

Eléments de probabilité



Introduction

- Un **phénomène aléatoire** est un phénomène dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance. Ces phénomènes sont bien représentés par les jeux de hasard dont l'étude a initié le calcul des probabilités. Considérons le cas du jeu de dés ; lorsqu'on jette un dé on est certain qu'il va tomber sur la table (phénomène déterministe), mais on n'est pas capable de prédire la valeur qui va sortir (phénomène aléatoire).
- Un **phénomène déterministe** est un phénomène dont on peut prévoir le résultat. Les lois de la physique classique, par exemple, sont des modèles permettant de prédire le résultat d'une expérience donnée. La loi d'Ohm ($U = RI$) ou la loi de Mariotte ($PV = nRT$), permet de prédire une intensité ou une pression connaissant les autres paramètres. Les lois de la physique illustrent une régularité de « comportement » qui permet de prédire les résultats d'une expérience lorsqu'on contrôle les causes.
- Le calcul des probabilités est la théorie mathématique, donc fondée axiomatiquement, qui permet de modéliser des phénomènes aléatoires ou non déterministes (recherche de lois).



Définitions 1 / 5

Expérience aléatoire

On s'intéresse ici aux seules expériences dont le résultat n'est pas prévisible, les expériences aléatoires. Une expérience aléatoire est aussi appelée une épreuve.

Ensemble fondamental

Pour une expérience aléatoire donnée, l'ensemble des résultats possibles est appelé l'ensemble fondamental, noté Ω . Chaque résultat d'expérience est un point de Ω ou un élément de Ω .

Evénement

Soit Ω un ensemble fini, ou infini dénombrable, tout sous-ensemble de Ω est un événement ; (ce n'est pas vrai si Ω est non dénombrable). Un événement A est un sous-ensemble de Ω , c'est-à-dire un **ensemble de résultats**.



Définitions 2/5

L'événement $\{a\}$, constitué par un seul point de Ω , donc par un seul résultat $a \in \Omega$, est appelé **événement élémentaire**.

L'ensemble vide \emptyset ne contient aucun des résultats possibles : il est appelé **événement impossible**.

L'ensemble Ω contient tous les résultats possibles : c'est l'**événement certain**.



Définitions 3/5

Exemple : On jette un dé à 6 faces et on observe le résultat obtenu.

L'ensemble fondamental est formé par les 6 résultats possibles : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

L'événement correspondant à l'apparition d'un nombre pair est $A = \{2, 4, 6\}$, qui est bien un sous-ensemble de Ω .

L'événement correspondant à l'apparition d'un nombre premier est $B = \{1, 2, 3, 5\}$, l'événement correspondant à l'apparition d'un 3 est $C = \{3\}$: ce sont bien des sous-ensembles de Ω .

Dans cet exemple Ω était fini et dénombrable. Dans certains cas, Ω peut être infini dénombrable. Par exemple, on jette une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'on obtienne pile. L'ensemble fondamental des valeurs possibles est $\Omega = \mathbb{N}^*$ puisqu'on peut avoir un pile au bout d'un jet, de 2 jets, de n jets, n étant aussi grand que l'on veut.



Définitions 4/5

Il n'est pas toujours facile de trouver un ensemble permettant de modéliser l'expérience aléatoire.

Voici une règle pratique pour y arriver : **les événements élémentaires sont ceux qui contiennent l'information maximale qu'il est possible d'obtenir de l'expérience.**

Par exemple, si on lance trois fois une pièce de monnaie, les événements élémentaires sont des triplets comme (p, f, p) indiquant le résultat précis de chacun des trois lancers. Ici $\Omega = \{f, p\} \times \{f, p\} \times \{f, p\} = \{f, p\}^3$.

L'événement A "obtention de pile au deuxième des trois lancers" est composé des triplets suivants : $A = \{(f, p, f); (f, p, p); (p, p, f); (p, p, p)\}$.



Définitions 5/5

Avec ce mode de représentation, les opérations logiques sur les événements : "et", "ou", "négation" se traduisent par des opérations ensemblistes : intersection, réunion, passage au complémentaire. Voici un tableau de correspondance entre les deux langages.

