COURS N°4 : VARIABLES ALEATOIRES, LOIS DE PROBABILITE DISCRETE ET CONTINUE

P Staccini

Plan du cours

- Définition d'une variable aléatoire
- Variables aléatoires discrètes
  - Loi de probabilité
  - Représentation
  - Moyenne
  - Fonction
  - Espérance
  - Variance
  - Variable centrée réduite
  - Fonction de répartition
- Lois de probabilité discrète
  - Loi de Bernoulli
  - Loi binomiale
  - Loi de Poisson
  - Loi géométrique
  - Loi hypergéométrique
- Variable aléatoire continue
  - Densité de probabilité
  - Fonction de répartition
- Lois de probabilité continue
  - Loi exponentielle
  - Loi uniforme
  - Loi normale
- Approximations

Introduction

- Nous avons vu (dans le premier cours) que nous pouvions caractériser les objets (réels et virtuels) par un ensemble de propriétés (caractéristiques) qui pouvaient être soit de nature quantitative (métrique ou numérique), soit de nature qualitative.
- Nous avons vu (dans le second et le troisième cours) que nous pouvions théoriser pour estimer la présence (la survenue) de tel ou tel événement (caractéristique) concernant un objet (probabilités élémentaires et probabilités composées)

Introduction

- L'un des enjeux et ses conséquences que nous avions énoncé lors du cours sur les probabilités était que :
  - Les observations pratiquées sur notre monde ne concerne pas un seul individu, mais une population d'individus
  - Nous ne pouvions dans la plupart des cas observer tous les individus de la population et que nous devions travailler sur un échantillon
  - Il nous faut donc résoudre deux aspects méthodologiques :
    - Les caractéristiques varient d'un individu à l'autre, mais dans quelle mesure ?
    - Les caractéristiques varient d'un échantillon à l'autre, mais dans quelle mesure ?

Variable aléatoire

Définition 1/5

- Considérons les exemples suivants :
  - On tire au sort une pièce d'usinage dans l'ensemble des pièces produites par une usine et on mesure ses dimensions
  - On tire au sort une gélule de médicament produite par une chaîne de fabrication et on mesure la quantité de principe actif contenu à l'intérieur
  - On tire au sort un homme adulte dans une ville et on note son âge en années
  - On lance un dé et on lit le chiffre obtenu sur la face
  - On tire au sort une carte dans un jeu de 52 cartes

Définition 2/5

- Dans tous ces exemples, on décrit une opération précise qui mène à un résultat aléatoire (c'est-à-dire qui est le résultat du hasard)
- Même dans les deux premiers exemples (pièce d'usinage ou gélule)on peut penser que :
  - la pièce a été réalisée en respectant un cahier des charges et donc que ses dimensions sont parfaitement déterminées et « non aléatoires » ;
  - ou bien que la quantité de principe actif a été bien dosée.
- En fait il n'en est rien et l'on montre que, même dans ces exemples, les conditions de fabrication sont telles que des petites sources de variation existent qui font que le résultat des mesures peut être considéré comme aléatoire.
    - Pour ceux qui feront du contrôle de production plus tard, on distinguera dans ce type de problème des causes aléatoires (que l'on ne peut pas corriger ou en tous les cas dont la correction coût plus que le bénéfice escompté en retour) ou des causes assignables de variation (que l'on peut corriger)

Définition 3/5

- L'opération concernée par chacun de ces exemples est appelée une **épreuve** et ses résultats aléatoires les **événements élémentaires.**
- On parle de **variable aléatoire** lorsque le résultat aléatoire est un **nombre** (ce n'est pas le cas de l'opération « tirer une carte au hasard… »)
- **Définition** : *Une variable aléatoire est une épreuve menant à des événements élémentaires qui sont des nombres*

