COURS N°2 : EVÉNEMENTS ET PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES

P Staccini

Introduction

Position du sujet 2/4

- Une population est un **ensemble d’objets**, d’êtres vivants (population réelle) ou d’objets abstraits (population fictive) de même nature :
  - tous les étudiants de PACES de France
  - tous les médecins à jour de leur cotisation au Conseil National de l’Ordre des Médecins
  - tous les patients atteints d’un diabète insulino-dépendant
  - tous les pharmaciens installés dans une zone géographique donnée
  - tous les séjours d’hospitalisation résultant de l’activité de tous les centres hospitaliers publics et privés de France
- Cet ensemble est généralement très grand, voire infini.

Position du sujet 3/4

- L'étude exhaustive de l'ensemble des individus d'une population est souvent impossible ou bien trop coûteuse.
- On étudie alors tous les individus d'un sous-ensemble de cette population : ce sous-ensemble s'appelle un **échantillon.**
- C'est sur cet échantillon d'individus que sont recueillies les caractéristiques morphologiques, physiologiques, etc. autrement dit les diverses variables quantitatives ou qualitatives (cf. cours n°2).

Position du sujet 4/4

- **Travailler sur un extrait de la population entière a pour conséquences :**
  - de **n'observer que partiellement la caractéristique** : peut-on « extrapoler » la mesure de cette caractéristique à l'ensemble de la population ?
    - on parlera plus tard de « représentativité » de l'échantillon par rapport à la population : cela veut dire que l'on doit retrouver dans l'échantillon la diversité d'expression du caractère étudié tel qu'il est présent dans la population d'origine
  - **d'avoir des individus différents chaque fois que l'on choisit un nouvel échantillon** : la mesure sera donc différente pour chaque échantillon, mais est-ce qu'on peut faire en sorte que « l'extrapolation » ne varie pas trop ?
    - on parlera plus tard de « confiance » de la mesure pour exprimer cette variabilité due aux différents échantillons possiblement constituables à partir de la population

Probabilité ?

- La théorie (ou le calcul) des probabilités est une branche des mathématiques qui permet de **modéliser les phénomènes où le hasard intervient** (initialement développée à propos des jeux de hasard, puis progressivement étendue à l'ensemble des sciences expérimentales, dont la physique et la biologie).
- Cette théorie permet de construire des modèles de ces phénomènes et permet le calcul, entre autres, de cette **« extrapolation » de la caractéristique observée sur l'échantillon**, en prenant comme hypothèse de départ que la sélection des individus de l'échantillon à partir de la population est effectué au hasard.
- Ainsi à partir d'un échantillon d'une population, on peut essayer de reconstruire le modèle de la population. On parlera plus tard de démarche inductive qui, à partir de l'observation de faits expérimentaux, va tenter de dégager des propriétés générales du phénomène observé.

Plan du cours

- Ensembles, éléments
  - Définitions
  - Opérations
  - Ensembles et familles
  - Dénombrements
    - P-listes
    - Applications
    - Arrangements
    - Permutations
    - Combinaisons
- Eléments de probabilité
  - Introduction
  - Définitions
  - Probabilité et espace probabilisé
  - Equiprobabilité
  - Espaces probabilisés finis

Ensembles, éléments

Définitions 1/2

On appelle ensemble, toute liste (collection) d'objets bien définis.
On appelle éléments (membres) de l'ensemble
les objets appartenant à l'ensemble.

Un ensemble peut être défini en **extension** (explicite),
c'est-à-dire en listant tous ses éléments :
$A = \{1,3,5,7,9,11\}$

Un ensemble peut être défini en **compréhension** (implicite),
c'est-à-dire en donnant la(les) propriété(s)
qui caractérise(nt) ses éléments :
$A = \{x : x \text{ est divisible par } 2\}$
$A = \{x : x \in \mathbb{N}^{+} \text{ et } x \text{ est un nombre premier}\}$

Définitions 2/2

p est un élément de l'ensemble A : $p \in A$
exemple : $2 \in \{1, 2, 3\}$

B est une partie de A : $B \subset A$
exemple : $\{2\} \subset \{1, 2, 3\}$

Autres notations :
- la négation de $x \in A$ est $x \notin A$
- $\varnothing$ est l'ensemble vide
- E ou Ω est l'ensemble universel

Exemples

Quelques ensembles usuels :

- l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$,
- l'ensemble des entiers naturels strictement positifs $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$,
- l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$
- l'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+\}$
- l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$,
- l'ensemble des nombres réel positifs ou nuls $\mathbb{R}^+$...