Notations	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
\emptyset	ensemble vide	événement impossible
Ω	ensemble plein	événement certain
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à Ω	le résultat ω est une des réalisations possibles de A
$A \subset B$	A est inclus dans B	la survenue de l'événement A implique la survenue de l'événement B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B (ou inclusif)
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B (réalisation simultanée)
\bar{A} ou A^c	complémentaire de A dans Ω	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles



Probabilité 1 / 3

La *probabilité* P est une fonction qui à un événement associe un nombre appartenant au segment $[0,1]$.

Elle est censée **mesurer les chances de réalisation de cet événement**.

Il n'est pas toujours possible d'attribuer de manière cohérente une probabilité à chaque partie de Ω .

En d'autres termes, P ne peut pas être considérée comme une application de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de Ω dans $[0,1]$ mais comme une **fonction ayant un domaine de définition \mathcal{F}** généralement plus petit que $\mathcal{P}(\Omega)$.



Probabilité 2/3

Le domaine de définition \mathcal{F} **vérifie les propriétés suivantes** :

- \mathcal{F} contient Ω et tous les singletons $\{\omega\}$
- \mathcal{F} est stable par passage au complémentaire : si B est un événement de \mathcal{F} , B^c l'est aussi.
- \mathcal{F} est stable par les opérations de réunion et d'intersection sur les suites d'événements. Si A_1, A_2, \dots est une suite finie ou infinie d'événements de \mathcal{F} , leur réunion et leur intersection sont encore des événements de \mathcal{F} .

Nous appellerons **famille d'événements observables** toute famille \mathcal{F} de parties de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les conditions ci-dessus.



Probabilité 3/3

Soient un ensemble Ω et \mathcal{F} une famille d'événements observables sur Ω .

On appelle **probabilité** sur (Ω, \mathcal{F}) toute application P de \mathcal{F} dans $[0,1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $P(\Omega) = 1$.
- Pour toute suite $(A_j)_{j \geq 1}$ d'événements de \mathcal{F} deux à deux disjoints (*c'est à dire incompatibles*) :

$$P\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(A_j)$$

Le triplet (Ω, \mathcal{F}, P) s'appelle **espace probabilisé**.

Les éléments de \mathcal{F} sont appelés des **événements**.

Une probabilité est une application qui s'applique à un événement, c'est-à-dire à une partie de Ω , et qui donne en résultat un nombre dans $[0,1]$. Ce nombre sera appelé la probabilité de l'événement considéré.



Propriétés générales 1 / 2

- $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. On dit que les événements A et B **s'excluent mutuellement** ou qu'ils sont **incompatibles**.
- Si les $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire qu'ils forment une partition complète de Ω , on parle de **système complet d'événements** ($\forall (i \neq j), A_i \cap A_j = \emptyset$) alors :

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \quad \text{et} \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

- $\forall A \in \mathcal{F}, P(\bar{A}) = P(\complement A) = 1 - P(A)$
- $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F},$ si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$
- $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (*théorème des probabilités totales*)



Propriétés générales 2/2

La **propriété d'additivité forte** se généralise à un nombre quelconque n d'éléments : c'est la formule de Poincaré (ou d'inclusion - exclusion, ou de crible). Pour $n = 3$ par exemple :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)) + P(A \cap B \cap C)$$

et de façon générale :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{(k-1)} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right)$$



Equiprobabilité 1 / 4

Soit Ω un univers fini.

Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω .

L'équiprobabilité, ou *probabilité uniforme*, sur Ω , est l'application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui à une partie A de Ω associe :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

On remarque que tous les événements élémentaires $\{\omega\}$ ont même probabilité égale à $1/\text{Card}(\Omega)$, ce qui justifie le terme d'équiprobabilité.

$\text{Card}(A)$ est souvent appelé "*nombre de cas favorables*" (sous-entendu à la réalisation de A) et $\text{Card}(\Omega)$ "*nombre de cas possibles*".

Dans ce cadre, le calcul de la probabilité d'un événement se ramène à des problèmes de combinatoire et de dénombrement.



Equiprobabilité 2/4

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.

Quelle est la probabilité de tirer un trèfle ?