Définition 4/5

- Lorsque le résultat d'une expérience où intervient le hasard est **à valeurs dans un ensemble fini** ou au plus dénombrable (c'est-à-dire si on peut énumérer tous ses éléments sous la forme d'une séquence finie ou infinie), on parle de **variable aléatoire discrète.**
- Lorsque le résultat d'une expérience où intervient le hasard est à **valeurs dans R ou un intervalle de R**, on parle de **variables à densité**, ou **absolument continues.**

Définition 5/5

Une **variable aléatoire** X, sur un ensemble fondamental Ω, est une **application de Ω dans** $\mathbb{R}$: à tout résultat possible de l'expérience (c'est-à-dire à tout élément de Ω), la variable aléatoire X fait correspondre un nombre.
Lorsque Ω est fini ou infini dénombrable, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire. Lorsque Ω est non dénombrable, il existe certaines applications de Ω dans $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des variables aléatoires. En effet, la définition rigoureuse d'une variable aléatoire X impose que tout intervalle de $\mathbb{R}$ soit l'image d'un événement de Ω par l'application X. Cette condition est vérifiée pour toute application X si Ω est fini ou dénombrable, puisque toute partie de Ω est un événement. Ce n'est plus vrai si Ω est non dénombrable. Heureusement, les applications choisies naturellement sont des variables aléatoires.
On parle de **variable aléatoire discrète** lorsque la variable est une application de Ω dans un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$, le plus souvent $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$. On parle sinon de **variable aléatoire continue**.

Variable aléatoire discrète

Loi de probabilité discrète

Soit X une variable aléatoire discrète sur un ensemble fondamental Ω à valeurs finies : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Par exemple la variable aléatoire A : âge en années d'un sujet tiré au sort. Les valeurs possibles sont : $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_{120} = 120$, en supposant que l'âge maximum qu'un homme puisse atteindre soit 120 ans (ce qui est contredit par des observations récentes obtenues chez des ultracentenaires).

$X(\Omega)$ devient un ensemble probabilisé si l'on définit la probabilité $P(X = x_i)$ pour chaque x_i, que l'on note p_i.

Définition : loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X discrète est définie en donnant l'ensemble des valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ correspondant aux probabilités de ses différentes éventualités $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, c'est-à-dire : $(\forall i)\ p_i = P(X = x_i)$

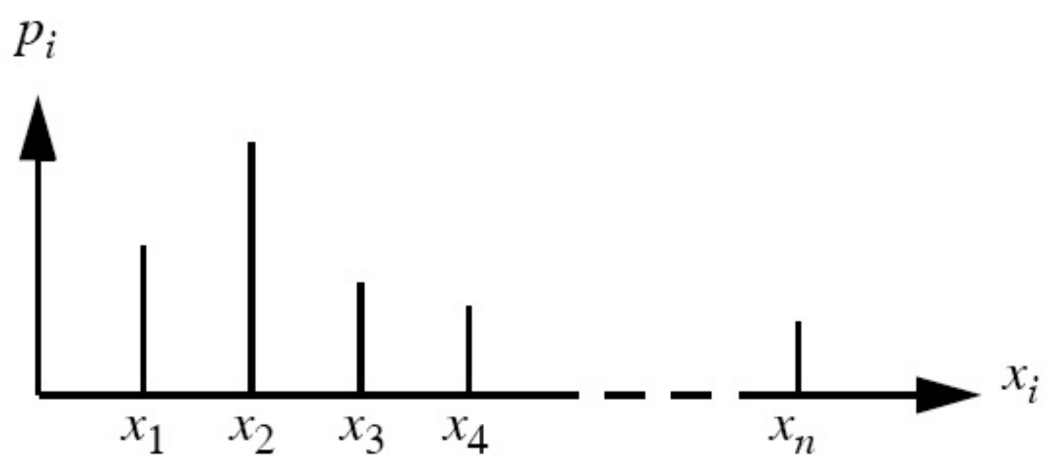
On a donc : $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Représentation

On peut représenter la loi de probabilité de $X(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des p_i sur les événements $\{X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n, \ldots\}$, par une table

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Ou par un diagramme en bâtons :



où la hauteur du bâton positionné en x_i a pour valeur p_i.

