COURS N°3 : PROBABILITE CONDITIONNELLE, THEOREME DE BAYES ET INDEPENDANCE EN PROBABILITE

P Staccini

Plan du cours

- Probabilité conditionnelle
- Formule de Bayes
- Théorème de Bayes
- Indépendance en probabilité

Probabilité conditionnelle

Définition

Soient A et B deux événements quelconques d'un ensemble fondamental Ω muni d'une loi de probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$. On s'intéresse à ce que devient la probabilité de A lorsqu'on apprend que B est déjà réalisé, c'est-à-dire lorsqu'on restreint l'ensemble des résultats possibles Ω à B. La probabilité conditionnelle de A, sachant que l'événement B est réalisé, est notée $P(A/_B)$ et est définie par la relation suivante :

$$P(A/_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Dans cette équation, les probabilités des événements $A \cap B$ et B doivent être calculées sur tout l'ensemble fondamental Ω, comme si on ne savait pas que B s'est déjà réalisé. Sinon, on obtient évidemment $P(B) = 1$. Dans le cas ou Ω est équiprobable, on a :

$$P(A/_B) = \frac{\text{nombre de réalisations possibles de A et B en même temps}}{\text{nombre de réalisations de B}}$$

Théorème de la multiplication 1/3

Reprenons la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{et} \qquad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On en déduit immédiatement que :
$P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$

Cette égalité peut se généraliser.
Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ des événements quelconques d'un espace probabilisé.
On montre que :
$P(A_1 \cap A_2 ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1})$

Théorème de la multiplication 2/3

Exemple : Une boîte contient 10 articles dont 4 sont défectueux. On tire 3 articles au hasard. Quelle est la probabilité pour que les 3 articles tirés au sort soient défectueux ?

Réponse :
On cherche donc la probabilité $P(1er \cap 2d \cap 3e)$, c'est-à-dire $P(A \cap B \cap C)$

Nous allons décomposer la solution en 3 étapes
Probabilité que le 1er article soit défectueux :

$$P(1er) = \frac{4}{10}$$

Théorème de la multiplication 3/3

Probabilité que le 2ème article soit défectueux, sachant le 1er défectueux :

$$P(2d/1er) = \frac{3}{9}$$

Probabilité que le 3ème soit défectueux, sachant le 1er et le 2d défectueux :

$$P(\text{3e}/\text{1er et 2d}) = \frac{2}{8}$$

Au final :

$$P(1er \cap 2d \cap 3e) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

Diagramme en arbre 1/

- On considère une séquence finie d'expériences dont chacune d'entre elles a un nombre fini de résultats possibles.
- Les probabilités associées aux résultats possibles d'une expérience dépendent du résultat de l'expérience précédente ; il s'agit de probabilités conditionnelles.
- Pour représenter cette séquence, on utilise une représentation « en arbre », le théorème précédent permettant de calculer la probabilité de chaque feuille de l'arbre.

Diagramme en arbre 2/

- Exemple : une étude rétrospective a concerné 82 enfants souffrant de constipation. Après la réalisation d'une manométrie rectale, certains enfants ont vu leur bilan complété d'un électromyogramme. Au final, pour chaque situation, une option thérapeutique a été choisie dont l'efficacité a été évaluée. L'ensemble de l'étude est résumé dans le diagramme suivant. On s'intéresse à la probabilité de succès (efficacité thérapeutique) pour chacune des branches.