Réponse : $A = \{\text{ensemble des trèfles}\}$, $\text{Card}(A) = 13$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Quelle est la probabilité de tirer un roi ?

Réponse : $B = \{\text{ensemble des rois}\}$, $\text{Card}(B) = 4$

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Quelle est la probabilité de tirer un roi de trèfle ?

Réponse : $C = \{\text{roi de trèfle}\}$, $\text{Card}(C) = 1$

$$P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{52}$$



Equiprobabilité 3/4

Exemple : Une boîte contient 10 articles dans 4 sont défectueux. On tire 3 articles au hasard. Quelle est la probabilité pour que les 3 articles tirés au sort soient défectueux ?

Autre raisonnement : On prend pour Ω l'ensemble de toutes les parties à 3 éléments d'un ensemble à 10 éléments (ensemble de tous les échantillons possibles de taille 3, c'est-à-dire C_{10}^3 échantillons possibles), $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P l'équiprobabilité sur Ω (c'est-à-dire que chaque échantillon de taille 3 a $1/C_{10}^3$ chances d'être tiré au sort). Il suffit alors de dénombrer tous les échantillons ayant exactement 3 articles défectueux. Un tel échantillon se construit en prenant 3 articles dans le sous-ensemble des défectueux (C_4^3 choix possibles) et en complétant par 0 articles pris dans le sous-ensemble des non-défectueux (C_6^0 choix possibles). On en déduit :

$$P(3 \text{ pièces défectueuses}) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{\frac{4!}{1!3!} \times \frac{6!}{0!6!}}{\frac{10!}{3!7!}} = \frac{4}{\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2}} = \frac{4}{10 \times 3 \times 4} = \frac{1}{30}$$



Equiprobabilité 4/4

On peut généraliser ce raisonnement (problème de **contrôle qualité d'une production**).

On prélève au hasard un échantillon de n pièces dans une production totale de N pièces comprenant en tout D pièces défectueuses.

Quelle est la probabilité de l'événement A_k suivant :

$A_k = \{\text{il y a exactement } k \text{ pièces défectueuses dans l'échantillon}\}$?

Réponse : Dénombrons ces échantillons. On les forme en choisissant k objets défectueux dans une sous-population de D objets défectueux et en complétant par $n - k$ objets non défectueux choisis dans une sous-population de $N - D$. Au final :

$$P(A_k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 \leq k \leq D \\ 0 \leq n - k \leq N - D \end{cases}$$

Dans l'exemple précédent : $N = 10$, $D = 4$, $n = 3$ et $k = 3$



Probabilité sur un ensemble fini 1 / 3

Soit $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n\}$ un univers (ensemble) fini ($n \in \mathbb{N}$).

Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω .

Soit une probabilité P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$.

On pose :

$$A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad p_i = P(\{\omega_i\})$$

Cette famille d'événements vérifie les deux propriétés suivantes :

$$1) \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad 0 \leq p_i \leq 1$$

$$2) \sum_{i=0}^n p_i = 1$$

on a alors
$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$



Probabilité sur un ensemble fini 2/3

Exemple : Soit le dé biaisé suivant :

i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/3	1/6	1/12	1/12	1/4	p_6

Déterminer p_6 pour que les p_i définissent une probabilité.

Calculer la probabilité qu'après un lancé de dé, le résultat soit pair.

Réponse

$$\sum_{i=1}^6 p_i = 1 \Rightarrow p_6 = 1 - (1/3 + 1/6 + 1/12 + 1/12 + 1/4) \Leftrightarrow p_6 = 1/12$$

L'ensemble des valeurs possibles est : $A = \{2, 4, 6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$

$$P(A) = \sum_{i:w_i \in A} p_i = \sum_{w \in A} P(\{\omega\}) = 1/6 + 1/12 + 1/12 = 1/3$$



Probabilité sur un ensemble fini 3/3

Exemple :

On jette 3 pièces de monnaie et on compte le nombre de "face" obtenu.

L'ensemble fondamental correspondant à cette expérience est $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ puisqu'on peut obtenir comme résultat de l'expérience : 0 fois "face" (3 fois "pile"), 1 fois "face" (2 fois "pile"), 2 fois "face" (1 fois "pile"), ou 3 fois "face" (0 fois "pile").

