



# Probabilités conditionnelles, théorème de Bayes, Indépendance en probabilités :

## I. Définitions de base en probabilités :

**$\Omega$  Ensemble fondamental, l'univers :**  $P(\Omega) = 1$ , cela représente 100% des évènements, la probabilité est certaine. *Ex : tous les tuteurs.*

**$P(A)$  :** Probabilité de l'évènement A. *Ex : Probabilité qu'un étudiant en PASS de Nice aime les crêpes.*

**$P(\bar{A})$  ou  $P(\bar{A})$  :** Probabilité de l'évènement contraire de A, donc de ne pas avoir A. On peut aussi dire que  $\bar{A}$  c'est l'univers moins A. Donc  $P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$ . *Ex : La probabilité qu'un étudiant en PASS de Nice n'aime pas la biostat 😞 (si A est : aimer la biostat 😊)*

**$P(A \cap B) = P(B \cap A)$  :** Probabilité de A et B = Probabilité de B et A (c'est pareil! 😊) ou probabilité de A inter B (intersection des évènements A et B). *Ex : probabilité qu'un étudiant en PASS de Nice aime les crêpes et la biostat 😍*

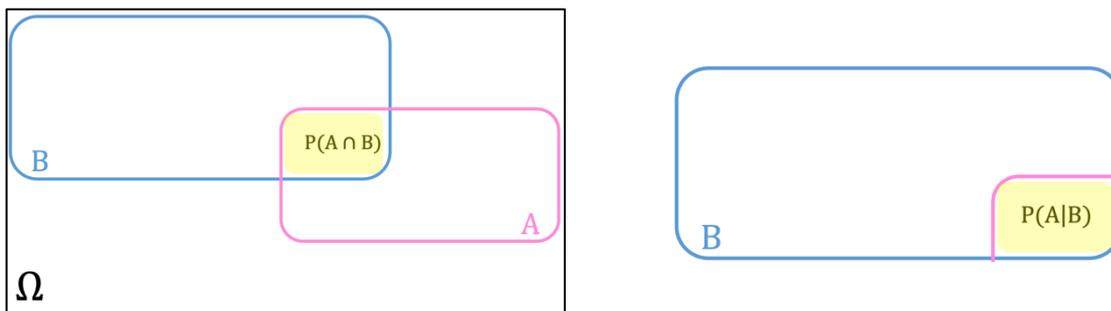
## II. Probabilités conditionnelles :

### A. Introduction :

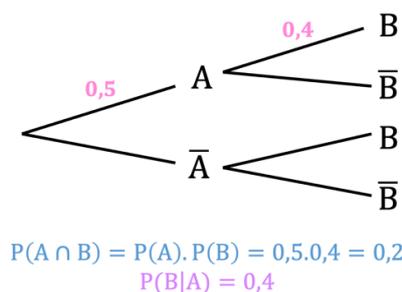
Définition : Une probabilité conditionnelle s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un évènement A à **condition** qu'un autre évènement B ait déjà été réalisé.

Ainsi on s'intéresse seulement aux évènements A réalisés par les évènements B réalisés et non plus parmi tout l'univers.

Notation :  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ , c'est la probabilité de A sachant B réalisé.



Pour la **probabilité de l'intersection**, on regarde sur tout l'univers car on cherche la probabilité d'A et B sur l'univers alors que pour une **probabilité conditionnelle**, on regarde parmi la population de B seulement.



**B. Formule de la probabilité conditionnelle :**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Équivalence de la formule en lettres : la probabilité qu'un PASS ait *perfect la biostat sachant qu'il a assisté à tous les cours* est égale au nombre de *PASS qui ont perfect la biostat ET assisté à tous les cours* sur le nombre de *PASS qui ont assisté à tous les cours*.

**C. Théorème de la multiplication :**

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

En biostat, il est important de savoir le nom du théorème de la formule que l'on utilise. 😊

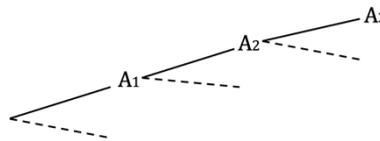
Le théorème peut se généraliser pour plus de 2 évènements de la manière suivante :

$$P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{n-1})$$

*Explications avec un exemple :*

On a une boîte de 10 pâtisseries avec 5 croissants, 2 pains au chocolat et 3 tartes aux citrons. On veut connaître la probabilité de tirer 3 croissants d'affilé dans une boîte neuve.

- $A_1$  : tirer un premier croissant
- $A_2$  : tirer un deuxième croissant
- $A_3$  : tirer un troisième croissant



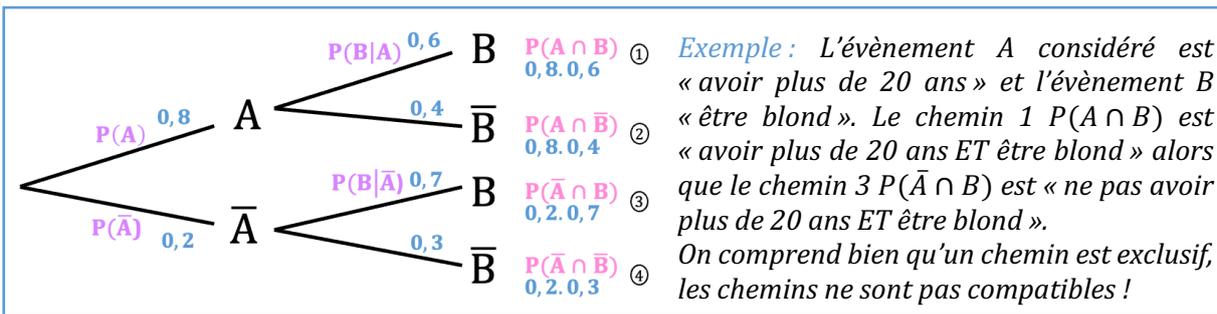
On a donc :  $P(A_1) = \frac{5}{10}$  ;  $P(A_2|A_1) = \frac{5-1}{10-1} = \frac{4}{9}$  ;  $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4-1}{9-1} = \frac{3}{8}$   
 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$

Il y a donc 1/12 chance de tirer 3 croissants d'affilé.

