Probabilités conditionnelles, théorème de Bayes, Indépendance en probabilités :

Probabilité conditionnelle = probabilité de réalisation d'un évènement A **à condition** qu'un autre évènement B ait déjà été réalisé : $\mathbf{P(A|B) = PB(A)}$, probabilité de A sachant B réalisé

A. Formule de la probabilité conditionnelle :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

B. Théorème de la multiplication :

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B).P(B) = P(B|A).P(A)$$

I. Diagramme en arbre :

1. La probabilité d'un chemin est le produit de chaque branche du chemin *(théorème de la multiplication)*
2. Les chemins s'excluent mutuellement
3. La somme de toutes les probabilités des finalités doit être égale à 1

II. Formule et théorème de Bayes :

Définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{ou} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B).P(B) = P(B|A).P(A)$$

=

Formule de Bayes :

$$\mathbf{P(B|A) = \frac{P(A|B).P(B)}{P(A)}}$$

Théorème des probabilités totales :

$$P(B) = P(B \cap A1) + P(B \cap A2) + \cdots + P(B \cap An)$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(B \cap An) = P(B|An).P(An)$$

=

$$P(B) = P(B|A1).P(A1) + P(B|A2).P(A2) + \ldots + P(B|An).P(An)$$

+

Formule de Bayes :

$$P(An|B) = \frac{P(B|An).P(An)}{P(B)}$$

=

Théorème de Bayes :

$$P(An|B) = \frac{P(B|An).P(An)}{P(B) = P(B|A1).P(A1) + P(B|A2).P(A2) + \ldots + P(B|An).P(An)}$$

III. Évènements indépendants :

$$\mathbf{P(B \cap A) = P(A).P(B)}$$

A. Indépendance et inclusion :

ACB : A est inclus dans B donc $P(A \cap B) = P(A)$

Quand **ACB** : $P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$

B. Indépendance et exclusion :

$A \cap B = \emptyset$; $P(A \cap B) = 0$: A et B sont **exclusifs**, **disjoints**, **incompatibles** → $P(A|B) = P(B|A) = 0$

Incompatibles = exclusifs = disjoints	Indépendants
Ne fait PAS intervenir leur probabilité	Liés à leur probabilité
Ne peuvent PAS se produire en même temps	Peuvent se produire en même temps
Défini par : $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$	$\mathbf{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$