On probabilise cet ensemble fini en donnant une valeur p_0, p_1, p_2 et p_3 aux événements $\{0\}, \{1\}, \{2\}$ et $\{3\}$.

Par exemple $p_0 = 1/8, p_1 = 3/8, p_2 = 3/8$ et $p_3 = 1/8$.

On vérifie que $\forall i \in \{0, 1, 2, 3\} p_i \geq 0$ et $\sum p_i = 1$

Considérons l'événement A tel qu'on ait au moins 2 fois "face" : $A = \{a_2, a_3\}$

Alors $Pr(A) = p_2 + p_3 = 3/8 + 1/8 = 4/8 = 1/2$



Ensembles probabilisés infinis 1 / 2

Cas dénombrable : Soit un ensemble fondamental de la forme $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, comme dans le cas fini. Cet ensemble fondamental est probabilisé en affectant à chaque élément a_i une valeur réelle p_i telle que :

$$p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$$

La probabilité d'un événement quelconque est alors la somme des p_i correspondant à ses éléments. **Exemple :** soit l'expérience consistant à jeter une pièce et à compter le nombre de jets jusqu'à ce qu'on obtienne un résultat "pile" (c'est un espace infini dénombrable), on peut construire un espace probabilisé en choisissant :

$$p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{4}, \dots, p_n = \frac{1}{2^n}, \dots, p_\infty = 0$$



Ensembles probabilisés infinis 2/2

Remarque : Le choix des p_i est arbitraire ; en réalité, il est justifié soit par des considérations *a priori* (dans le cas de l'expérience précédente on suppose que chaque jeté de pièce constitue une expérience avec $\Pr(\text{pile}) = \Pr(\text{face}) = 1/2$ et que le résultat d'un jet n'influe pas sur le suivant - jets indépendants les uns des autres, le bras ne se fatigue pas !!!). Il peut être aussi estimé ; c'est le problème des statistiques qui, à partir de nombreuses réalisations de l'expérience, permet d'approcher les valeurs p_i (cf. suite du cours).



Exercices



Exercice n° 1 a

Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60% contre l'hépatite B, et 30% contre les deux maladies.

Quelle est la probabilité pour qu'un individu, choisi au hasard, ne soit vacciné contre aucune de ces 2 maladies ?

- A. 0,55
- B. 0,40
- C. 0,30
- D. 0,75
- E. 0,25



Exercice n° 1 b

Réponse : Soient A l'événement "être vacciné contre la fièvre jaune" et B l'événement "être vacciné contre l'hépatite B". Le problème revient donc à chercher la probabilité de l'événement "ne pas être vacciné contre la fièvre jaune ET "ne pas être vacciné contre l'hépatite B", c'est-à-dire

$$P(\complement A \cap \complement B) = P(\complement(A \cup B)) = 1 - P(A \cup B)$$

Le tirage est réalisé au hasard. On applique la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Il vient aisément que la probabilité recherchée $= 1 - (0,45 + 0,60 - 0,30) = 0,25$



Exercice n°2a

Les 3 options les plus populaires d'un certain type de nouvelle voiture sont :
A = boîte de vitesse automatique ; B = transmission assistée ; C = radio/CD avec chargeur de CDs. Une analyse des ventes a montré que les acheteurs ont choisi :

Options	Pourcentage des ventes
A	70
B	75
C	80
$A \cup B$	80
$A \cup C$	85
$B \cup C$	90
$A \cup B \cup C$	95



Exercice n°2b

Quelles sont les propositions exactes ?

1. La probabilité qu'un acheteur ne choisisse aucune des 3 options est 0,05
2. La probabilité qu'un acheteur choisisse au moins une option est 0,95
3. La probabilité qu'un acheteur ne choisisse que la radio est 0,15
4. La probabilité qu'un acheteur choisisse les 3 options est 0,65
5. La probabilité qu'un acheteur ne choisisse qu'une seule option est 0,30

