Probabilités conditionnelles, théorème de Bayes, Indépendance en probabilités :

I. Définitions de base en probabilités :

Ω Ensemble fondamental, l'univers : $P(\Omega) = 1$, cela représente 100% des évènements, la probabilité est certaine. *Ex : tous les tuteurs.*

P(A) : Probabilité de l'évènement A. *Ex : Probabilité qu'un étudiant en PASS de Nice aime les crèpes.*

$P(\bar{A})$ ou $P(\complement A)$: Probabilité de l'évènement contraire de A, donc de ne pas avoir A. On peut aussi dire que $\bar{A}$ c'est l'univers moins A. Donc $P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$. *Ex : La probabilité qu'un étudiant en PASS de Nice n'aime pas la biostat 😡 (si A est : aimer la biostat 🥰)*

$P(A \cap B) = P(B \cap A)$: Probabilité de A <u>et</u> B = Probabilité de B et A (c'est pareil ! 😉) ou probabilité de A inter B (intersection des évènements A et B). *Ex : probabilité qu'un étudiant en PASS de Nice aime les crèpes et la biostat 😍*

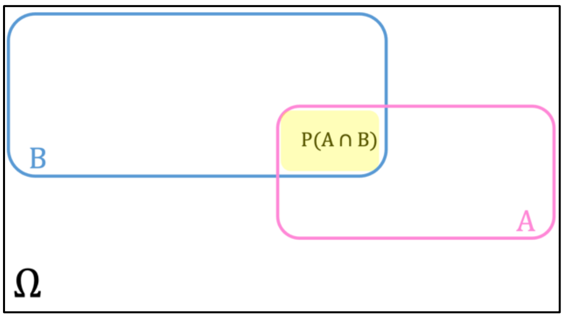
II. Probabilités conditionnelles :

A. Introduction :

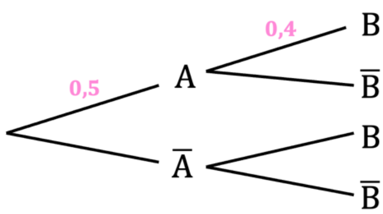
⚠️ Attention, il ne faut pas confondre <u>probabilité conditionnelle</u> et <u>probabilité d'une intersection</u> !

<u>Définition</u> : Une probabilité conditionnelle s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un évènement A **à condition** qu'un autre évènement B ait déjà été réalisé. On s'intéresse seulement aux évènements A réalisés parmi les évènements B réalisés et non plus parmi tout l'univers.

<u>Notation</u> : $\mathbf{P(A|B) = PB(A)}$, c'est la probabilité de A sachant B réalisé.



Pour la **probabilité de l'interserction**, on regarde sur <u>tout l'univers</u> car on cherche la probabilité d'A et B sur TOUT l'univers alors que pour une **probabilité conditionnelle**, on regarde PARMI la population de <u>B seulement</u>. On restreint l'ensemble des résultats possibles à B.



$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = 0{,}5.0{,}4 = 0{,}2$

$P(B|A) = 0{,}4$

B. Formule de la probabilité conditionnelle :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

<u>Équivalence de la formule en lettres :</u> la probabilité qu'un PASS ait perfect la biostat sachant qu'il a assisté à tous les cours est égale au nombre de PASS qui ont perfect la biostat ET assisté à tous les cours sur le nombre de PASS qui ont assisté à tous les cours.

C. Théorème de la multiplication :

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B).P(B) = P(B|A).P(A)$$

En biostat, il est important de savoir le nom du théorème de la formule que l'on utilise. 😜

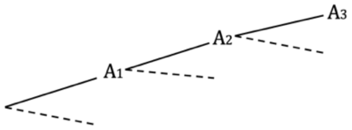
Le théorème peut se généraliser pour plus de 2 évènements de la manière suivante :

$$\boldsymbol{P(A1 \cap A2 \ldots \cap An) = P(A1).P(A2|A1).\ldots\ .P(An|A1 \cap A2 \ldots \cap An-1)}$$

Explications avec un exemple :

On a une boite de 10 pâtisseries avec 5 croissants, 2 pains au chocolat et 3 tartes aux citrons.
On veut connaître la probabilité de tirer 3 croissants d'affilé dans une boite neuve.