Moyenne

A chaque fois qu'on réalise une *variable aléatoire (v-a)* (rappel : épreuve conduisant à des événements élémentaires qui sont des nombres) on obtient aléatoirement un nouveau nombre. Supposons que l'on note à chaque fois le résultat et que l'on répète de très nombreuses fois l'opération (indéfiniment). On peut faire la moyenne des résultats obtenus : tant de fois la valeur x_1, tant de fois la valeur x_2, etc. A terme, et par définition de la loi du probabilité d'une v-a, on obtient chaque nombre x_i dans une proportion p_i des cas.

Définition : moyenne d'une v-a
La moyenne μ de la v-a X est la valeur moyenne des résultats que l'on obtiendrait en répétant indéfiniment l'épreuve.

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i$$

Fonction d'une v-a

Soit X une v-a définie sur un espace fondamental.

Soit g une fonction mathématique quelconque :
$g(x) = sin(x)$; $g(x) = 1/x$; $g(x) = x^2$; etc.

Lorsqu'on pose $Y = g(X)$, on définit une nouvelle v-a Y fonction de X telle que $(\forall i)\ y_i = g(x_i)$.
A chaque réalisation x_i de X de probabilité p_i correspond une réalisation $y_i = g(x_i)$ de Y de même probabilité p_i.

La moyenne de Y est : $\mu_y = \sum y_i p_i = \sum g(x_i) p_i$

Attention :
la moyenne de X^2 n'est pas μ^2 et la moyenne de $1/X$ n'est pas $1/\mu$

Espérance 1/2

Il s'agit là de vocabulaire. Cette expression est en effet couramment utilisée en calcul des probabilités et en statistiques comme un synonyme de la moyenne.

L'espérance mathématique d'une v-a X est notée $E(X)$. $E(X)$ se lit donc indifféremment : espérance mathématique de X ou moyenne de X.

L'espérance mathématique (ou moyenne) cherche à traduire la tendance centrale de la v-a. C'est un indicateur de position sur la distribution de probabilité de X. Les résultats de X valent "en moyenne" μ, ou encore X "tombe" autour de μ.

Dans le calcul de la moyenne, chacune des valeurs x_i intervient d'autant plus que sa probabilité de survenue est importante. On peut prendre comme image le calcul des coordonnées du barycentre d'une série de points sur une droite ou du centre de gravité d'un volume.

Espérance 2/2

Théorèmes

1. Soit X une v-a et k une constante réelle ($k \in \mathbb{R}$). On a :
$E(kX) = kE(X)$
$E(X + k) = E(X) + k$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace fondamental. On a :
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
Cette expression de généralise à n variables aléatoires X_i définies sur un même espace fondamental : l'espérance de la somme est la somme des espérances.

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Variance et écart-type

La **variance** est un *indicateur de dispersion* qui caractérise à quel point les réalisations successives de X sont plus ou moins éloignées de μ.
La variance σ^2 de X est la moyenne des carrés des écarts entre X et sa valeur moyenne μ.

L'écart-type σ de la distribution est la racine carrée de la variance.

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Si a est une constante, on montre que :

$$Var(X+a) = Var(X) \qquad \text{et} \qquad Var(aX) = a^2 Var(X)$$

Variable centrée réduite

Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2.
On définit la variable :

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

La variable Y est appelée **variable centrée réduite.**

On montre que :

$$\mathbf{E(Y) = 0} \qquad \text{en effet :} \qquad E(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}(E(X) - \mu) = 0$$

$$\mathbf{Var(Y) = 1} \qquad \text{en effet :} \qquad Var(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X) = 1$$

Fonction de répartition 1/2

Si X est une variable aléatoire, on définit sa **fonction de répartition** $F(x)$ par

$$F(x) = Pr(X \leq x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si X est une variable aléatoire discrète on a :