Diagramme en arbre 3/

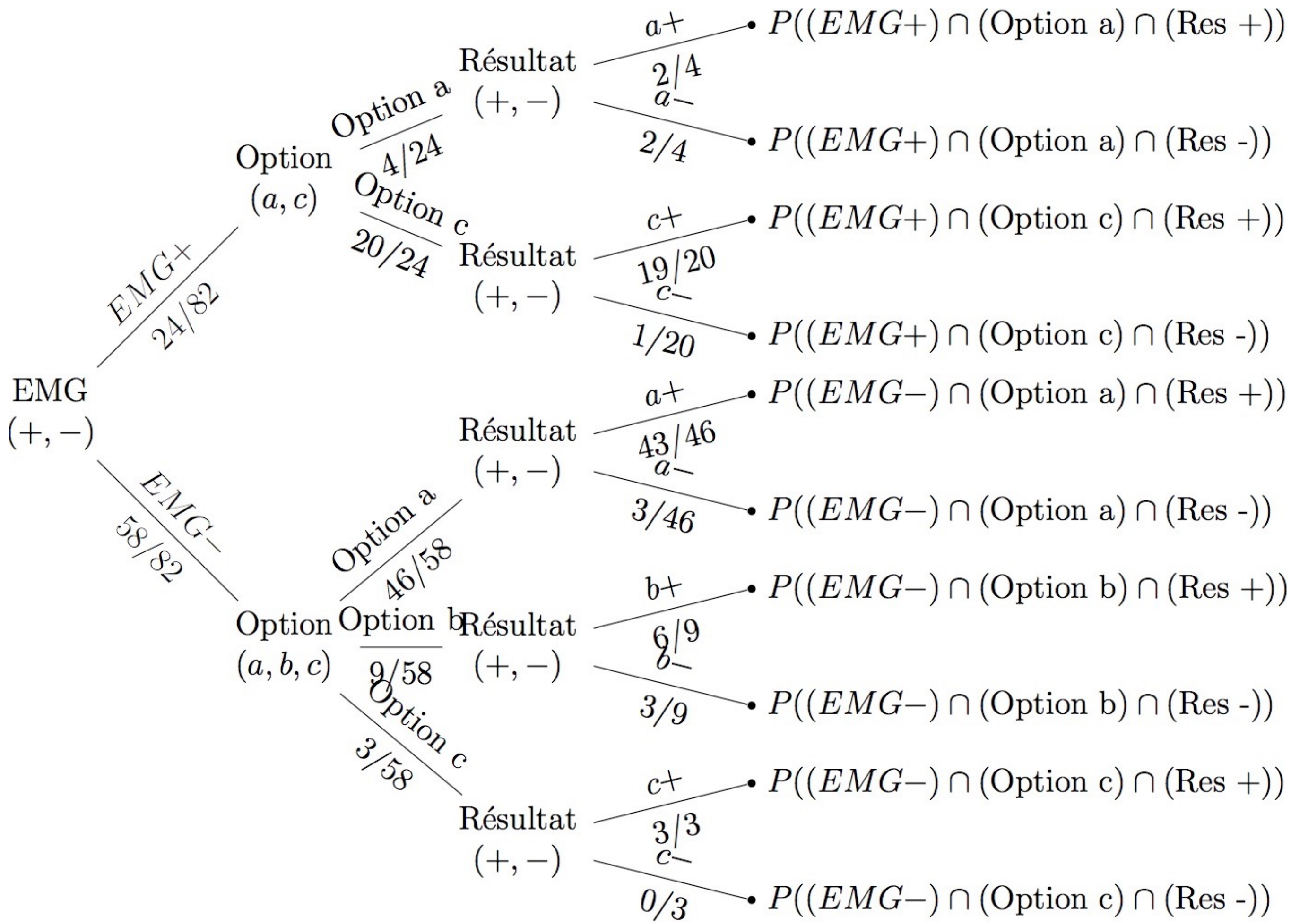


Diagramme en arbre 4/

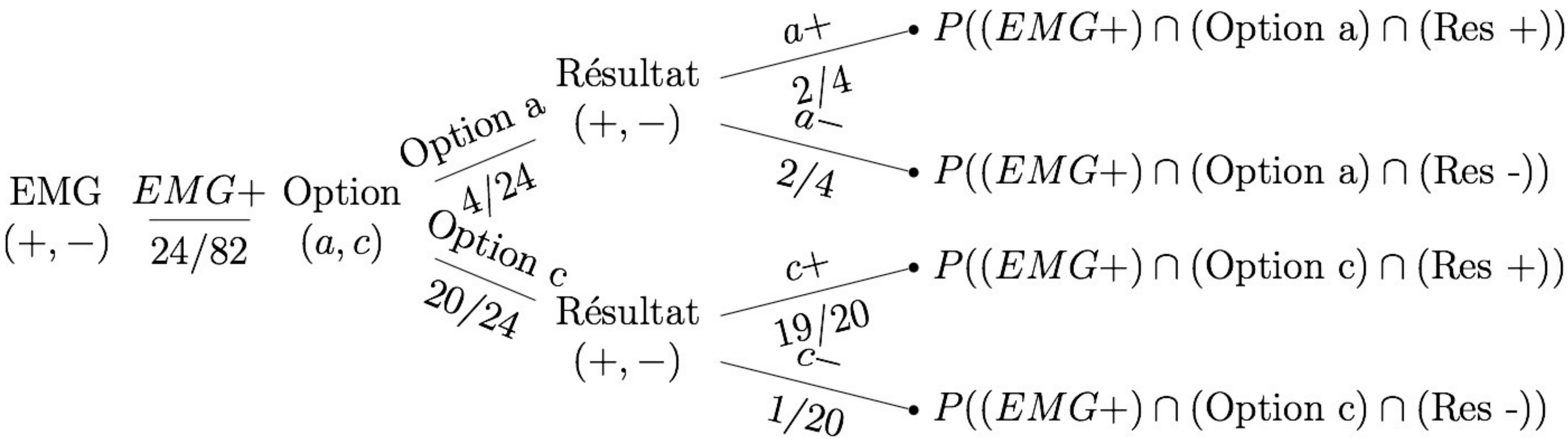


Diagramme en arbre 5/

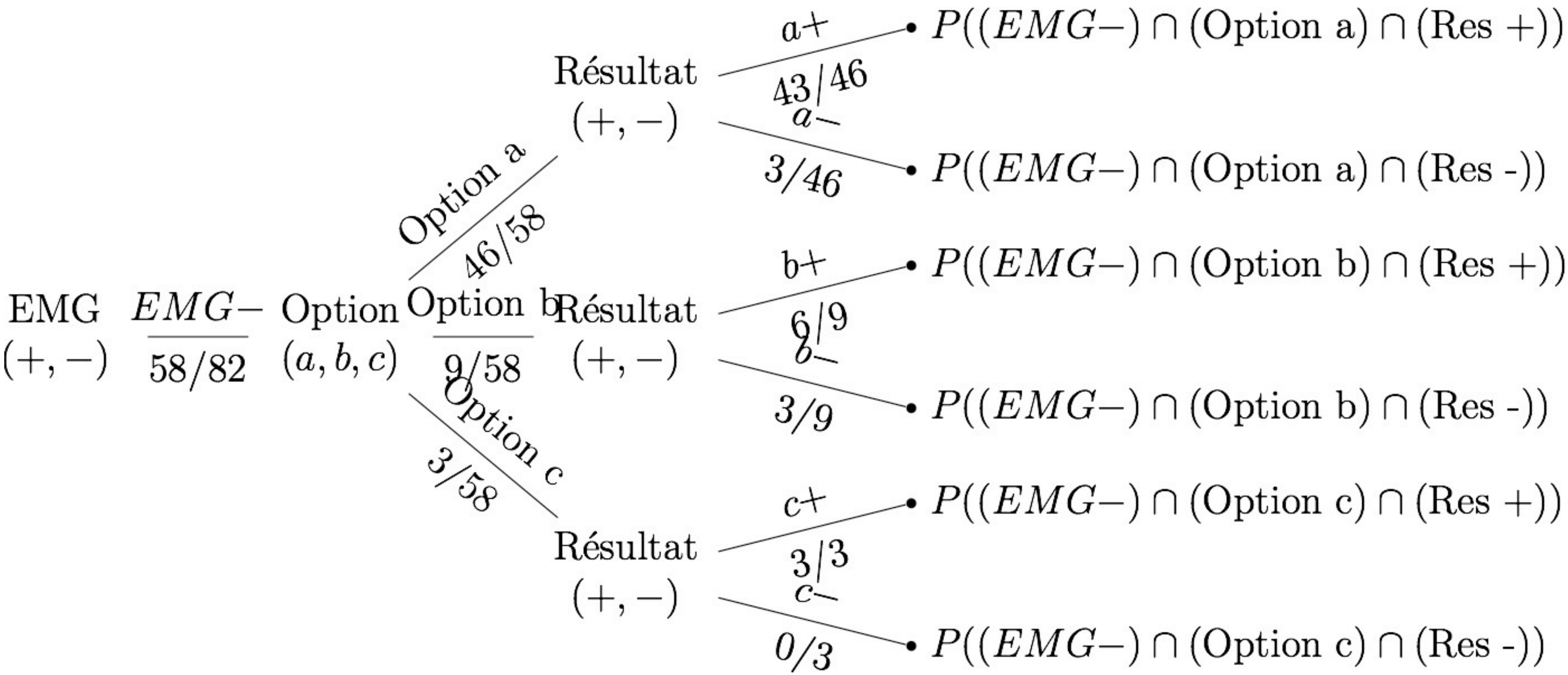


Diagramme en arbre 6/

La probabilité qu'un chemin particulier de l'arbre se réalise est, d'après le théorème de la multiplication, le produit des probabilités de chaque branche du chemin.
Les chemins s'excluant mutuellement, la probabilité que le traitement soit efficace (ou non) est égale à la somme des probabilités d'être efficace (ou non) pour tout chemin aboutissant à un état + (ou -)

