solutions générales :

$$Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$$
$$Ce^{-6/7x} + \frac{15/7}{6/7}$$
$$Ce^{-6/7x} + \frac{15}{6}$$

On a bien la forme des solutions générales : **$Ce^{-6/7x} + \frac{15}{6}$**

- A) Faux
B) Faux
C) Faux
D) Faux
E) Vrai

QRU 4 : A

On est sous la forme $y' + ay = f(x)$, la forme des solutions générales est donc $Ce^{-ax} + y_0$ donc : **$Ce^{4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}$**

- A) Vrai
B) Faux
C) Faux
D) Faux
E) Faux

QRU 5 : D

- A) Faux : La formule du discriminant Δ est $b^2 - 4ac$
B) Faux : Pas forcément, une solution peut être négative même si le discriminant est positif. En effet, en rappelant la formule de la première solution $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ il y a de nombreuses situations permettant de trouver un r_1 négatif
C) Faux : Si le discriminant est nul, l'équation possède une unique solution
D) Vrai
E) Faux

QRU 6 : C

On se trouve face à une équation différentielle de deuxième ordre sans second membre, la première chose à faire est donc de déterminer le polynôme caractéristique associé.

On pose l'équation : $y'' + 6y' - 2y = 0$ et son polynôme associé : $r^2 + 6r - 2 = 0$

On calcule maintenant le discriminant de ce polynôme du second degré : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(-2) = 36 + 8 = 44$

Le discriminant est positif, l'équation possède donc 2 solutions réelles :

$r_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/2a = (-6 - \sqrt{44})/2$ et $r_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a = (-6 + \sqrt{44})/2$

- A) Faux
- B) Faux
- C) Vrai
- D) Faux
- E) Faux

QRU 7 : A

On est face à une équation différentielle homogène (sans second membre) de second ordre avec un polynôme caractéristique possédant un discriminant positif, la forme des solutions générales est donc $Ce^{r_1x} + Ce^{r_2x}$

- A) Vrai
- B) Faux
- C) Faux
- D) Faux
- E) Faux

QRU 8 : B

QRU difficile... Tout d'abord, on se trouve face à une équation différentielle homogène de second ordre, on doit donc passer par le polynôme caractéristique :

On pose l'équation : $4y'' + 4y' + 1y = 0$ et son polynôme associé : $4r^2 + 4r + 1 = 0$

On calcule maintenant le discriminant de ce polynôme du second degré : $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$

Le discriminant est nul, l'équation possède donc une unique solution réelle telle que : $r = -b/2a = -4/8 = -0,5$

On est face à une équation différentielle homogène de second ordre avec un polynôme caractéristique possédant un discriminant nul, la forme des solutions générales est donc $(C_1x + C_2)e^{-0,5x}$ ce qui donne en remplaçant par la solution réelle : $(C_1x + C_2)e^{-0,5x}$

- A) Faux
- B) Vrai
- C) Faux
- D) Faux
- E) Faux

QRU 9 : A

On se trouve face à une équation différentielle de deuxième ordre sans second membre, la première chose à faire est donc de déterminer le polynôme caractéristique associé.

On pose l'équation : $y'' + y' + y = 0$ et son polynôme associé : $r^2 + r + 1 = 0$

On calcule maintenant le discriminant de ce polynôme du second degré : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 = i^2 3$

Le discriminant est négatif, l'équation possède donc 2 solutions complexes conjuguées :

$r_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/2a = (-1 - i\sqrt{3})/2$ et $r_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a = (-1 + i\sqrt{3})/2$

- A) Vrai
- B) Faux
- C) Faux
- D) Faux
- E) Faux

QRU 10 : E

On est face à une équation différentielle homogène de second ordre avec un polynôme caractéristique possédant un discriminant négatif dont les solutions sont sous la forme $(r + iw)$ et $(r - iw)$, la forme des solutions générales de l'ED est donc $(C_1 \sin(wx) + C_2 \cos(wx))e^{rx}$. On rappelle les solutions du polynôme : $r_1 = (-1 - i\sqrt{3})/2 = -0,5 - i(\sqrt{3}/2)$ et

