Probabilités élémentaires et dénombrements

Introduction :

Le terme statistique désigne à la fois :

- La **science** qui s'intéresse aux propriétés des populations naturelles
- La **grandeur** obtenue à partir d'un ensemble de données d'observation
- Un **ensemble d'activités** qui concourent au recueil, au traitement et à l'interprétation des caractères étudiés

Une population est un **ensemble d'objets**, d'êtres vivants (population réelle) ou d'objets abstraits (population fictive) de même nature :

- Tous les étudiants de PASS de France

Cet ensemble est généralement très grand, voire infini du coup l'étude exhaustive de l'ensemble des individus d'une population est souvent impossible ou bien trop coûteuse.

On étudie alors tous les individus d'un sous-ensemble de cette population : ce sous-ensemble s'appelle un **échantillon**. C'est sur cet échantillon d'individus que sont recueillies les **caractéristiques** (morphologiques, physiologiques, etc. donc les variables quantitatives ou qualitatives)

Travailler sur un extrait de la population entière a pour conséquences :

- De **n'observer que partiellement la caractéristique** : pourra-t-on extrapoler à l'ensemble de la population
- **D'avoir des individus différents chaque fois que l'on choisit un nouvel échantillon :** la mesure sera donc différente pour chaque échantillon

La théorie des probabilités permet de **modéliser les phénomènes où le hasard intervient** (jeux de hasard).

Cette théorie permet de construire des modèles de ces phénomènes et permet le calcul de cette **« extrapolation » de la caractéristique observée sur l'échantillon**. Cela est possible seulement si la sélection des individus de l'échantillon à partir de la population est effectué au hasard. (Randomisation)

Ensembles, éléments :

Définitions :

Ensemble : Liste ou collection d'objets définis. (Ex : les étudiants en PASS)

Élément de l'ensemble : Objet appartement à l'ensemble. (Ex : vous-même au sein de l'ensemble « étudiants en PASS) »

- L'ensemble peut se définir en extension (=explicite), on liste tous les éléments un à un. Ex : A = {1, 3, 5, 7, 9}
- Il peut aussi se définir en compréhension (=implicite), on donne des propriétés caractérisant les éléments. Ex : A = {x : x est divisible par 2}

On peut noter que :

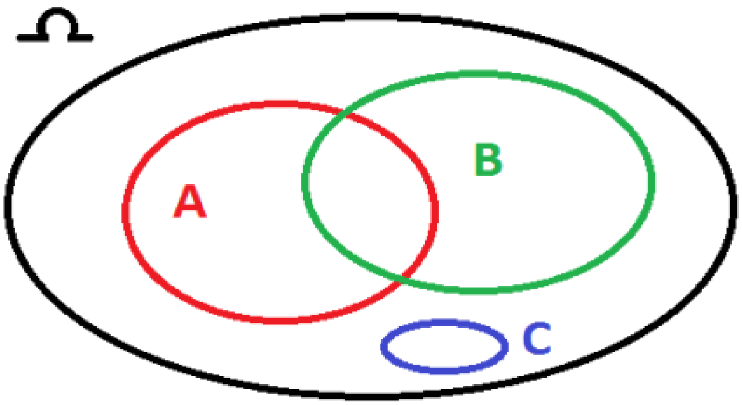
- p est un élément de l'ensemble A signifie que p appartient à A (p ∈ A).
  Ex : 3 appartient à l'ensemble A : {1 ; 2 ; 3}.
- Si l'ensemble B est une partie de l'ensemble A signifie que B est compris dans A (B ⊂ A).
  Ex : B : {1 ; 2} est une partie de A : {1 ; 2 ; 3}.
- L'ensemble vide est noté ∅.
- L'univers est noté Ω (oméga)

Opérations :

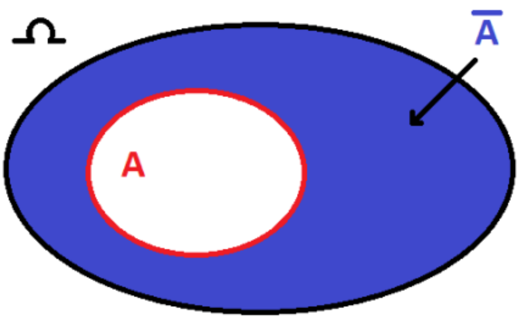
L'intersection entre deux ensembles A et B se note « A ∩ B », et signifie que l'on prend en compte le ou les éléments appartenant à la fois à A et à B.