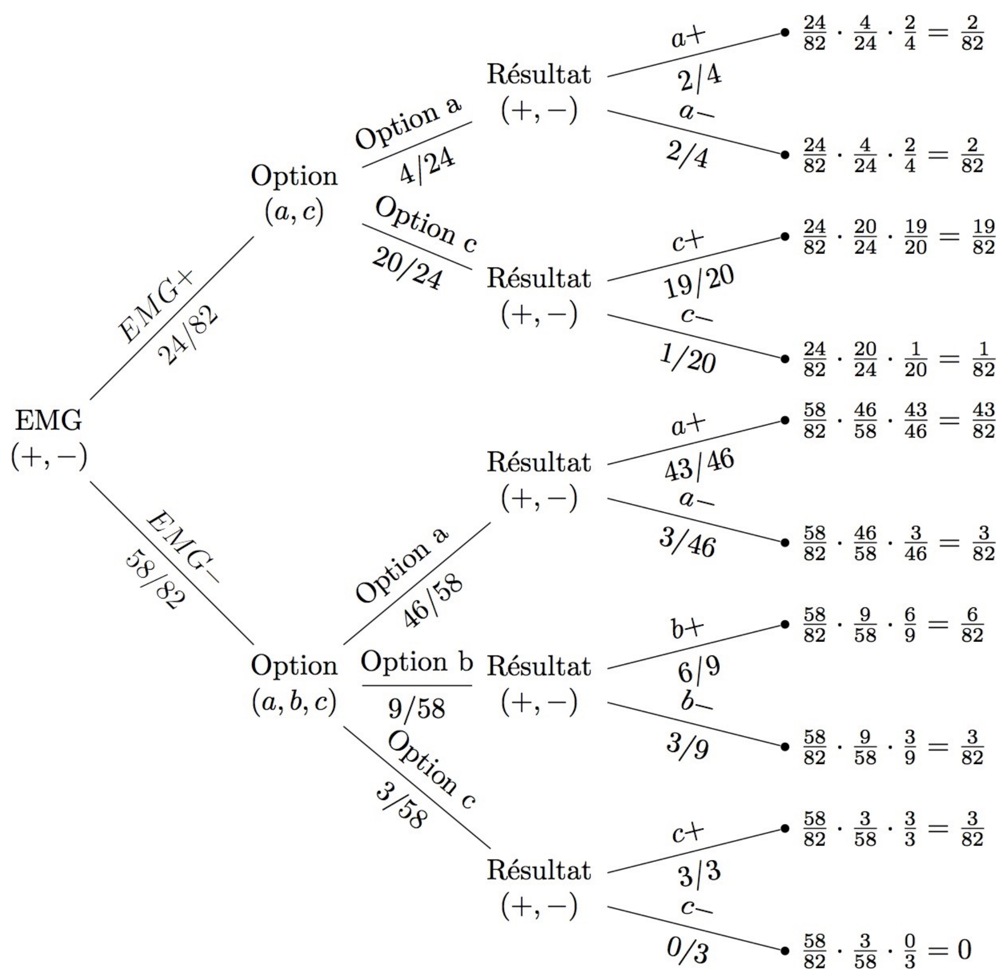


Diagramme en arbre 7/

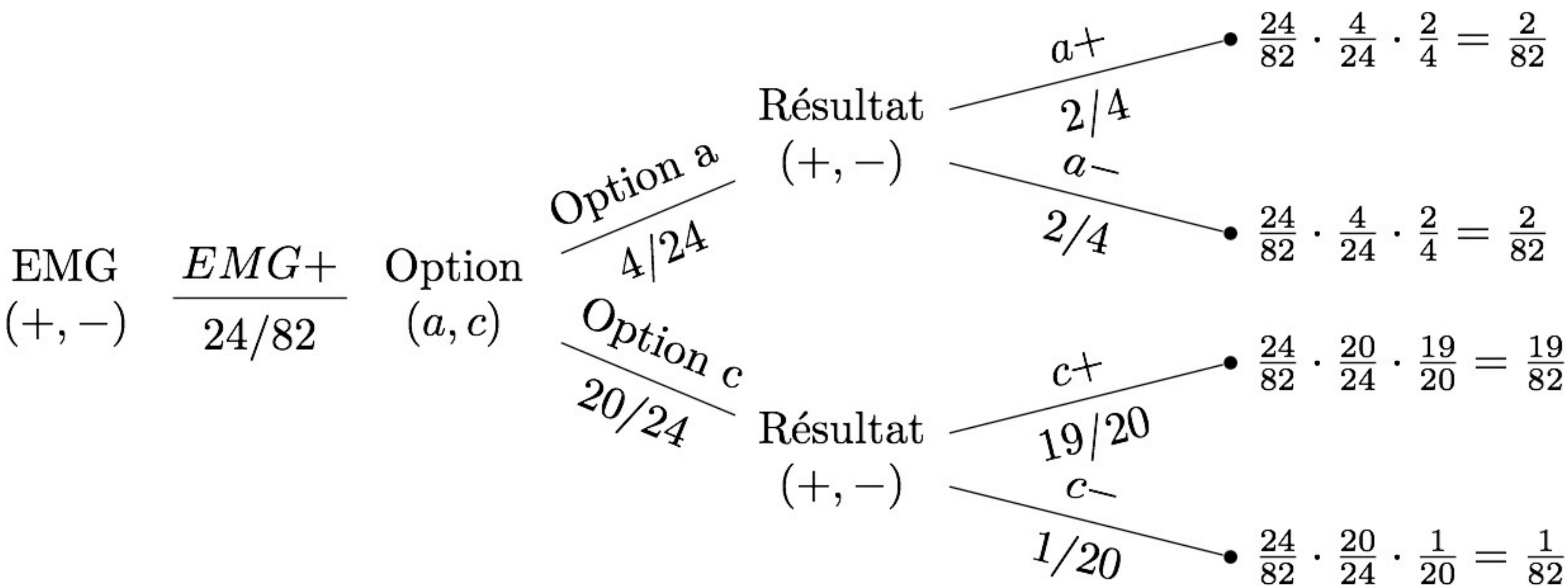
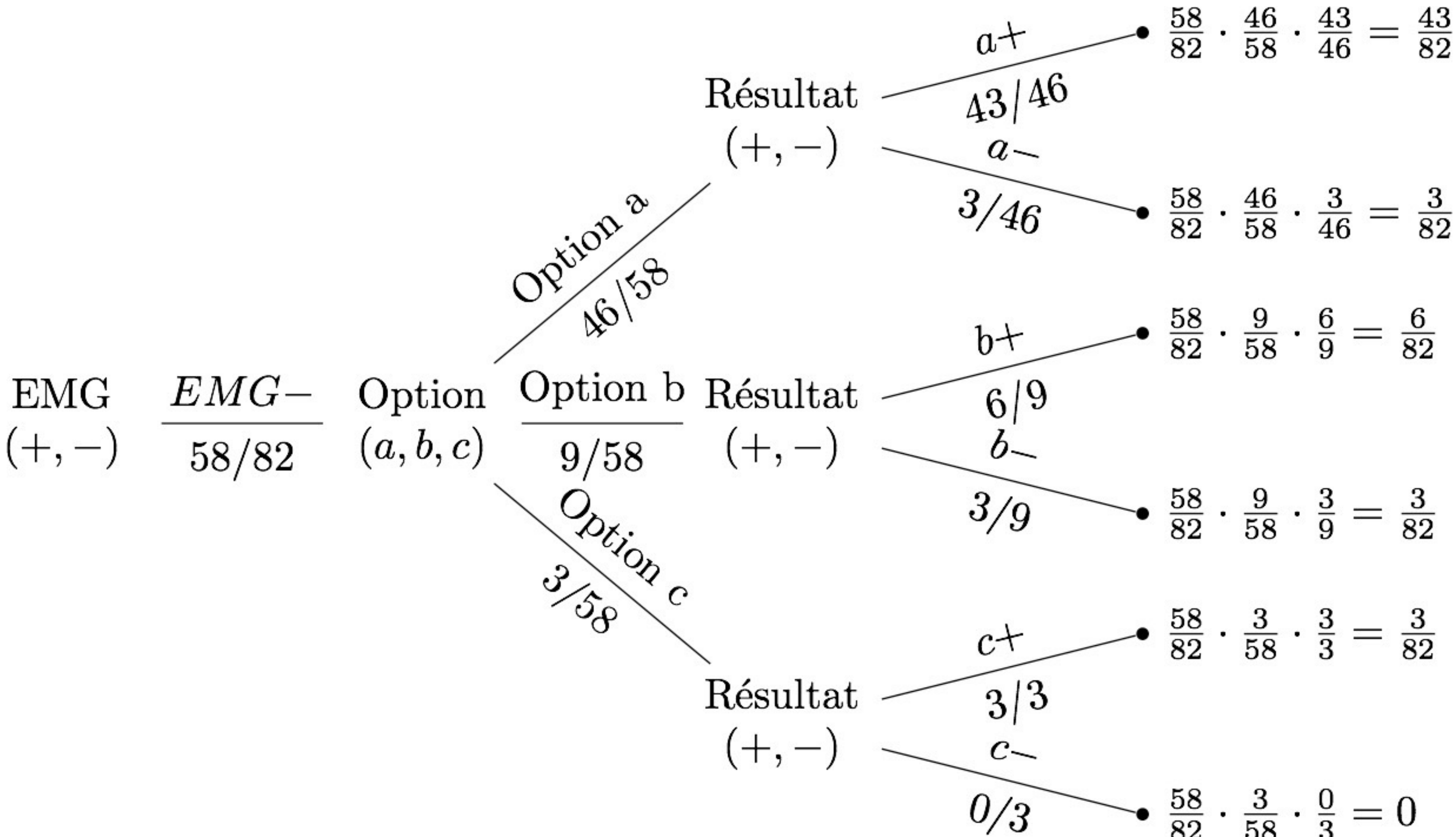


Diagramme en arbre 8/



Attention

Il ne faut pas confondre probabilité conditionnelle et probabilité d'une intersection !!

- La probabilité conditionnelle est une proportion de sujets présentant A **PARMI** les sujets présentant B.

- La probabilité d'une intersection est la proportion de **TOUS** les sujets qui présentent à la fois A **ET** B.

Formule et théorème de Bayes

Rappels

Soient A et B deux événements quelconques d'un ensemble fondamental Ω muni d'une loi de probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

On s'intéresse à ce que devient la probabilité de A lorsqu'on apprend que B est déjà réalisé, c'est-à-dire lorsqu'on restreint l'ensemble des résultats possibles Ω à B.