En sciences de la vie et de la santé, quelques ensembles définis en compréhension :

- l'ensemble des patients transplantés hépatiques,
- l'ensemble des patients atteints de diabète insulino-dépendant,
- l'ensemble des valeurs de glycémie mesurées chez les patients hospitalisés,
- l'ensemble des recours hospitaliers de type "consultation externe", ...

Opérations 1/3

Intersection

Soient A et B deux ensembles quelconques.

L'intersection de A et B, notée $A \cap B$,

est l'ensemble des éléments x tels que $x \in A$ et $x \in B$

Soit : $A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$

Autrement dit, x appartient à la fois à A et à B.

Cas particulier : si $A \cap B = \varnothing$

on dit que A et B sont **disjoints**.

Opérations 2/3

Réunion

Soient A et B deux ensembles quelconques.
La réunion de A et B, notée $A \cup B$,
est l'ensemble des éléments x tels que $x \in A$ ou $x \in B$
Soit : $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$
Autrement dit, x appartient :

- soit à A,
- soit à B,
- soit à $A \cap B$

Opérations 3/3

Complémentaire
Le complémentaire de A est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.
On le note $\complement A$ ou $\bar{A}$ ou A^c : $\bar{A} = \{x : x \notin A\}$

Différence
La différence entre A et B, ou complémentaire de B relatif à A est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent par à B
A - $B = \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}$

Différence symétrique
La différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$, est la partie de Ω composée des éléments qui sont soit dans A; soit dans B mais pas dans leur intersection :
$\{1, 2, 5, 6\}\Delta\{2, 3, 5, 7\} = \{1, 3, 6, 7\}$
La différence symétrique correspond au lien logique "ou exclusif"
$x \in A\Delta B \Leftrightarrow x \in A \cap B^c$ ou $x \in A^c \cap B$

Algèbre des ensembles

$$A \cup A = A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cup \Omega = \Omega$$
$$A \cup \complement A = \Omega$$
$$\complement\complement A = A$$
$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$$

$$A \cap A = A$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cap \Omega = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cap \complement A = \varnothing$$
$$\complement\Omega = \varnothing, \complement\varnothing = \Omega$$
$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

Ensembles finis dénombrables ...

Un ensemble est **fini** s'il est vide ($\varnothing$) ou s'il contient un nombre fini d'éléments.
Sinon, il est **infini** :
$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ est un ensemble fini ;
$I = \{x : x \in [0,1]\}$ est un ensemble infini.

Un ensemble infini est dit **dénombrable** si on peut faire correspondre de façon unique chaque élément de l'ensemble à un entier naturel et un seul.
$A = \{\mathrm{n} : \mathrm{n} \text{ est un entier pair}\}$ est infini dénombrable.

Un ensemble infini est **non dénombrable** dans le cas contraire.

En pratique, les seuls ensembles infinis non dénombrables que nous rencontrerons seront des intervalles de $\mathbb{R}$: $\{x \in [a,b]\}$ ou des intervalles de $\mathbb{R}^2$: $\{(x,y) : x \in [a,b], y \in [a,b]\}$.

Ensemble produit

Soient A et B deux ensembles.
L'ensemble produit de A et de B, noté $A \times B$,
est l'ensemble de tous les couples ordonnés (a,b),
avec $a \in A$ et $b \in B$

Exemple :

Soient $A = \{a,b,c\}$; $B = \{1,2\}$

$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$

Ensemble produit

Soient $n \geqslant 2$ et $E_1, E_2, ...E_n$ des ensembles.
On définit le **produit cartésien** des $E_1, E_2, ...E_n$ ensembles de la façon suivante :
$E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ tels que $\forall i \in \{1, ..., n\}$ $x_i \in E_i$
Un élément $\{(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ est appelé un **n-uplet**

Soit $E_1, ..., E_n$ des ensembles finis.
Alors

$$Card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} Card(E_i)$$

Attention : Un n-uplet est ordonné et se note entre parenthèses, contrairement à une partie à n éléments qui est sans ordre et se note entre accolades.
Par exemple : $(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$ mais $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$.