Lorsque A ∩ B = ∅, on dit qu'il n'y a pas de solution. Les ensembles A et B sont disjoints

La réunion, on note « A ∪ B » la réunion des ensembles A et B. Cette opération consiste à prendre en compte le ou les éléments appartenant soit à A, soit à B, soit aux deux ensembles en même temps.



Le complémentaire d'un ensemble A noté CA il représente tout ce qui n'appartient pas à l'ensemble en question.

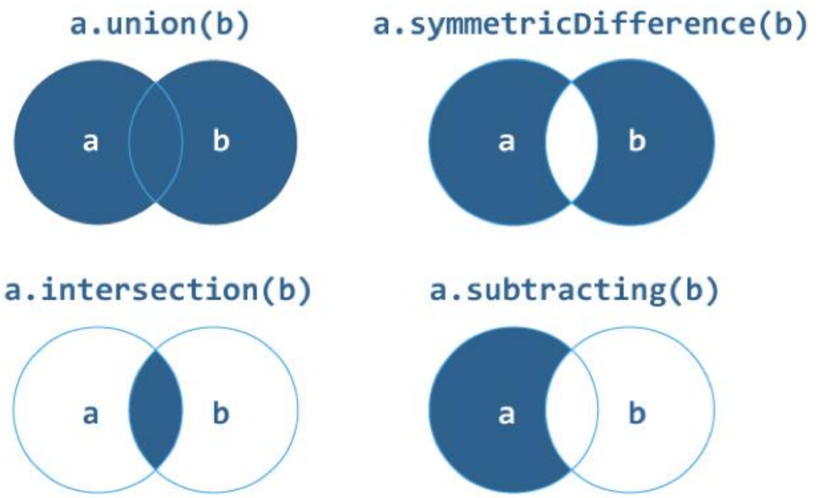


La différence et la différence symétrique :

Ces deux opérations ont un nom similaire mais sont très différentes.

La différence est tout simplement notée A-B et représente ce qui appartient à A, mais qui n'appartient pas à B. Elle est aussi appelée complémentaire de B relatif à A.

La différence symétrique, elle, représente tout ce qui appartient à A ou à B, sans appartenir à A ∩ B. Elle correspond au lien logique ou exclusif. On la note AΔB = A UB - A∩B



Opérations importantes à connaitre :

Il n'est pas nécessaire d'apprendre tout ça par cœur, une fois que vous avez compris c'est juste de la logique)

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \Omega = A$$
$$A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cup \complement A = \Omega \qquad A \cap \complement A = \varnothing$$
$$\complement\complement A = A \qquad \complement \Omega = \varnothing, \complement \varnothing = \Omega$$
$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B \qquad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

Ensembles :

Les différents types d'ensembles :

Ensembles finis	Ensembles infinis	
Ensemble nul ou contenant un nombre fini d'éléments Ex : (2, 4, 6, 8)	**Dénombrables :** Chaque élément peut être compté **Ex :** Ensemble des entiers naturels (1 2 3 4 5 …)	**Indénombrables :** On ne peut pas compter tous les éléments **Ex :** Ensembles des réels (1.1 1.111 1.111 1.111111…)

Les ensembles produits :

Soient deux ensembles : A et B. L'ensemble produit de A et B est l'ensemble des couples ordonnés (a ; b), avec a ∈ A et b ∈ B.

Pour calculer le nombre de couples possibles d'un ensemble produit, on fait :

Card(A) * Card(B)

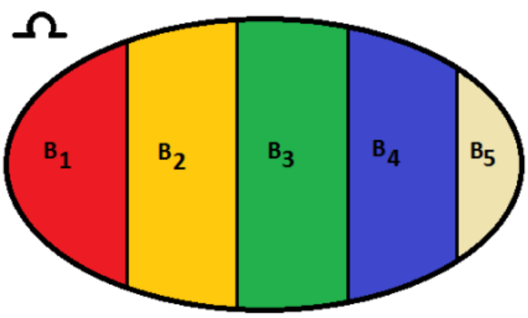
avec Card(A) le nombre d'éléments de l'ensemble A et de même pour Card(B).