La probabilité conditionnelle de A, sachant que l'événement B est réalisé, est notée $P(A/_B)$ et est définie par la relation suivante :

$$P(A/_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Formule de Bayes

Reprenons la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(A/_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1}$$

$$P(B/_A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2}$$

On en déduit immédiatement que (*théorème de la multiplication*) :

$$P(A \cap B) = P(A/_B) \times P(B) = P(B/_A) \times P(A) \tag{3}$$

On en déduit immédiatement que (*formule de Bayes*) :

$$P(B/_A) = \frac{P(A/_B) \times P(B)}{P(A)} \tag{4}$$

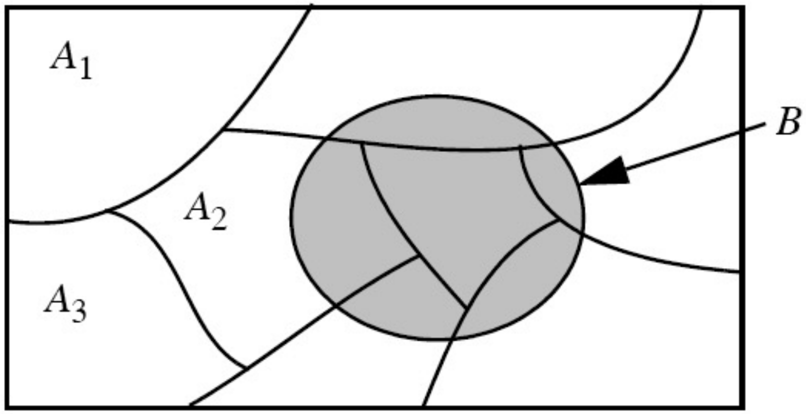
Théorème de Bayes 1/

Considérons des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tels qu'ils forment une **partition** de l'ensemble fondamental Ω.

Rappel : une partition de Ω est une subdivision de Ω en sous-ensembles disjoints dont la réunion forme Ω. Par définition les A_i s'excluent mutuellement et leur union est Ω :

$$\forall (i \neq j), (A_i \cap A_j) = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

Soit B un événement quelconque :



Théorème de Bayes 2/

De $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ et de $B = B \cap \Omega$,
on déduit que : $B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$
soit, par distributivité : $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$

$\forall (i \neq j), (A_i \cap A_j) = \varnothing \Rightarrow \forall (i \neq j), (B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \varnothing$, c'est-à-dire que les $(B \cap A_i)$ sont deux à deux disjoints (incompatibles, exclusifs) et forment donc une partition de B.

En appliquant le *théorème des probabilités totales* à B, il vient que :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + (B \cap A_2) + \cdots + (B \cap A_n) \qquad (1)$$

Théorème de Bayes 3/

En appliquant le *théorème de la multiplication* à l'égalité précédente, il vient que :

$$P(B) = P(B/_{A_1})P(A_1) + P(B/_{A_2})P(A_2) + \cdots + P(B/_{A_n})P(A_n)$$

Pour chaque A_i, en appliquant la *formule de Bayes*, il vient que :

$$P(A_i/_B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/_{A_i})P(A_i)}{P(B)}$$

D'où le *théorème de Bayes* :

$$P(A_i/_B) = \frac{P(B/_{A_i})P(A_i)}{P(B/_{A_1})P(A_1) + P(B/_{A_2})P(A_2) + \cdots + P(B/_{A_n})P(A_n)}$$

Théorème de Bayes 4/

En médecine, le théorème de Bayes est utilisé pour résoudre les problèmes d'aide au diagnostic. Considérons en effet la survenue d'un symptôme chez un patient (événement B). Par exemple : "douleur abdominale aiguë". Le patient arrive aux urgences avec "mal au ventre".

Avant tout examen clinique ou complémentaire, un certain nombre de diagnostics peuvent être évoqués qui se manifestent tous par une douleur abdominale aiguë : "appendicite aiguë", "perforation d'ulcère", "pancréatite aiguë", "autre diagnostic". Ces diagnostics forment la série des événements A_i. On suppose que tous ces diagnostics ne peuvent pas survenir en même temps (événements incompatibles ou exclusifs).

Les seules informations que l'on connaît sont les probabilités d'avoir le signe sachant qu'on a telle ou telle maladie, cad les $P(B/_{A_j})$. Le problème diagnostique se pose donc en ces termes : **quelle est la probabilité que le patient soit atteint du diagnostic A_j connaissant la présence du signe B, cad $P(A_j/_B)$?**

Application 1/4

Enoncé du problème : Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 1000 (on appelle cette proportion le *taux de prévalence de la maladie*). Le responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage de cette maladie : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Néanmoins, sur une personne non malade, le test est positif à $0,2\%$. Ces chiffres ont l'air excellent, vous ne pouvez qu'en convenir. Toutefois, ce qui vous intéresse, plus que les résultats présentés par le laboratoire, c'est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif. Calculer cette probabilité.

Application 2/4

Les données du problème :

Evénément M = {être malade}, $P(M) = 1/1000$.

Evénément T = {avoir le test positif}.

Probabilité d'avoir le test positif si on est malade : $P(T/_M) = 99/100$
Vous apprendrez plus tard qu'on parle de "vrais positifs"

Probabilité d'avoir le test positif si on est sain : $P(T/_{\bar{M}}) = 0,2/100$
Vous apprendrez plus tard qu'on parle de "faux positifs"

La questions posée est donc la suivante : "probabilité d'être malade si on a le test positif", c'est-à-dire $P(M/_T)$

Application 3/4

Eléments de résolution :

$$P(M/_T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \qquad \textit{formule de Bayes pour les patients positifs} \qquad (1)$$

$$P(T/_M) = \frac{P(M \cap T)}{P(M)} \qquad \textit{formule de Bayes pour les patients malades} \qquad (2)$$

$$T = (T \cap M) \cup (T \cap \bar{M}) \qquad \text{et} \qquad P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M})$$

puisque ces événements sont incompatibles (*formule des probabilités totales*).

$$P(T) = P(T/_M)P(M) + P(T/_{\bar{M}})P(\bar{M}) \qquad (3)$$

Application 4/4

Réponse : En remplaçant la valeur de $P(M \cap T)$ de (2) dans (1) et la valeur de $P(T)$ de (3) dans (1), on obtient l'expression du théorème de Bayes appliquée aux événements M : {être malade} et T : {avoir le test positif}

$$P(M/_T) = \frac{P(T/_M)P(M)}{P(T/_M)P(M) + P(T/_{\bar{M}})P(\bar{M})}$$

$$P(M/_T) = \frac{\frac{99}{100} \times \frac{1}{1000}}{\frac{99}{100} \times \frac{1}{1000} + \frac{0{,}2}{100} \times \frac{999}{1000}} = \frac{\frac{990}{1000} \times \frac{1}{1000}}{\frac{990}{1000} \times \frac{1}{1000} + \frac{2}{1000} \times \frac{999}{1000}}$$

$$P(M/_T) = \frac{990}{990 + 1998} \approx 0,33$$

Le test n'est donc pas si fiable (ou informatif) puisqu'il ne détecte la maladie que pour 1/3 des patients positifs. Vous apprendrez plus tard que cette probabilité $P(M/_T)$ est aussi appelée la *valeur prédictive positive (VPP) du test.*