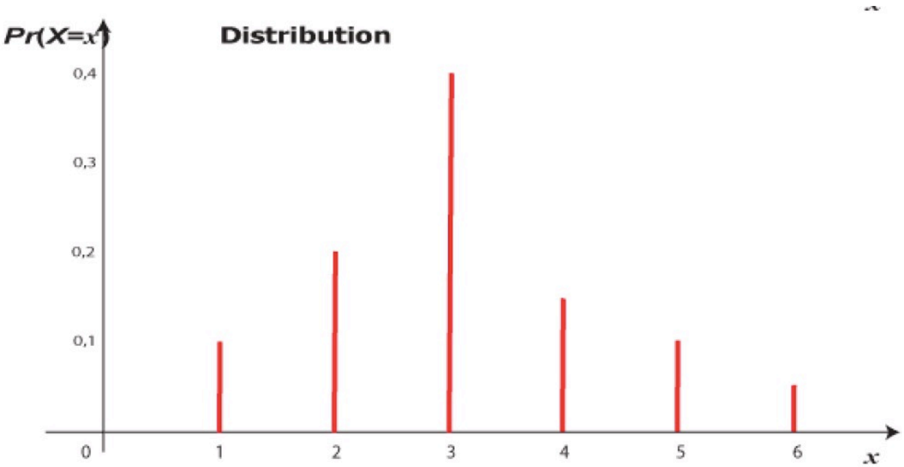
$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

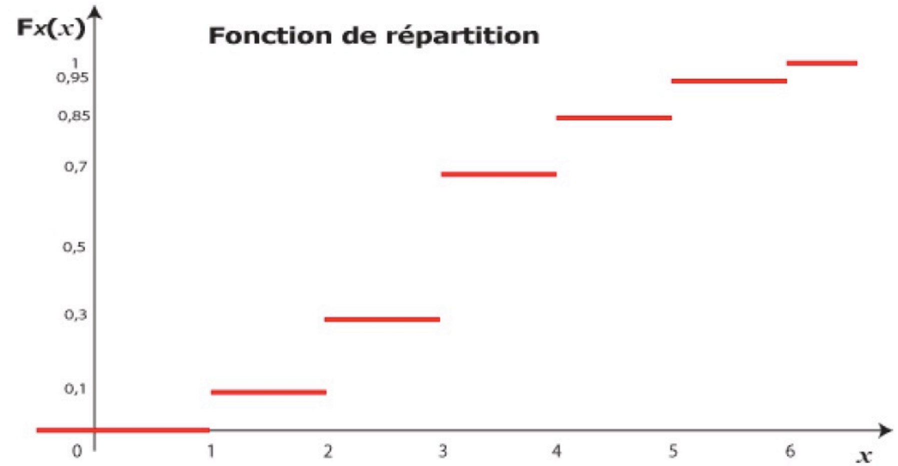
On parle de fonction cumulative car on somme tous les p_i des x_i survenus AVANT x.

Dans tous les cas, $F(x)$ est une fonction monotone croissante, c'est-à-dire si $a \geq b$ alors $F(a) \geq F(b)$. De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Fonction de répartition 2/2





Cet exemple montre la distribution de probabilités (diagramme en bâtons) d'une variable aléatoire finie (discrète) et la fonction de répartition correspondante. La fonction de répartition est une fonction en escalier. Les discontinuités se produisent pour les valeurs *x possédant des probabilités non nulles. Pour chacune de ces valeurs* de *x, la hauteur d'une discontinuité est la probabilité de X=x.*

Lois de probabilité discrète

Loi de Bernoulli

Schéma : Une épreuve de Bernouilli est une expérience aléatoire dont l'issue se traduit soit par un "succès", soit par un "échec".

Paramètres :

- p : probabilité d'un succès
- $q = (1 - p)$: probabilité d'un échec
- X : v-a "nombre de succès" lors d'une épreuve

Loi de probabilité : X suit une loi de Bernouilli de paramètre p, on note $\mathfrak{B}(p)$

$$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k} = p^k q^{1-k} \qquad \text{pour} \qquad k \in \{0, 1\}$$

Moyenne et variance :

- $\mu = p$
- $\sigma^2 = p(1-p) = pq$

Loi binomiale 1/2

Schéma : Epreuves répétées de Bernouilli, cad un processus qui consiste en n essais **indépendants** d'une même expérience aléatoire dont l'issue se traduit soit par un "succès", soit par un "échec".

