Equations différentielles pour la modélisation en santé (édition simplifiée)

I) Introduction

a) Définitions

Toute **Equation différentielle (ED)** est une équation reliant une fonction et ses dérivées d'ordre 1, 2, …n.

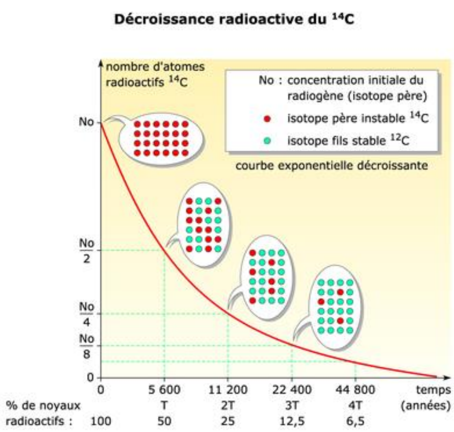
$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Les solutions d'une telle équation s'appellent le **flot**.

b) Utilité des équations différentielles

- ✓ Modéliser les oscillations d'un pendule, d'un ressort, d'une corde …
- ✓ Modéliser les circuits électriques
- ✓ Estimer un taux de radioactivité (demi-vie…)
- ✓ Dater au carbone 14
- ✓ Modéliser des systèmes complexes (comme par exemple le modèle proies – prédateurs)

II) Equations différentielles du premier ordre



Soit E un espace vectoriel normé complet sur R. On appelle équation différentielle du premier ordre une équation de la forme $y'=f(x,y)$, où f est une application continue sur un ouvert U de R × E à valeurs dans E.

On appelle solution de cette équation une application φ dérivable sur un intervalle I de R à valeurs dans E telle que, pour tout point x de I, $(x, \varphi(x))$ appartienne à U et que :

$$\varphi'(x)=f(x, \varphi(x))$$

a) Résolution d'une ED du premier ordre sans second membre :

Toute équation différentielle du premier ordre sans second membre s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{y' + ay = 0} \text{ (E) où a est un réel quelconque.}$$

Remarquons que y = 0 est une solution dite <u>évidente</u> de (E). Cherchons maintenant les solutions non nulles.

Propriété : Lorsque l'on se trouve face à une équation différentielle du type :

$$\mathbf{y' + ay = 0} \quad (a \in \mathrm{IR})$$

alors l'ensemble des solutions peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{y_c(x) = Ce^{-ax}} \quad (C \in \mathrm{IR})$$

(on peut utiliser la méthode dite de **séparation des variables** pour aboutir à ce résultat).
Autrement dit, pour n'importe quelle valeur réelle de C, la solution permettra de vérifier l'équation différentielle.

b) Résolution d'une équation différentielle du premier ordre avec second membre réel :

Toute équation différentielle du premier ordre avec **second membre** s'écrit de la forme :

y' + ay = b (E') où a et b sont des réels quelconques

Propriété : Lorsque l'on se trouve face à une ED du premier ordre avec second membre du type :

$$\mathbf{y' + ay = b}$$

alors l'ensemble des solutions peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{y_c(x) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}}, \; C \in \mathrm{IR}$$

La solution de cette équation est donc la somme de la solution de l'équation sans second membre (Ce^{-ax}) et d'une solution particulière $\mathbf{y_0 = \frac{b}{a}}$.

c) Résolution d'une équation différentielle du premier ordre avec une fonction en second membre

Lorsque le second membre est une fonction, on procède par la **méthode de la variation de la constante** suivie d'une intégration (calcul intégral).

i) *Premier Théorème* *(à mon avis ce théorème osef puisque vous n'aurez jamais le temps de calculer une intégrale au CC)*

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$; elle est définie par :

$$\forall x \in I, y(x) = y_0 e^{A(x_0)-A(x)} + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}dt.$$

ii) *Deuxième Théorème*

Propriété : Lorsque l'on se trouve face à une ED du premier ordre avec une fonction en second membre du type :

$$\mathbf{y' + a(x)y = b(x)}$$

alors l'ensemble des solutions peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{y_c(x) = Ce^{-A} + y_0}, \; C \in \mathrm{IR}$$

Avec A primitive de a sur I et y_0 solution particulière de l'équation.

III) Equations différentielles du second ordre

a) Résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants

i) Equation homogène (sans second membre)

Lorsque l'on se trouve face à une ED du second ordre sans second membre du type :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

on doit passer par le polynôme caractéristique de l'ED pour déterminer la forme des solutions générales. On appelle polynôme caractéristique de l'équation ay'' + by' + cy = 0 le polynôme $aX^2 + bX + c$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Propriété : $\Delta > 0$: Lorsqu'un polynôme caractéristique d'une ED possède 2 solutions réelles (r_1 et r_2) alors l'ensemble des solutions **réelles** de l'équation différentielle est sous la forme :

$$\mathbf{y_{c1c2}(x) = C_1e^{r1x} + C_2e^{r2x}} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathrm{IR})$$

Propriété : $\Delta = 0$: Lorsqu'un polynôme caractéristique d'une ED possède 1 unique solution réelle (r) alors l'ensemble des solutions **réelles** de l'équation différentielle est sous la forme :

$$\mathbf{y_{c1c2}(x) = (C_1x + C_2)e^{rx}} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathrm{IR})$$

Propriété : $\Delta < 0$: Lorsqu'un polynôme caractéristique d'une ED possède 2 solutions complexes conjuguées ($r + i\omega$ et $r - i\omega$) alors l'ensemble des solutions **réelles** de l'équation différentielle est sous la forme :

$$\mathbf{y_{c1c2}(x) = (C_1\sin(\omega x) + C_2\cos(\omega x))e^{rx}} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathrm{IR})$$

ii) Equation avec second membre

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

En gros en déterminant un x_0 spécifique, il n'y a qu'une seule solution à l'équation. Pas grand-chose à rajouter pour ce premier théorème, il ne me semble pas hyper important.