Ensemble produit

Exemple :
On lance deux dés : un rouge et un bleu. Quelle est la cardinalité de l'univers associé à cette expérience aléatoire ?
Réponse :
Les deux dés ayant une couleur différente, je peux reconnaître le résultat bleu du résultat rouge.
Je dois donc considérer les couples (résultat rouge, résultat bleu).
Chaque dé a pour résultat un élément de $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.
L'univers Ω associé à cette expérience est donc le produit cartésien $E \times E$.
$\Omega = E \times E = E^2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$
Card $\Omega = 6 \times 6 = 36$
Suite :
Quel est l'univers associé au résultat suivant :
le résultat du dé rouge est pair, celui du dé bleu est divisible par 3 ?
Réponse :
$A = \{2, 4, 6\} \times \{3, 6\}$
6 couples possibles : $A = \{(2, 3), (2, 6), (4, 3), (4, 6), (6, 3), (6, 6)\}$

Famille d'ensembles

Soit A un ensemble quelconque.

On appelle **famille des parties** de A
l'ensemble de tous les sous-ensembles de A.
Exemple : soit $A = \{1,2\}$, $\mathrm{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
Le nombre de parties d'un ensemble de p éléments est 2^p

Une **partition** de A
est une subdivision de A en sous-ensembles disjoints dont la réunion forme A.

Notation :
Soit une famille d'ensembles $\{A_i\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ finie ou non :

$$\bigcup_i A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$$

$$\bigcap_i A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$$

Dénombrements 1/13

p-liste avec remise

Soit E un ensemble fini. Une **p-liste avec remise d'éléments de E** est un **p-uplet d'éléments de E, avec répétition possible**. Leur ensemble est le produit cartésien $E \times E ... \times E$ noté E^p. Le nombre de p-uplets d'éléments de E, ou encore de p-listes avec remise d'éléments de E vaut donc $(Card(E))^p$. C'est un cas particulier du produit cartésien. Ce type de dénombrement intervient par exemple dans les tirages ordonnés avec remise.

Exemple : Je tire successivement trois cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes en remettant chaque fois la carte piochée dans le paquet avant de prendre la suivante. Quel est l'univers associé à cette expérience aléatoire ?
Réponse : Pour simplifier numérotons les cartes de 1 à 32. Une issue de l'expérience est un triplet d'éléments de $\{1, 2, 3, \ldots, 32\}$. L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 32\} \times \{1, 2, 3, \ldots, 32\} \times \{1, 2, 3, \ldots, 32\}$ $= E^3$ et Card $\Omega = (Card(E))^3 = 32^3$

Dénombrements 2/13

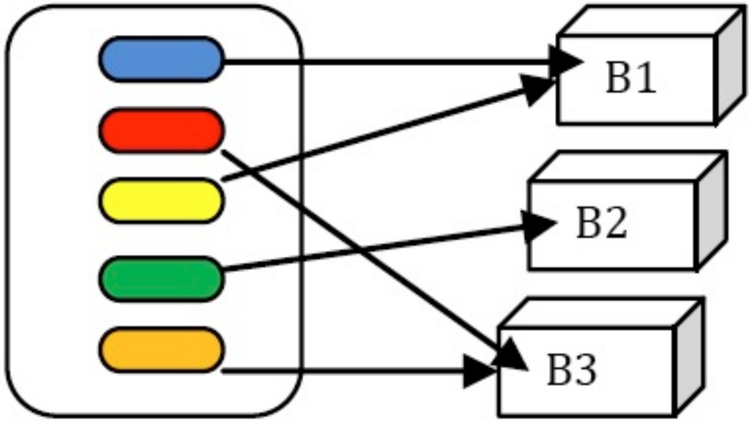
Applications

Soient E et F deux ensembles finis. L'ensemble des relations entre un élément de E et un ou plusieurs éléments de F est appelé ensemble des applications de E dans F et noté F^E. Le nombre d'applications de E dans F est $(Card(F))^{(card(E))}$. En effet, une application de E dans F est déterminée par l'image de chacun des éléments de E. C'est donc un $(CardE) - uplet$ d'éléments de F. Le nombre de tels $(CardE) - uplets$ est $(Card(F))^{(card(E))}$.