Ex : si A : {rouge ; bleu} et B : {1 ; 2 ; 3}, alors l'ensemble produit de A et B est {(rouge ; 1), (rouge ; 2), (rouge ; 3), (bleu ; 1), (bleu ; 2), (bleu ; 3)} 2 * 3 = 6 possibilités.

Les familles d'ensembles :

Soit l'ensemble A = {1, 2,}. Cet ensemble est constitué de différents sous-ensembles ({1}, {1, 2} …), et tous ces sous-ensembles forment la famille des parties de A. Un ensemble contenant p éléments possède 2^p parties (= sous-ensembles).

La partition est la division de l'ensemble A en sous-ensembles disjoints dont la réunion forme A



Dénombrements :

Les dénombrements permettent, en fonction des situations, de calculer le nombre de possibilités de tirages lors d'épreuves de probabilités. Il existe différentes formules à apprendre et à savoir appliquer en fonction du dénombrement à effectuer !

I. La p-liste avec remise

La p-list avec remise est utilisée lors **des tirages ordonnés avec remise**, c'est-à dire que, par exemple, on tire une boule, on note le numéro, puis on la repose dans l'urne avant d'en tirer une nouvelle. Ainsi, l'ensemble dans lequel on tire est **toujours le même** !

La formule utilisée est $\mathrm{Card}(E)^p$, avec Card(E) le nombre d'éléments de l'ensemble et p le nombre de tirages.

Ex : j'ai les 26 lettres de l'alphabet (Card(E) = 26) et je veux savoir combien de mots de 3 lettres je peux former … Il y 26^3 mots possibles (« aaa », « aab », « boa », « zyx » …), l'ordre compte et « aba » est différent de « baa » !

II. L'arrangement de n éléments pris p à p

L'arrangement, lui, est utilisé pour **les tirages ordonnés sans remise** (= tirages successifs), dans ce cas, au lieu de reposer la boule dans l'urne, on la garde avec nous et on retire dans un ensemble qui est donc légèrement différent (il y a une boule en moins).

Voici la formule : $A_n{}^p = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}$ avec p le nombre de tirages et n le nombre d'objets de l'ensemble (prononcé « arrangement de p éléments parmi n »)

Explication du « n! » : 3! , prononcé factoriel de 3, donne 3*2*1.

Pour 4! Cela donnerait 4 * 3 * 2 *1. WARNING le factoriel de 0 donne 1 !

Ex : j'ai les 26 lettres de l'alphabet (n = 26), et je veux savoir combien de mots de 3 lettres (p = 3) je peux former … (Ici, chaque lettre est utilisable UNE FOIS (tirage sans remise))

$$A_{26}{}^3 = \frac{26!}{(26-3)!} = 26 * 25 * 24 = 15\,600$$

III. L'arrangement avec répétition

Celui-ci est similaire à la p-liste avec remise, il est donc utilisé lors **des tirages ordonnés avec remise.**

Ainsi, si on tire x fois parmi n éléments, la formule est : n^x .

Finalement, si on regarde les formules et les utilisations, **la p-liste et l'arrangement avec répétition c'est le même calcul dans la même situation.**

Ex : Si on tire dans un paquet de 52 cartes une carte, qu'on la repose, qu'on en tire une autre, (donc x=2), il y a 52^2 possibilités de tirages !

IV. Permutation d'un ensemble fini à n éléments

La permutation est utilisée **pour les tirages ordonnés sans remise**.

Elle est donc semblable à **l'arrangement de n éléments pris p à p,** mais lorsque p est égal à n (le nombre d'objets tirés est le même que le nombre d'objets total).

En d'autres termes, c'est donc un tirage ordonné **de tous les éléments de l'ensemble**.

La formule, est la suivante : $n!$, avec n le nombre d'éléments de l'ensemble.