Propriété : L'ensemble des solutions d'une ED de **second ordre avec second membre** correspond à la somme des **solutions générales de l'équation homogène associée** (sans second membre) et **d'une solution particulière de l'ED**.

Si l'on connaît une solution particulière de l'équation, on en connaît toutes les solutions.

RECAP des solutions générales +++ :

ED du premier ordre sans second membre :

$$y_c(x) = Ce^{-ax}$$

ED du premier ordre avec second membre réel :

$$y_c(x) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$$

ED du premier ordre avec une fonction en second membre :

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\lambda e^{-A}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

ED du second ordre sans second membre à coefficients constants :

Si $\Delta > 0$: $y_{c1c2}(x) = C_1e^{r1x} + C_2e^{r2x}$

Si $\Delta = 0$: $y_{c1c2}(x) = (C_1x + C_2)e^{rx}$

Si $\Delta < 0$: $y_{c1c2}(x) = (C_1\sin(\omega x) + C_2\cos(\omega x))e^{rx}$

ED du second ordre avec second membre à coefficients constants :

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\tilde{y}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

IV) Modèles en équations différentielles

a) Le modèle de Lotka – Volterra

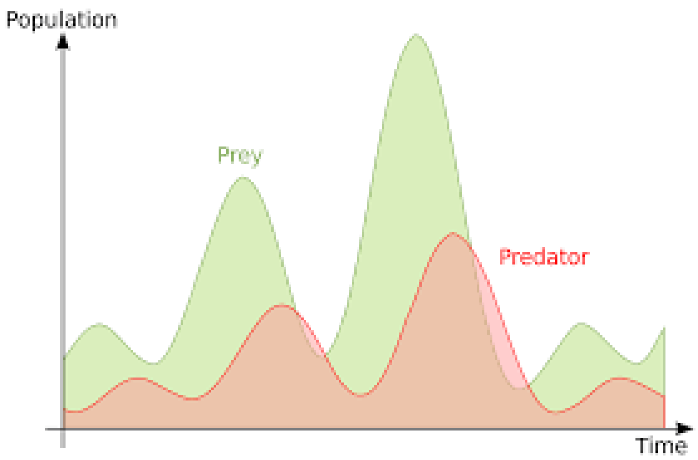
En mathématiques, les **équations de prédation de Lotka-Volterra**, que l'on désigne aussi sous le terme de **« modèle proie-prédateur »**, sont un couple d'équations différentielles non-linéaires du **premier ordre**, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent.

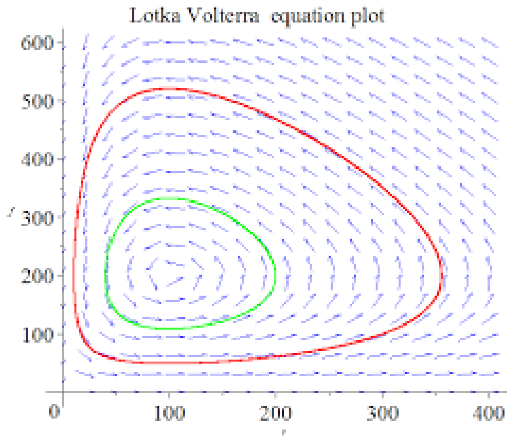
Dans ce système, **t** désigne le temps, x**(t)** l'effectif des proies, **y(t)** l'effectif des prédateurs, x'**(t)** et **y'(t)** les variations des populations au cours du temps, **α** le taux de reproduction des proies, **β** le taux de mortalité des proies, **δ** le taux de reproduction des prédateurs et **γ** le taux de mortalité des prédateurs.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = y(t)(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$$

<u>Ce système ne présentant pas de solution analytique</u>, les solutions sont représentées par des schémas :





b) Le modèle de Verhulst

Verhulst a proposé de modéliser <u>la dynamique de population, le cycle de vie d'une innovation etc…</u>
Ce problème se modélise par une équation différentielle de la forme :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y' = ry(1 - \dfrac{y}{K}) \end{cases}$$

Autrement dit l'évolution de la population est une fonction de la population et de la population au carré.
En faisant un changement de variable z = $\frac{1}{y}$, on obtient : $z' = rz\left(1 - \frac{1}{kz}\right)$ = rz – r/k
Soit : $z' = rz - \frac{r}{k}$ c'est-à-dire une **équation du premier ordre avec second membre** (cas vu auparavant).

<u>Point Exercice</u>

- Une ED du premier ordre ne peut pas ne pas avoir de solution.
- Une ED linéaire du premier ordre a une infinité de solution. Elle a une unique solution passant par un point donné (de type (a, b)).
- Une ED **quelconque** (tout ordres confondus) n'a pas forcément d'écriture analytique simple et n'a pas nécessairement de solution
- Les solutions du modèle **de Lotka – Volterra** sont **périodiques**
- Lors de l'étude d'une décroissance radioactive de noyaux, λ désigne la vitesse de décroissance, il s'exprime comme l'inverse d'un temps