Exemple : On dispose de 3 boîtes et de 5 craies de couleur bleue, rouge, jaune, verte et orange.
1) De combien de façons distinctes peut-on ranger les cinq craies dans les trois boîtes ?
2) Même question en laissant l'une des boîtes vides.
3) Même question si la craie bleue et la craie rouge sont rangées ensembles.
4) Même question si la craie bleue et la craie rouge sont rangées ensembles, mais seules.

Dénombrements 3/13

- Le principe de résolution de cet exercice est basé sur le dénombrement des applications de l'ensemble des craies vers l'ensemble des boîtes.
- En effet, il s'agit de choisir pour chaque craie une boîte sachant que la même boîte peut contenir aucune craie ou plusieurs craies. Chaque rangement est donc une application de l'ensemble des craies dans l'ensemble des boîtes.



Dénombrements 4a/13

Exemple : On dispose de 3 boîtes et de 5 craies de couleur bleue, rouge, jaune, verte et orange.

1) De combien de façons distinctes peut-on ranger les cinq craies dans les trois boîtes ?
Réponse : Il y a $3^5 = 245$ **rangements possibles**

2) Même question en laissant l'une des boîtes vides.
Réponse : Il faut d'abord choisir la boîte que l'on laisse vide. Il y a 3 façons de le faire. Le rangement des craies dans les 2 boîtes restantes est alors une application d'un ensemble de 5 éléments dans un ensemble à 2 éléments. Il y a 2^5 façons de procéder à un tel rangement. On a donc $3 \times 2^5 = 96$ **rangements possibles**.

Dénombrements 4b/13

3) Même question si la craie bleue et la craie rouge sont rangées ensembles. ***Réponse*** : On choisit la boîte où la craie bleue et la craie rouge seront rangées. Il y a 3 façons de faire ce choix. Il s'agit ensuite de placer les 3 autres craies dans les 3 boîtes. Il y a 3^3 façons de le faire. On a donc $3 \times 3^3 = 81$ **rangements possibles.**

4) Même question si la craie bleue et la craie rouge sont rangées ensembles, mais seules. ***Réponse*** : On choisit encore une fois la boîte où seront rangées les craies bleue et rouge. Puis l'on place les trois autres craies dans les deux boîtes restantes. Il y a 2^3 façons de le faire. Il y a donc $3 \times 2^3 = 24$ **rangements possibles.**

Dénombrements 5a/13

Arrangement de n éléments pris p à p

On appelle arrangement de n éléments pris p à p tout groupe de p éléments pris parmi n éléments, selon un ordre bien déterminé. Ainsi, les trois lettres a, b, c prises 2 à 2 conduisent aux 6 arrangements suivants : ab, ac, ba, bc, ca, cb. Le but de l'opération est de calculer le nombre total d'arrangements possibles de n éléments pris p à p, nombre symbolisé par A_n^p. Supposons p compartiments numérotés de 1 à p. Le premier compartiment peut être comblé par l'un des n éléments, le second par l'un des $n-1$ éléments restants, le troisième par l'un des $n-2$ éléments restants, et ainsi de suite jusqu'au p^{ieme} compartiment qui peut être comblé par l'un des $n-p+1$ éléments restants.

Dénombrements 5b/13

Arrangement de n éléments pris p à p

Le nombre total d'arrangements de n éléments pris p à p s'élève à :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

On définit la factorielle n (symbole $n!$) comme le produit de n premiers nombres $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$. Par convention, $0! = 1$.