$r_2 = (-1 + i\sqrt{3})/2 = -0,5 + i(\sqrt{3}/2)$. On a donc $r = -0,5$ et $w = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on remplace dans la formule $(C_1 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) +$

$C_2 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x))e^{-0,5x}$

- A) Faux
- B) Faux
- C) Faux
- D) Faux
- E) Vrai

Question 11 :

Bon alors là j'ai tenté un truc un peu spécial, vous n'êtes pas censé voir de questions ouvertes de ce type aux examens mais je pense que ça reste un bon entraînement. Bon, commençons à répondre :

On pose l'équation différentielle suivante : $y'' + 3y' + 2y = 0$

Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre, on va donc chercher son polynôme caractéristique :

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

On va maintenant résoudre cette équation du second degré :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1 > 0$$

$\Delta > 0$ donc 2 solutions réelles à l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-3 - 1}{2} \quad \quad \quad = \frac{-3 + 1}{2} \\ &= -2 \quad \quad \quad \quad \quad = -1 \end{aligned}$$

On est face à une équation différentielle homogène de second ordre avec un polynôme caractéristique possédant un discriminant positif, la forme des solutions générales est donc $Ce^{r_1x} + Ce^{r_2x}$

On remplace par nos valeurs : $Ce^{-2x} + Ce^{-x}$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 0$ est donc **$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$**

QRU 12 : E

- A) Faux : Le second membre n'est pas du tout une constante ! $\frac{1}{x}$ est une variable
- B) Faux : Si l'on détermine un x_0 spécifique, l'équation aura une **unique solution**
- C) Faux : En connaissant une solution particulière de cette équation, on en connaît **TOUTES** les solutions
- D) Faux : N'importe quoi, les solutions générales d'une équation différentielle de second ordre avec second membre correspondent à la somme d'une solution particulière de l'équation et de l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée
- E) Vrai

QRU 13 : C

- A) Faux : Ce modèle regroupe des équations non-linéaires du **premier** ordre
- B) Faux : Dans ce système, β désigne le taux de **taux de mortalité des proies**
- C) Vrai
- D) Faux : Ce genre de système ne présente PAS de solution analytique simple
- E) Faux

QRU 14 : D

- A) Faux : Une ED du premier ordre a toujours une solution
- B) Faux : Les solutions du modèle de Lotka – Volterra sont **périodiques**
- C) Faux : λ s'exprime comme l'inverse d'un temps
- D) Vrai
- E) Faux

Petit point dédicace : Dédicace à Oscar (qui fait trop le fou), Stella et Rosa mes fillots merveilleux que je retrouve en P2 l'année prochaine !

Dédicace à Marie et ses idées du turf, Simon le plus gros bluffeur de l'Histoire, Sarah qui dessine mieux que si j'avais fait 20 ans d'arts-plastiques et Ricardo que je croise plus en soirée qu'à la BU (enfin ça c'était avant le confinement snif...). Je vous aime trop, je suis trop content de partager cette matière et ces souvenirs avec vous <3

Dédicace à la Bioch qui a beau avoir une belle matière (la meilleure après la Biostat au passage) doit s'améliorer en gobage de flambys.

Dédicace aux CT qui font tous du merveilleux taff dans l'ombre

Dédicace à la vidéo de compilation de 4h de musiques de Zelda qui m'a aidée à finir ce DM de l'enfer

Dédicace au cinéma, à la musique et à la danse

Dédicace à vous pour être arrivé jusqu'à la fin de ce DM, c'est un cours compliqué mais bossez le bien, il finira par rentrer (on me chuchote à l'oreille qu'une fiche récap est en projet)

Dédicace à moi parce que je suis en P2 et donc égocentrique

Dédicace à Luca Girone le meilleur parrain au monde (je ne serai sûrement pas en P2 sans lui)

Dédicace à Virgile le plus P2 des D1

Et enfin dédicace à Rock Lee et son combat magnifique contre Gaara

Et n'oubliez jamais : Un travail acharné surpassera toujours le talent ! Bon courage à tous !