**III. Diagramme en arbre :**

Définition : soit une suite finie d'évènements, quand une expérience dépend du résultat de l'expérience passée, ce sont des probabilités conditionnelles. On utilise les arbres pour illustrer les situations :

1. Selon le théorème de la multiplication, la probabilité d'un chemin est le produit de chaque branche du chemin
2. Les chemins s'excluent mutuellement
3. La somme de toutes les probabilités des finalités doit être égale à 1



## IV. Formule et théorème de Bayes :

### A. Formule de Bayes :

Définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{ou} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

=

Formule de Bayes :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Le plus important dans les QCMs avec un long texte c'est de trouver les infos importantes ! 😊

Exemple d'application de la formule de Bayes 😊 :

Dans une classe on a 20 élèves. On a 15 élèves droitiers et le reste des élèves est gaucher. On sait aussi que 12 d'entre eux ont les yeux marrons, 4 ont les yeux bleus et le reste a les yeux verts. Parmi les gauchers, 4 ont les yeux marrons, et celui restant a les yeux bleus. On veut savoir quelle est la probabilité si on tire un élève au hasard parmi ceux qui ont les yeux marrons de tomber sur un gaucher ?

- A : être gaucher →  $P(A) = 5/20$
- B : avoir les yeux marrons →  $P(B) = 12/20$
- $P(B|A) = 4/5$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{20} = \frac{12}{20} = \frac{1}{3}$$

### B. Théorème de Bayes :

Soit un univers  $\Omega$  formé par un ensemble d'évènements de  $A_1$  à  $A_n$ . On dit que cet ensemble d'évènements de  $A_1$  à  $A_n$  constitue une **partition de  $\Omega$** . L'ensemble d'évènements de  $A_1$  à  $A_n$  dont l'union forme  $\Omega$ . C'est une illustration du **théorème des probabilités totales** :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

Théorème des probabilités totales :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(B \cap A_n) = P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$

=

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$

+

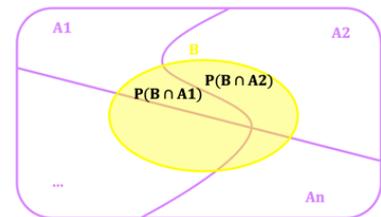
Formule de Bayes :

$$P(A_n|B) = \frac{P(B|A_n) \cdot P(A_n)}{P(B)}$$

=

Théorème de Bayes :

$$P(A_n|B) = \frac{P(B|A_n) \cdot P(A_n)}{P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)}$$



## V. Évènements indépendants :

### A. Introduction :

**Définition** : Deux évènements sont indépendants si  $P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B)$ . Les évènements sont indépendants dans la mesure où la probabilité de réalisation de A ne change pas avec la réalisation de B.

Soit  $P(A|B) = P(A)$  et  $P(B|A) = P(B)$ . Conséquences :

- A et  $\bar{B}$  sont indépendants
- $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants
- $\bar{A}$  et B sont indépendants

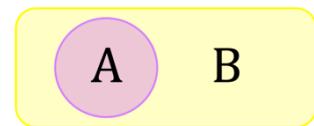
Cas de trois évènements : soient A, B, et C.

S'ils sont indépendants deux à deux (A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B) **ET** si  $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ , alors ces trois évènements sont **indépendants** !

*Remarque* : La seconde condition n'est pas une conséquence de la première. C'est-à-dire que les trois évènements peuvent être indépendants deux à deux, mais on peut avoir :  $P(A|B \cap C) \neq P(A)$  et du coup A, B, et C ne sont pas indépendants.

### B. Indépendance et inclusion :

Définition : **ACB** : A est inclus dans B donc  $P(A \cap B) = P(A)$



*Remarque* : on a  $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$  avec la proba de B sachant A égale à 1, car A étant inclus dans B on est certain d'avoir B !

Formule de Bayes quand <b>ACB</b> :	Formule de Bayes quand <b>BCA</b> :
$P(A B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$	$P(B A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$

⚠ A et B ne sont **PAS** indépendants ⚠

### C. Indépendance et exclusion :

Définition :  $A \cap B = \emptyset$  ;  $P(A \cap B) = 0$  : A et B sont **exclusifs, disjoints, incompatibles**, donc  $P(A|B) = P(B|A) = 0$ . *Ex* : A « être majeur », B : « être mineur », les 2 ne peuvent pas se produire en même temps, ils sont incompatibles.

⚠ A et B ne sont **PAS** indépendants ⚠

Incompatibles = exclusifs = disjoints	Indépendants
Ne fait <b>PAS</b> intervenir leur probabilité	<b>Liés</b> à leur probabilité
Ne peuvent <b>PAS</b> se produire en même temps	<b>Peuvent</b> se produire en même temps
Défini par : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

### ♥ Dédicaces ♥

💪 Dédi à mes co-tuts les bests : Camille, Alexandre et Olivier 💪

👩 Dédi à nos vieux incroyables : Marie, Sarah, Simon, Carl et Ricardo 👩

✨ Dédi à toute la team tuteurs qui va vous faire rêver toute l'année ✨

⚡ Dédi à Cla, mon binome de P1 ⚡

🥰 **Grosse dédi à vous tous, vous êtes les meilleurs, vous pouvez le faire** 🥰