Dénombrements 6a/13

Exemple : Le bureau d'une association comporte un président, un secrétaire et un trésorier. L'association comporte 73 membres. Combien de bureaux différents peut-on former ?
Réponse : Il s'agit donc de constituer des arrangements de 3 personnes parmi 73. $A_{73}^{3} = 73 \text{ x } 72 \text{ x } 71$

Dénombrements 6b/13

Exemple : Une agence de voyages propose un circuit touristique comprenant quatre des douze capitales de la Communauté Economique Européenne (CEE). Pour définir un circuit, on suppose que chaque capitale n'est visitée qu'une fois et on tient compte de l'ordre de visite de ces capitales ; par exemple, le circuit : "Paris, Madrid, Rome, Athènes" diffère du circuit : "Athènes, Rome, Paris, Madrid". Combien y a-t-il de circuits différents ?
Réponse : Un circuit correspond à une 4-liste ordonnée sans répétition, c'est-à-dire à un arrangement de 4 villes parmi 12. Il y a donc :

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880 \text{ circuits différents possibles}$$

Dénombrements 7/13

Arrangement avec répétition

Considérons n éléments pouvant être classés en p catégories distinctes avec p inférieur, égal ou supérieur à n. Admettons que plusieurs éléments puissent appartenir à la même catégorie (d'où le nom d'arrangement avec répétitions). Le nombre d'arrangements possibles des n éléments est égal à p^n. Il correspond à ce que nous avons vu précédemment concernant le nombre d'applications d'un ensemble E de cardinal n dans un ensemble F de cardinal p. En effet, pour chaque élément, il existe p possibilités de classements et pour les n éléments il y a alors $p \times p \times p \ldots$ (n fois) choix possibles.

Exercice : Une multinationale décide de lancer un nouveau dentifrice. Le nom de ce nouveau produit doit comporter 5 lettres. Combien de noms peut-on former avec toutes les lettres de l'alphabet ?
Réponse : Il s'agit d'une application de l'ensemble des 5 lettres du mot dans l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet. Il y a en 26^5.

Dénombrements 8a/13

Permutations d'un ensemble fini à n éléments

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Une permutation des éléments de E est une bijection de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans E. Elle constitue un cas particulier d'arrangement de n éléments pris p à p et correspond à A_n^p quand p est égal à n. C'est aussi une liste ordonnée sans répétition de tous les éléments de E. C'est encore un tirage ordonné sans remise de tous les éléments de E. Désigné par le symbole P_n, le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments est :

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$$

Dénombrements 8b/13

Exemple : Rafael a 6 cartes devant lui représentant chacune une lettre de son prénom. Il les aligne au hasard devant lui. Quelle chance a-t-il de recomposer exactement son prénom ?
Réponse : L'univers de cette expérience aléatoire est donc un p-liste ordonnée de 6 objets pris 6 à 6. Ω est donc l'ensemble des permutations de $E = \{R, A, F, A, E, L\}$. Card $\Omega = 6!$ $= 6$ x 5 x 4 x 3 x 2 x $1 = 720$. Un seul n-uplet ordonné correspond à la solution : $A = \{(R, A, F, A, E, L)\}$. Au final, la chance de Rafael est égale à : $\frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{1}{720}$

Dénombrements 9a/13

Exemple : Un étudiant en médecine possède 14 livres de quatre matières différentes : 4 livres d'anatomie, 5 de physiologie, 3 de biologie cellulaire, 2 de biostatistique. Il veut ranger ces livres sur une étagère.

1) De combien de façons peut-il ranger ces livres s'il ne tient pas compte des matières ?

2) De combien de façon peut-il ranger ces livres s'il range d'abord les livres de biostatistique, puis ceux de physiologie, puis ceux d'anatomie, et enfin ceux de physiologie ?

3) De combien de façon peut-il ranger ces livres s'il range les livres par matière ?