Evénements indépendants

Définition

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

En d'autres termes, si deux événements A et B sont indépendants, la probabilité pour que A soit réalisé n'est pas modifiée par le fait que B se produise, c'est-à-dire que :

$$P(A/_B) = P(A)$$

Propriétés

La symétrie de cette définition implique qu'on a aussi bien $P(A/_B) = P(A)$ (A est indépendant de B) que $P(B/_A) = P(B)$ (B est indépendant de A). L'apparition d'un des deux événements n'influe pas sur l'apparition de l'autre.

Soient A et B deux événements d' un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Si A et B sont indépendants, alors :
- A et $\bar{B}$ sont indépendants
- $\bar{A}$ et B sont indépendants
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants

Généralisation

On considère maintenant 3 événements A, B, C

On dira que ces 3 événements sont indépendants :

1. s'ils sont indépendants 2 à 2 : A indépendant de B, A indépendant de C, B indépendant de C

2. **et si** $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$.

Attention ! Cette seconde condition n'est pas une conséquence des précédentes.

Indépendance et inclusion

Soient deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Si $A \subset B$, alors $(A \cap B) = A$ et $P(A \cap B) = P(A)$.
En appliquant la formule de Bayes :

$$P(A/_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{devient} \quad P(A/_B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$P(B/_A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{devient} \quad P(B/_A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

Indépendance et exclusion

Soient deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Si $(A \cap B) = \varnothing$, A et B sont dits exclusifs (disjoints) et $P(A \cap B) = 0$

Alors :

$$P(A/_B) = P(B/_A) = 0$$

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

Attention

Il ne faut pas confondre événements incompatibles et événements indépendants.

- Les événements **incompatibles** ne font pas intervenir leur probabilité. Ils ne peuvent pas se réaliser en même temps. Pour rappel, ils sont caractérisés par la relation :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Les événements **indépendants** sont liés à leur probabilité. Les deux peuvent se produire en même temps mais la réalisation d'un événement n'a aucun incidence sur la réalisation du second événement. Pour rappel, ils sont caractérisés par la relation :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exercices

Exercice n°1a

La population d'une ville compte 48% d'hommes et 52% de femmes. Au 1er Janvier 2010, 5% des hommes et 1% des femmes avaient la grippe. On pose comme événements : $H = \{\text{être un homme}\}$; $F = \{\text{être une femme}\}$; $G = \{\text{avoir la grippe}\}$.

Quelles sont les propositions exactes parmi les suivantes :

1. La proportion de personnes grippées est : $5\% + 1\% = 6\%$.
2. La proportion de personnes grippées est : $5\% \times 1\% = 0,05\%$.
3. La proportion de personnes grippées est : $(48\% \times 5\%) + (52\% \times 1\%) = 2,92\%$
4. La proportion de personnes indemnes de la grippe est : 94%
5. On choisit une personne au hasard. Elle est grippée. La probabilité qu'elle soit un homme est : $\frac{2{,}4\%}{2{,}92\%} = 82,2\%$

A : 1,4,5 B : 2,4,5 C : 3,4,5 D : 3,5 E : 3

Exercice n°1b

1. La proportion de personnes grippées est : $5\% + 1\% = 6\%$ (**Faux**)
2. La proportion de personnes grippées est : $5\% \times 1\% = 0,05\%$ (**Faux**)
3. La proportion de personnes grippées est : $(48\% \times 5\%) + (52\% \times 1\%) = 2,92\%$

Vrai : On pose comme événements : H = {être un homme} ; F = {être une femme} ; G = {avoir la grippe} ; $G = (H \cap G) \cup (F \cap G)$ et $H \cap F = \varnothing$

On sait que $P(G/H) = \dfrac{P(H \cap G)}{P(H)}$ d'où $P(H \cap G) = P(G/H) \times P(H)$

Ce qui donne pour $P(H \cap G) = 5\% \times 48\%$
Même raisonnement pour $P(F \cap G) = 1\% \times 52\%$
Comme $(H \cap G) \cap (F \cap G) = (H \cap F) \cap (G \cap G) = \varnothing \cap G = \varnothing$
La probabilité de l'union est la somme des probabilités. Il vient donc que :
$P(G) = P(H \cap G) + P(F \cap G) = (5\% \times 48\%) + (1\% \times 52\%) = 0,0292$

Exercice n°1c

4. La proportion de personnes indemnes de la grippe est : 94% **(Faux)**
5. On choisit une personne au hasard. Elle est grippée. La probabilité qu'elle soit un homme est : $\frac{2{,}4\%}{2{,}92\%} = 82,2\%$

Vrai :

On sait que $$P(H/G) = \frac{P(H \cap G)}{P(G)}$$ d'où $$P(H/G) = \frac{5\% \times 48\%}{2,92\%} = \frac{2,4\%}{2,92\%}$$

A : 1,4,5 B : 2,4,5 C : 3,4,5 **D : 3,5** E : 3

Exercice n°2a

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a, parmi les malades, un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

a) Quelle est la probabilité de tomber malade ?

b) Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ?

c) Le vaccin est-il efficace ?