- A_1 *: tirer un premier croissant*
- A_2 *: tirer un deuxième croissant*
- A_3 *: tirer un troisième croissant*



On a donc : $P(A1) = \frac{5}{10}$; $P(A2|A1) = \frac{5-1}{10-1} = \frac{4}{9}$; $P(A3|A1 \cap A2) = \frac{4-1}{9-1} = \frac{3}{8}$

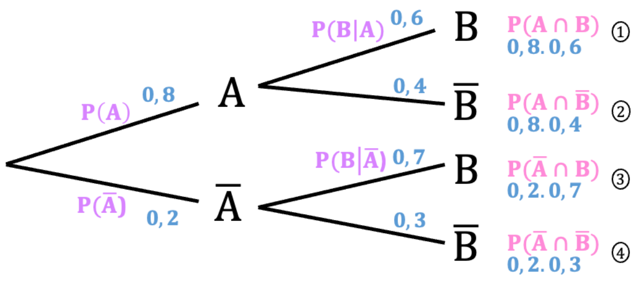
$P(A1 \cap A2 \cap A3) = P(A1).P(A2|A1).P(A3|A1 \cap A2) = \frac{5}{10}.\frac{4}{9}.\frac{3}{8} = \frac{1}{12}$

Il y a donc 1/12 chance de tirer 3 croissants d'affilé.

III. Diagramme en arbre :

<u>Définition</u> : on considère une suite finie d'expériences, dont chacune d'entre elles a un nombre fini de résultats possibles. Les probabilités associées aux résultats possibles d'une expérience dépendent du résultat de l'expérience passée : ce sont des probabilités conditionnelles. On utilise les arbres pour illustrer les situations *(le théorème précédent permet de calculer la probabilité de chaque feuille de l'arbre)* :

1. Selon le théorème de la multiplication, la probabilité d'un chemin est le produit de chaque branche du chemin
2. Les chemins s'excluent mutuellement
3. La somme de toutes les probabilités des finalités doit être égale à 1



Exemple : L'évènement A considéré est « avoir plus de 20 ans » et l'évènement B « être blond ». Le chemin 1 $P(A \cap B)$ *est « avoir plus de 20 ans ET être blond » alors que le chemin 3* $P(\bar{A} \cap B)$ *est « ne pas avoir plus de 20 ans ET être blond ».*
On comprend bien qu'un chemin est exclusif, les chemins ne sont pas compatibles !

IV. Formule et théorème de Bayes :

A. Formule de Bayes :

Définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{ou} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B).P(B) = P(B|A).P(A)$$

=

Formule de Bayes :

$$\mathbf{P(B|A) = \frac{P(A|B).P(B)}{P(A)}}$$

Le plus important dans les QCMs avec un long texte c'est de trouver les infos importantes ! 😉

Exemple d'application de la formule de Bayes 😆 *:*

Dans une classe on a 20 élèves. On a 15 élèves droitiers et le reste des élèves est gaucher. On sait aussi que 12 d'entre eux ont les yeux marrons, 4 ont les yeux bleus et le reste a les yeux verts. Parmi les gauchers, 4 ont les yeux marrons, et celui restant a les yeux bleus. On veut savoir quelle est la probabilité si on tire un élève au hasard parmi ceux qui ont les yeux marrons de tomber sur un gaucher ?