A : 1,2,3,4,5

B : 1,3,5

C : 2,4

D : 1,2,3,4

E : 1,2,4



Exercice n°2c

1. La probabilité qu'un acheteur ne choisisse aucune des 3 options est 0,05

$$1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0,95 = 0,05$$

2. La probabilité qu'un acheteur choisisse au moins une option est 0,95

$$P(A \cup B \cup C) = 0,95$$

3. La probabilité qu'un acheteur ne choisisse que la radio est 0,15

$$P(C) - P((A \cup B) \cap C) = P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

$$= P(C) - (P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C))$$

$$= 0,80 - (0,65 + 0,65 - 0,65) = 0,15$$



Exercice n°2d

4. La probabilité qu'un acheteur choisisse les 3 options est 0,65

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0,95 - (0,7 + 0,75 + 0,8 - 0,65 - 0,65 - 0,65) = 0,65$$

5. La probabilité qu'un acheteur ne choisisse qu'une seule option est 0,30

$$\begin{aligned} &= P(A) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)) \\ &+ P(B) - (P(A \cap B) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)) \\ &+ P(C) - (P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)) \\ &= 0,05 + 0,1 + 0,15 = 0,30 \end{aligned}$$

A : 1,2,3,4,5

B : 1,3,5

C : 2,4

D : 1,2,3,4

E : 1,2,4



Exercice n°3a

Trois médecins (notés a, b et c) exercent dans un village. Quatre habitants malades (notés 1,2,3 et 4) appellent un médecin au téléphone après avoir choisi l'un d'eux au hasard dans l'annuaire. On suppose les listes d'appel équiprobables. Quelles sont les propositions exactes parmi les suivantes ?

1. L'univers des relations possibles est le produit cartésien : $\{1, 2, 3, 4\} \times \{a, b, c\}$
2. Le nombre total de situations possibles d'appel est 3^4
3. La probabilité qu'un seul médecin soit appelé est $3/81$
4. La probabilité que deux médecins exactement soient appelés est $14/27$
5. La probabilité que les trois médecins soient appelés est $12/27$

A : 1,2,4

B : 1,2,5

C : 1,2,3,4,5

D : 1,2,3,5

E : 1,2,4,5



Exercice n°3b

1. L'univers des relations possibles est le produit cartésien : $\{1, 2, 3, 4\} \times \{a, b, c\}$
Les listes d'appel possibles sont fabriquées à partir de couples unissant un patient et un médecin

2. Le nombre total de situations possibles d'appel est 3^4
Chaque malade a le choix entre 3 médecins. Donc 3 possibilités pour le malade 1, 3 pour le malade 2, 3 pour le malade 3 et 3 pour le malade 4. Ce qui donne au total $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ possibilités

3. La probabilité qu'un seul médecin soit appelé est $3/81$
Les listes d'appel sont du type : $\{1a, 2a, 3a, 4a\}$, $\{1b, 2b, 3b, 4b\}$, $\{1c, 2c, 3c, 4c\}$.
Il y en a 3. Autre raisonnement : le premier patient choisit un médecin parmi 3, les 3 autres n'ont plus qu'une seule possibilité. Au final la probabilité est $3/3^4 = 3/81 = 1/27$



Exercice n°3c

4. La probabilité que deux médecins exactement soient appelés est $14/27$

Au lieu de choisir parmi 3 médecins, les patients choisissent donc dans un ensemble du type $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, c'est-à-dire : $C_3^2 = 3$ combinaisons possibles de 2 éléments parmi 3. Pour chaque paire de médecins, chaque patient 2 choix possibles, soit au total 2^4 . Mais il faut à chaque fois enlever le cas où tous les patients choisissent le même médecin. Ce qui fait au total pour chaque paire : $(2^4 - 2) = 14$ possibilités et pour les 3 paires : 3×14 . La probabilité est donc bien de $14/27$.

5. La probabilité que les trois médecins soient appelés est $12/27$

Les 3 événements (1, 2 ou 3 médecins appelés) sont incompatibles entre eux et couvrent l'ensemble des possibilités. La somme de leur probabilité est donc 1. On déduit de 2) 3) et 4) la probabilité cherchée.