Exercice n°2b

a) Soient V l'événement : "Etre vacciné" et M l'événement : "Etre malade". D'après l'énoncé, on sait que :

$$P(V) = 1/4 \qquad \text{et} \qquad P(M/V) = 1/12$$

On sait par définition que :

$$P(M/V) = \frac{P(V \cap M)}{P(V)} \qquad \text{et} \qquad P(V/M) = \frac{P(V \cap M)}{P(M)}$$

On déduit facilement que :

$$P(V \cap M) = P(M/V) \times P(V) = 1/12 \times 1/4 = 1/48$$

Exercice n°2c

On sait également par l'énoncé que :

$$\frac{P(V/M)}{P(\bar{V}/M)} = 1/4 \Leftrightarrow P(\bar{V}/M) = 4 \times P(V/M)$$

Par ailleurs :

$$P(V/M) + P(\bar{V}/M) = 1 \Rightarrow P(V/M) = 1/5$$

Il vient ainsi que

$$P(M) = \frac{P(V \cap M)}{P(V/M)} = \frac{\frac{1}{48}}{\frac{1}{5}} = 5/48$$

Exercice n°2d

b) On demande $P(M/\bar{V})$. On sait que (formule des probabilités totales) :

$$P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap \bar{V})$$

$$P(M) = P(M/V) \times P(V) + P(M/\bar{V}) \times P(\bar{V})$$

$$P(M/\bar{V}) = \frac{P(M) - P(M/V) \times P(V)}{P(\bar{V})} = \frac{5/48 - 1/48}{3/4} = 1/9$$

c) La probabilité d'être malade en étant vacciné est $1/12$ (d'après l'énoncé). La probabilité d'être malade en n'étant pas vacciné est $1/9$. Le vaccin a donc bien un effet protecteur...

Exercice 3a

On suppose que 50% des toxicomanes sont infectés par voie intraveineuse par le virus de l'hépatite C. On estime qu'il y a 1% de la population totale infecté par ce virus et qu'un patient infecté sur 10 est un toxicomane par voie intraveineuse. Calculer le pourcentage de toxicomanes par voie intraveineuse dans cette population.

Eléments de réponse :
On définit l'événement A : "être infecté par le virus de l'hépatite C" et l'événement B : "être toxicomane".
L'énoncé donne : $P(A) = 0,01$ et $P(A/_B) = 0,50$ et $P(B/_A) = 0,10$

Exercice 3b

L'énoncé donne : $P(A) = 0,01$ et $P(A/_B) = 0,50$ et $P(B/_A) = 0,10$

On utilise l'égalité suivante, issue de la formule de Bayes :

$$P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)$$

On cherche $P(B)$. Il vient donc que :

$$0,50 \times P(B) = 0,10 \times 0,01$$

D'où on tire :

$$P(B) = 0,002 = 0,2\%$$

Exercice 4a

Une population contient :

- 30 % d'individus porteurs du virus de l'hépatite B et du virus du SIDA
- 45 % d'individus porteurs du virus du SIDA
- 60 % d'individus porteurs du virus de l'hépatite B

a) Quelle est la probabilité pour un individu tiré au hasard dans cette population d'être porteur du virus de l'hépatite B ou du virus du SIDA ?

b) Quelle est la probabilité pour un individu tiré au hasard dans cette population d'être porteur du virus de l'hépatite B s'il est porteur du virus du SIDA ?

c) Dans cette population, l'infection par l'hépatite B et par le SIDA sont-elles incompatibles ? sont-elles indépendantes ?

Exercice 4b

Eléments de réponse :
Soit B l'événement : {être porteur du virus de l'hépatite B}.
Soit S l'événement : {être porteur du virus du SIDA}.
Selon l'énoncé : $P(B \cap S) = 0,30$, $P(B) = 0,60$ et $P(S) = 0,45$.
La première question demande de calculer : $P(B \cup S)$...

Exercice 4c

Réponse :
a) d'après le théorème des probabilités totales :

$$P(B \cup S) = P(B) + P(S) - P(B \cap S)$$

ce qui donne en remplaçant par les valeurs :

$$P(B \cup S) = 0,60 + 0,45 - 0,30 = 0,75$$

Exercice 4d

Réponse :

b) d'après la formule de Bayes :

$$P(B/s) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)}$$

ce qui donne en remplaçant par les valeurs :

$$P(B/s) = \frac{0,30}{0,45} = 0,667$$

Exercice 4e

Réponse :
c1) Deux événements A et B sont dits indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans le cas présent : $0,30 \neq 0,60 \times 0,45 = 0,27$

c2) Deux événements A et B sont dits incompatibles si

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ce qui n'est pas vérifié d'après les données de l'énoncé.

Exercice 5a

- On suppose qu'un sujet (S) venant consulter un service hospitalier à la probabilité 0,30 d'être atteint d'une maladie M. Si S n'est pas atteint de la maladie M il a 9 chances sur 10 de répondre négativement à un test T et s'il est atteint, il a 8 chances sur 10 de répondre positivement. On fait le test. Si le résultat est positif, quelle est la probabilité que le sujet S soit malade ? Quelle est cette probabilité si le test est négatif ?

Exercice 5b

Eléments de réponse :

$M = \{\text{avoir la maladie}\}$, $T = \{\text{avoir le test positif}\}$

$P(M) = 0,30$; $P(T/_M) = 8/10$; $P(\bar{T}/_{\bar{M}}) = 9/10$

On demande : $P(M/_T)$ et $P(M/_{\bar{T}})$

On se rappelle le théorème de Bayes appliqué aux événements M et T :

$$P(M/_T) = \frac{P(T/_M)P(M)}{P(T/_M)P(M) + P(T/_{\bar{M}})P(\bar{M})}$$

Exercice 5c

Réponse :
$P(M) = 0,30$; $P(\bar{M}) = 0,70$; $P(T/_M) = 8/10$; $P(T/_{\bar{M}}) = 1/10$

$$P(M/_T) = \frac{P(T/_M)P(M)}{P(T/_M)P(M) + P(T/_{\bar{M}})P(\bar{M})}$$

$$P(M/_T) = \frac{0,8 \times 0,3}{0,8 \times 0,3 + 0,1 \times 0,7} = 0,77$$

de façon symétrique pour $P(M/_{\bar{T}})$:

$$P(M/_{\bar{T}}) = \frac{P(\bar{T}/_M)P(M)}{P(\bar{T}/_M)P(M) + P(\bar{T}/_{\bar{M}})P(\bar{M})}$$

$$P(M/_{\bar{T}}) = \frac{0,2 \times 0,3}{0,2 \times 0,3 + 0,9 \times 0,7} = 0,09$$

Exercice 6a

Des études antérieures ont montré qu'en période de compétition, pour un sportif pris au hasard, la probabilité d'être déclaré positif au contrôle anti-dopage est égale à 0,02. Chez certains sportifs, la prise d'un médicament M peut entraîner un contrôle anti-dopage positif. En période de compétition, ce médicament, qui diminue fortement les effets de la fatigue musculaire, est utilisé par 25 % des sportifs. Pour un sportif utilisant ce médicament, la probabilité d'être déclaré positif au contrôle anti-dopage est alors égale à 0,05.