Dénombrements 9b/13

Réponse :
1) S'il ne tient pas compte des matières, il a autant de façon de ranger ces 14 livres que de façons de ranger 14 objets distincts quelconques, c'est-à-dire 14! (= 87178291200 rangements possibles)
2) Le rangement se déroule selon quatre étapes successives : il a 2! façons de ranger les livres de biostatistique, puis 5! façons de ranger les livres de physiologie, puis 4! façons de ranger les livres d'anatomie et enfin 3! de ranger les livres de biologie cellulaire. Il y a donc : $2! \times 5! \times 4! \times 3! = 34560$ rangements de ce type.
3) Par rapport à la question précédente, il faut ajouter une étape. Une fois les rangements effectués dans chaque matière, il faut "ranger" les matières dans un ordre donné. Il y a 4! façons de le faire. Au total, il y a $2! \times 5! \times 4! \times 3! \times 4! = 829440$ rangements de ce type.

Dénombrements 10/13

Permutations avec répétition

Soient n éléments dont k_1 sont d'un premier type et identiques entre eux, k_2 d'un second type et identiques entre eux, k_r d'un r^{ieme} type et identiques entre eux. Le nombre de permutations de ces n éléments s'élève à :

$$P_{n,k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$$

Exemple : Supposons une expérience sur le retour au gîte (homing) de 10 animaux appartenant à 3 espèces différentes : 2 appartiennent à l'espèce A, 3 à l'espèce B et 5 à l'espèce C. Si l'on observe la séquence d'arrivée des espèces à leur gîte, combien existe-t-il de possibilités d'ordre d'arrivée ?
Réponse : On cherche le nombre de permutations avec $n = 10$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 5$. D'où, selon la formule ci-dessus :

$$P_{10,2,3,5} = \frac{10!}{2!3!5!} = 2520$$

Dénombrements 11a/13

Combinaisons de n éléments pris p à p, parties d'un ensemble

Le nombre de parties de p éléments parmi n est une partie à p éléments d'un ensemble à n éléments, sans considération d'ordre ou de séquence. Pour tous n et p entiers naturels, on pose :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si p} \leqslant \text{n et } C_n^p = 0 \text{ sinon}$$

Ce type de dénombrement intervient, par exemple, dans les tirages non ordonnés sans remise. Alors que 3 lettres a, b, c prises 2 à 2 conduisent à 6 arrangements (a, b) (a, c) (b, a) (b, c) (c, a) (c, b), elles ne donnent lieu qu'à 3 combinaisons, à savoir : $\{a, b\}\{a, c\}\{b, c\}$

Dénombrements 11b/13

Exemple : Je dispose d'un alphabet de 6 lettres : A,B,C,D,E,F. Combien de mots de deux lettres différentes puis-je constituer ?
Réponse : Il s'agit donc de constituer des combinaisons de 2 lettres parmi 6.

$$N = C_6^2 = \frac{(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(2 \times 1)(4 \times 3 \times 2 \times 1)} = 15$$

Exemple : Soit une population composée de 12 individus. Combien d'échantillons différents de 5 individus peut-on constituer, si l'échantillonnage s'effectue sans remise et si l'on ne tient pas compte de l'ordre de sortie ?
Réponse : N = nombre de combinaisons de 12 éléments pris 5 à 5.

$$N = C_{12}^5 = \frac{12!}{5!7!} = 792 \text{ échantillons}$$

Dénombrements 12/13

Combinaisons de n éléments pris p à p, parties d'un ensemble

Suite de l'exemple précédent : Combien de mots de 1 à 6 lettres puis-je constituer ?

Réponse : $N = 2^6 - 1 = 63$. Cela revient à déterminer le nombre de parties d'un ensemble à 6 éléments auquel on enlève l'ensemble $\varnothing$.

Autre raisonnement :
- nombre de mots à 1 lettre : $n = C_6^1 = 6$; mots à 2 lettres : $n = C_6^2 = 15$
- nombre de mots à 3 lettres : $n = C_6^3 = 20$; mots à 4 lettres : $n = C_6^4 = 15$
- nombre de mots à 5 lettres : $n = C_6^5 = 6$; mots à 6 lettres : $n = C_6^6 = 1$

Le nombre total de mots est donc la somme : $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$.
Au passage on vérifie aisément que $C_n^k = C_n^{n-k}$.
Les expressions sont celles du développement du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$