Ex : vous disposez de 5 lettres (A, L, E, X et D), vous vous demandez combien de mots de 5 lettres vous pouvez former mais là on peut utiliser qu'une fois chaque lettre : $5!=120$

V. Permutation avec répétition

Ce dénombrement est utilisé lors **des permutations d'un ensemble**, lorsque plusieurs éléments de l'ensemble appartiennent à une même catégorie (k1, k2, k3 … kx) et qu'**on ne considère que la catégorie pour l'ordre.** Pour calculer le nombre de combinaisons, on fait :

$$\frac{n!}{k1! * k2! * k3! * \ldots * kx!}$$

Avec n le nombre d'éléments de l'ensemble et k les nombres d'éléments par catégorie.

Ex : une urne contient 5 boules rouges, 3 noires, 4 bleues et 2 vertes. Combien existe-il d'ordre de tirage en prenant en compte uniquement la couleur des boules ? $\frac{14!}{5!*3!*4!*2!*}$

VI. La combinaison de n éléments pris p a p

Enfin, la combinaison est utilisée **lors des tirages non ordonnés sans remise** (= tirages simultanés), c'est-à-dire que l'on va tirer par exemple trois boules d'un coup et regarder lesquelles on a eu. **L'ordre ne compte donc pas** et « bleue-bleue-rouge » est similaire à « rouge-bleue-bleue ». Et voilà la dernière formule des dénombrements :

$$C_n{}^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Avec n le nombre d'éléments de l'ensemble et p le nombre d'éléments tirés.

Ex : en tirant au hasard 4 cartes d'un coup dans un paquet de 54 cartes, je me demande combien de combinaisons sont possibles ? $C_{54}{}^4 = \frac{54!}{4!(54-4)!}$

Le tableau récap sur lequel vous pouvez vous appuyez une fois que vous avez bien compris tous ce qui a déjà été fait avant (perso j'ai appris les dénombrements qu'avec ce tableau)

Avec remise		Sans remise			
Ordonné		Ordonné			Non ordonné
p-liste avec remise	**Arrangements avec répétition**	**Arrangements de n éléments pris p à p**	**Permutation d'un ensemble fini à n éléments**	**Permutations avec répétition**	**Combinaisons de n éléments pris p à p parties d'un ensemble**
On prend 1 élément dans E, on le remet et on répète p fois	On prend 1 élément dans n, on le remet et on répète p fois	On prend SUCCESSIVEMENT (=les uns après les autres) p éléments parmi n sans remettre	On prend les éléments 1 à 1 sans les remettre jusqu'à épuisement p = n	On prend les éléments 1 à 1 jusqu'à épuisement en ne tenant compte que des catégories	On prend SIMULTANEMENT (=tous en même temps) p éléments parmi n
$(\text{Card E})^p$	n^p	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$n!$	$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_x!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Eléments de probabilité :

I. Introduction et définitions

Il existe deux types de phénomènes :

-les phénomènes déterministes, dont l'issue est prévisible (comme les lois de physique),

- les phénomènes aléatoires, dont l'issue n'est pas prévisible (cela peut être un lancer de dé par exemple).

Une expérience aléatoire (ou épreuve) est une expérience dont le résultat n'est pas prévisible, c'est donc un phénomène aléatoire.

En probabilités, on travaille dans un ensemble fondamental (noté Ω) qui représente l'ensemble de tous les résultats possibles.

Un évènement, quant à lui, est un sous-ensemble de l'ensemble fondamental.
(*Ex : L'ensemble fondamental peut être « Les résultats d'un lancer de dé », et un évènement de cet ensemble peut être « Obtenir un chiffre pair »)*

Il existe plusieurs types d'événements :

➢ L'évènement élémentaire : constitué uniquement d'un seul résultat de l'ensemble. Ex : « Obtenir un 2 » lors d'un lancer de dé.

➢ L'événement impossible ou ensemble vide (ne contient aucun résultat possible) Ex : obtenir un 7 à un lancer de dé.

➢ L'événement certain : l'ensemble contient tous les résultats possibles Ex : obtenir un chiffre entre 1 et 6 en lançant le dé.