1) Calculer la probabilité de l'événement « utiliser le médicament M et être déclaré positif au contrôle anti-dopage ».
2) Pour un sportif choisi au hasard en période de compétition, calculer la probabilité d'avoir utilisé le médicament M si il est déclaré positif au contrôle et de ne pas avoir utilisé le médicament M s'il est déclaré positif

Exercice 6b

Eléments de réponse

$POS = \{\text{Etre positif}\}$; $MED = \{\text{Prendre le médicament}\}$

$P(POS) = 0,02$; $P(MED) = 0,25$; $P(POS/_{MED}) = 0,05$

on demande $P(MED \cap POS)$...

Exercice 6c

Eléments de réponse

En appliquant la formule de Bayes :

$$P(POS/_{MED}) = \frac{P(POS \cap MED)}{P(MED)} \Leftrightarrow P(POS \cap MED) = 0,05 \times 0,25 = 0,0125$$

$$P(MED/_{POS}) = \frac{P(POS \cap MED)}{P(POS)} \Leftrightarrow P(MED/_{POS}) = \frac{0,0125}{0,02} = 0,625$$

$$P(M\bar{E}D/_{POS}) = 1 - P(MED/_{POS}) = 1 - 0,625 = 0,375$$

Problème 1/4

Un homme de 44 ans, né en Inde et ayant séjourné dans les Caraïbes, consulte après 3 semaines de fièvre $(38, 2C)$, de fatigue, une perte de poids. Les examens biologiques, cliniques et radiologiques furent considérés donner une forte probabilité au diagnostic de tuberculose. Pour affirmer ce diagnostic, la recherche de mycobactéries en culture est la bonne technique, mais elle demande 3 mois. Il est apparu dangereux à l'équipe d'attendre ces résultats pour commencer à traiter. L'équipe décida de traiter immédiatement le malade pour tuberculose. Elle le traita aussi pour une sarcoïdose, car c'était également une possibilité diagnostique qui ne pouvait être laissée de côté. Finalement, lorsque le résultat des cultures furent obtenus et ne montrèrent pas de mycobactéries, le diagnostic de tuberculose fut jugé invraisemblable au profit de celui de sarcoïdose qui apparut le plus plausible.

Problème 2/4

En reprenant le dossier, le malade avait eu un test d'intradermoréaction IDR négatif, présentait des granulomes non caséeux et un niveau d'ACE (angiotensin converting enzymes) normal. Or on peut estimer la fréquence de ces signes aussi bien chez les patients atteints de tuberculose miliaire que chez ceux atteints de sarcoïdose.

Résultat	Probabilité en cas de tuberculose	Probabilité en cas de sarcoïdose
Test IDR négatif	25%	95%
Granulome non caséeux	20%	100%
Taux d'ACE normal	95%	20%

On suppose que la forte présomption donnée au diagnostic de tuberculose se traduit par une probabilité a priori de 70% pour ce diagnostic (contre 30% pour le diagnostic de sarcoïdose). Que devient la probabilité du diagnostic de tuberculose en tenant compte des résultats des 3 examens biologiques négatifs (on supposera qu'ils sont indépendants) ?

Problème 3/4

Réponse :

Soit A l'événement : {le malade a la tuberculose}, $P(A) = 0,70$.

L'événement $\bar{A}$ est : {le malade a la sarcoïdose}, $P(\bar{A}) = 0,30$.

L'événement B est : {le malade a les 3 examens négatifs},

$P(B) = 0,25 \times 0,20 \times 0,95 = 0,0475$

L'événement B est : {le malade a les 3 examens négatifs}

On cherche $P(A/_B)$, c'est-dire la probabilité que le malade ait la tuberculose sachant qu'il a les 3 examens négatifs.

D'après l'énoncé, nous savons que $P(B/_A) = 0,25 \times 0,20 \times 0,95 = 0,0475$.

De même, nous savons que $P(B/_{\bar{A}}) = 0,95 \times 1 \times 0,20 = 0,19$

Problème 4/4

Réponse (suite) :
Le théorème de Bayes appliqué à ce problème donne :

$$P(A/_B) = \frac{P(B/_A)P(A)}{P(B/_A)P(A) + P(B/_{\bar{A}})P(\bar{A})}$$

Ce qui donne en remplaçant par les valeurs :

$$P(A/_B) = \frac{0,0475 \times 0,70}{0,0475 \times 0,70 + 0,19 \times 0,30} = 0,37$$

De fait : $P(\bar{A}/_B) = 1 - 0,37 = 0,63$
Ainsi, avant même les résultats des cultures, on pouvait dire que le diagnostic de tuberculose était moins vraisemblable que le diagnostic de sarcoïdose.

Sources, Crédits

- Couty F, Debord J, Fredon D. Probabilités et statistiques. Paris : Dunod éditions, 1999. 208 p.
- Golmard JL, Mallet A, Morice V. Biostatistique PCEM1. 2009-2010. Université Paris VI.
- Valleron AJ. Probabilités et statistiques PCEM1. Paris : 2ème édition, Editions Masson, 2008. 230 p.

Mentions légales

- L'ensemble de ce document relève des législations française et internationale sur le droit d'auteur et la propriété intellectuelle.
- Tous les droits de reproduction de tout ou partie sont réservés pour les textes ainsi que pour l'ensemble des documents iconographiques, photographiques, vidéos et sonores.
- Ce document est interdit à la vente ou à la location par un tiers autre que l'Université de Côted'Azur.
- La diffusion, la duplication, la mise à disposition du public (sous quelque forme ou support que ce soit), la mise en réseau, de tout ou partie de ce document, sont strictement réservées à l'Université Côte d'Azur.
- L'utilisation de ce document est strictement réservée à l'usage privé des étudiants inscrits aux cours et au tutorat organisés par l'UFR de Médecine de l'Université Côte d'Azur, et non destinée à toute autre utilisation privée ou collective, gratuite ou payante.