Exercice n°4a

18 personnes se sont présentées à une collecte de sang organisée par l'EFS dans un village de l'arrière-pays niçois. Parmi celles-ci, on a recensé :

- 11 personnes du groupe O
- 4 personnes du groupe A
- 2 personnes du groupe B
- 1 personne du groupe AB

A l'issue de la collecte, on prélève au hasard 3 flacons par les 18 flacons obtenus.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- a) le sang des trois flacons appartient au même groupe
- b) parmi les trois flacons prélevés, au moins un contient du sang du groupe A
- c) le sang des trois flacons appartient à trois groupes différents



Exercice n°4b

Les trois flacons étant distincts et non ordonnés, il y a donc $C_{18}^3 = 816$ façons de composer l'échantillon de 3 flacons.

a) le sang des trois flacons appartient au même groupe

Compte tenu des effectifs recensés, il ne peut s'agir que du groupe O ou du groupe A. Pour le groupe O, il y a $C_{11}^3 = 165$ façons. Pour le groupe A, il y a $C_4^3 = 4$ façons. Au final la probabilité de cet événement "les trois flacons sont du même groupe" est égale à : $165/816 + 4/816 = 169/816$



Exercice n°4c

b) parmi les trois flacons prélevés, au moins un contient du sang du groupe A

2 méthodes de résolution. La première consiste à considérer les événements incompatibles suivants : "1 flacon du groupe A" OU "2 flacons du groupe A" OU "3 flacons du groupe A". Les dénombrements respectifs sont : $C_4^1 \times C_{14}^2$; $C_4^2 \times C_{14}^1$; C_4^3 . Soit au total une probabilité de $452/816$. La seconde méthode consiste d'abord à calculer la probabilité de l'événement contraire : "aucun flacon n'est du groupe A", c'est-à-dire $C_{14}^3 / C_{18}^3 = 364/816$. La probabilité finale est égale à $1 - 364/816 = 452/816$

c) le sang des trois flacons appartient à trois groupes différents

les échantillons sont donc du type : $\{O, A, B\}\{O, A, AB\}\{O, B, AB\}\{A, B, AB\}$. Les dénombrements respectifs sont : $11 \times 4 \times 2 = 88$; $11 \times 4 \times 1 = 44$; $11 \times 2 \times 1 = 22$; $4 \times 2 \times 1 = 8$. Au final la probabilité est $(88+44+22+8)/816 = 162/816$.



Exercice n° 5a

On veut donner à un malade un traitement comportant 3 médicaments, un par famille thérapeutique. Pour la première famille, on peut choisir parmi 4 médicaments, pour la deuxième parmi 5 et pour la troisième parmi 3. On suppose que toutes les associations sont possibles. Combien d'ordonnances peut-on écrire ?

- A. 12
- B. 15
- C. 20
- D. 40
- E. 60



Exercice n°5b

Il existe 4 médicaments possibles de la première famille, 5 pour la deuxième et 3 pour la troisième famille. Au total il y a $4 \times 5 \times 3 = 60$ associations ou ordonnances possibles.



Sources, Crédits

- Couty F, Debord J, Fredon D. Probabilités et statistiques. Paris : Dunod éditions, 1999. 208 p.
- Golmard JL, Mallet A, Morice V. Biostatistique PCEM1. 2009-2010. Université Paris VI.
- Scherrer B. Biostatistique. Montréal : Gaëtan Morin éditeur, 1984. 850 p.
- Suquet Ch. Introduction au calcul des probabilités. 2002-2003. Université des Sciences et Technologies de Lille.



Mentions légales

- L'ensemble de ce document relève des législations française et internationale sur le droit d'auteur et la propriété intellectuelle.
- Tous les droits de reproduction de tout ou partie sont réservés pour les textes ainsi que pour l'ensemble des documents iconographiques, photographiques, vidéos et sonores.
- Ce document est interdit à la vente ou à la location par un tiers autre que l'Université Côte d'Azur.
- La diffusion, la duplication, la mise à disposition du public (sous quelque forme ou support que ce soit), la mise en réseau, de tout ou partie de ce document, sont strictement réservées à l'Université Côte d'Azur.
- L'utilisation de ce document est strictement réservée à l'usage privé des étudiants inscrits aux cours et au tutorat organisés par l'UFR de Médecine de l'Université de Côte d'Azur, et non destinée à toute autre utilisation privée ou collective, gratuite ou payante.