- *A : être gaucher → P(A) = 5/20*
- *B : avoir les yeux marrons → P(B) = 12/20*
- *P(B|A) = 4/5*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{20}}{\frac{12}{20}} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

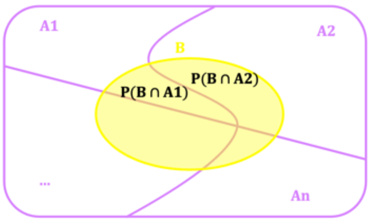
B. Théorème de Bayes :

Soit un univers Ω formé par un ensemble d'évènements de A1 à An. On dit que cet ensemble d'évènements de A1 à An constitue une **partition de Ω**. L'ensemble d'évènements de A1 à An dont l'union forme Ω. C'est une illustration du **théorème des probabilités totales** :

$$\mathbf{P(B) = P(B \cap A1) + P(B \cap A2) + \cdots + P(B \cap An)}$$

Théorème des probabilités totales :

$$P(B) = P(B \cap A1) + P(B \cap A2) + \cdots + P(B \cap An)$$



+

Théorème de la multiplication :

$$P(B \cap An) = P(B|An).P(An)$$

=

$$P(B) = P(B|A1).P(A1) + P(B|A2).P(A2) + \ldots + P(B|An).P(An)$$

+

Formule de Bayes :

$$P(An|B) = \frac{P(B|An).P(An)}{P(B)}$$

=

Théorème de Bayes :

$$P(An|B) = \frac{P(B|An).P(An)}{P(B) = P(B|A1).P(A1) + P(B|A2).P(A2) + \ldots + P(B|An).P(An)}$$

En médecine, le théorème de Bayes est utilisé pour résoudre des problèmes d'aide au diagnostic.

Exemple :

« douleur abdominale aigüe » = A_4 ; le patient arrive aux urgences avec « mal au ventre » = B.
Un certain nombre de diagnostics se manifèstent par une douleur abdominale *(appendicite, perforation d'ulcère, pancréatite…)* formant une série d'évènements An. Quelle est la probabilité que le patient soit atteint du diagnostic A_4 connaissant la présence du signe B, cad $P(A_4|B)$?

V. Évènements indépendants :

A. Introduction :

Définition : Deux évènements sont indépendants si $P(B \cap A) = P(A).P(B)$. Les évènements sont indépendants dans la mesure où la probabilité de réalisation de A ne change pas avec la réalisation de B.

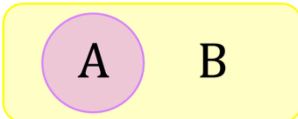
Soit $P(A|B) = P(A)$ et $P(B|A) = P(B)$. Conséquences :
- A et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et B sont indépendants

Cas de trois évènements : soient A, B, et C.
S'ils sont indépendants deux à deux (A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B) ET si $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$, alors ces trois évènements sont **indépendants** !

Remarque : La seconde condition n'est pas une conséquence de la première. C'est-à-dire que les trois évènements peuvent être indépendants deux à deux, mais on peut avoir : $P(A|B \cap C) \neq P(A)$ et ducoup A, B, et C ne sont pas indépendants.

B. Indépendance et inclusion :

Définition : $A \subset B$: A est inclus dans B donc $P(A \cap B) = P(A)$



Remarque : on a $P(A \cap B) = P(B|A).P(A)$ avec la proba de B sachant A égale à 1, car A étant inclus dans B on est certain d'avoir B !

Formule de Bayes quand **A⊂B** :	Formule de Bayes quand **B⊂A** :
$P(A\|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$	$P(B\|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$

⚠️ A et B ne sont PAS indépendants ⚠️

C. Indépendance et exclusion :

Définition : $A \cap B = \emptyset$; $P(A \cap B) = 0$: A et B sont **exclusifs**, **disjoints**, **incompatibles**, donc $P(A|B) = P(B|A) = 0$. *Ex : A « être majeur », B : « être mineur », les 2 ne peuvent pas se produire en même temps, ils sont incompatibles.*

⚠️ A et B ne sont PAS indépendants ⚠️

Il ne faut pas confondre évènements incompatibles et évènements indépendants :

Incompatibles = exclusifs = disjoints	**Indépendants**
Ne fait PAS intervenir leur probabilité	Liés à leur probabilité
Ne peuvent PAS se produire en même temps	Peuvent se produire en même temps
Défini par : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Bon courage pour les révisions, on lache rien !!! 😏