II. Probabilités

Une probabilité associe à un évènement un nombre allant de 0 à 1, elle permet de mesurer la chance de réalisation de l'évènement en question. Il y a quelques subtilités à connaître à propos des probabilités :

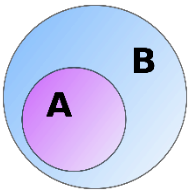
➢ **P(ø) = 0**, ce qui signifie que l'évènement impossible ne peut pas se produire.

➢ **P(Ω) = 1**

➢ **Si P(A ∩ B) = 0**, alors A et B s'excluent mutuellement, ils sont dits **incompatibles**. Cela signifie que les deux évènements ne peuvent pas se produire en même temps (par exemple, on ne peut pas obtenir pile et face lorsqu'on lance une pièce). Dans ce cas-là, **P(A ∪ B) = P(A) + P(B).***

➢ **P(Ā)=1-P(A)**

➢ Si A est inclus dans B, alors P(A) ≤ P(B) (car A une partie de B).



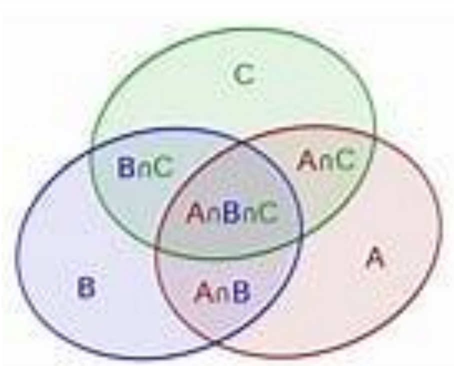
➢ **P (A ∪ B) = P (A) + P(B) – P(A∩B)** = théorème des probabilités totales.

➢ Si A et B sont incompatibles, A ∩ B = ∅ donc **P(A ∪ B) = P(A) + P(B).***

La propriété d'additivité forte ou formule de Poincaré (d'inclusion-exclusion ou de crible)

Cette propriété permet de connaître la formule lorsque l'on veut calculer une union entre plusieurs évènements. Elle est généralisable à n'importe quel nombre n. Pour n = 3, elle donne :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(C\cap A) + P(A\cap B\cap C)$$



Pour obtenir cette formule on additionne donc leurs différentes probabilités, puis on enlève les intersections. Cependant, en enlevant les trois intersections, on laisse un « trou » au milieu, d'où le rajout de l'intersection des 3 évènements en même temps.

III. Equiprobabilité

Lors d'une situation d'équiprobabilité, chaque évènement élémentaire a la même probabilité (c'est comme au loto, chaque boule a autant de chance que les autres d'être tirée).

Dans ce cas-là, la probabilité d'un évènement A est :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Avec Card(A) le « nombre de cas favorables » et Card(Ω) le « nombre de cas possibles ».

Ex : Dans une urne, il y a 15 boules, dont 7 bleues. L'évènement A est « tirer une boule bleue », P(A) = 7/15

IV. Probabilités : Les Ensembles

-Quand on travaille sur un ensemble fini, la probabilité de l'évènement est comprise entre 0 et 1. De plus, la somme des probabilités de tous les évènements est toujours égale à 1.

Ex : considérons un dé biaisé : P(1) = 1/3, P(2) = 1/6, P(3) = 1/12, P(4) = 1/12, P(5) = 1/4.

Trouver P(6) =? 1/3 + 1/6 + 1/12 + 1/12 + 1/4 + ? = 1 → ? = 1 – 11/12 = 1/12

(La partie sur les ensembles infini je vous la met quand même mais peu de chance que ça tombe)

-Soit un ensemble fondamental de la forme E (a_1, a_2, …) (semblable à un ensemble fini) chaque a_x va avoir sa probabilité (p) sachant qu'elle sera forcément $p_x \geqslant 0$ et que l'ensemble des p_x vaudra 1 comme sur un ensemble fini .

Du coup la probabilité d'un évènement est la somme des p_x correspondant à ses éléments.

La probabilité d'un événement quelconque est alors la somme des p_i correspondant à ses éléments. **Exemple** : soit l'expérience consistant à jeter une pièce et à compter le nombre de jets jusqu'à ce qu'on obtienne un résultat "pile" (c'est un espace infini dénombrable), on peut construire un espace probabilisé en choisissant :

$$p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{4}, ..., p_n = \frac{1}{2^n}, ..., p_\infty = 0$$