Paramètres :

- n : nombre d'essais indépendants
- p : probabilité d'un succès
- $q = (1 - p)$: probabilité d'un échec
- X : v-a "nombre de succès" à l'issue des n essais

Loi de probabilité : X suit une loi binomiale de paramètres n et p, on note $\mathfrak{B}(n; p)$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq k \leq n$$

Moyenne et variance :

- $\mu = np$
- $\sigma^2 = np(1-p) = npq$

Loi binomiale 2/2

On démontre que la somme de 2 v-a binomiales de même paramètre p et indépendantes est une v-a binomiale.
Si $X_1 \sim \mathfrak{B}(n_1; p)$ et si $X_2 \sim \mathfrak{B}(n_2; p)$ alors $X_1 + X_2 \sim \mathfrak{B}(n_1 + n_2; p)$

Ce résultat peut être généralisé pour la somme d'un nombre fini de v-a binomiales indépendantes et de même paramètre p.
Ainsi pour la maîtrise statistique des procédés, la proportion de pièces défectueuses dans un échantillon ou la fréquence de pièces non conformes dans l'échantillon est dérivée de cette propriété.

Loi binomiale : exercice 1/3

Une société produit des prises, des connecteurs et autres dérivés pour la connexion de réseaux informatiques. Pour chaque type de produit, un contrôle qualitatif sur différents types de défaut est effectué. Ces défauts n'ont pas de poids respectif, ils sont donc de la même importance (ie équiprobabilité de survenue d'un défaut). Pour un type de connecteur donné, le processus de production fournit $1,5\%$ de connecteurs non conformes. On prélève au hasard un échantillon de 100 connecteurs. Soit X la variable aléatoire du nombre de connecteurs non conformes. Calculez la probabilité que le nombre de connecteurs non conformes dans l'échantillon soit strictement inférieur à 3.

Loi binomiale : exercice 2/3

Il faut d'abord **déterminer la loi de distribution de probabilités de la variable aléatoire X.**
En supposant que la quantité de pièces produites (N) est très grande devant la taille de l'échantillon (n) on peut estimer que X suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(n; p)$ avec $n = 100$ et $p = 0,015$.
En effet, étant donné que nous sommes dans un tirage au sort SANS remise, lorsqu'on va tirer la première pièce, la probabilité de non conformité est bien $p = 0,015$. Mais lorsqu'on va tirer la seconde pièce, la probabilité n'est plus sur le nombre total de pièces, mais $N - 1$. Et ainsi de suite.
On comprend aisément que si la taille de l'échantillon est très importante par rapport à la population totale, on ne pourra plus parler d'équiprobabilité.

Loi binomiale : exercice 3/3

On demande $P(X < 3)$ dans le cadre d'une loi binomiale $\mathfrak{B}(100; 0,015)$.

L'événement $(X < 3) = (X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2)$.

Autrement dit, puisque tous ces événements sont incompatibles, la probabilité de leur union et la somme de leur probabilité respective. Ce qui donne

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X < 3) = \sum_{k=0}^{k=2} C_{100}^{k} \times 0,015^{k} \times 0,085^{100-k}$$

Loi binomiale et équiprobabilité

La loi binomiale repose sur le fait que le tirage au sort se fait de manière non exhaustive, c'est-à-dire que les éléments sélectionnés sont remis dans la population, de telle sorte que p reste constant, tirage après tirage. Toutefois, en pratique, le tirage est plutôt de nature exhaustive, c'est-à-dire que les éléments sélectionnés ne sont pas remis dans la population.

On considère tout de même que l'application de la loi binomiale reste valable si le rapport entre la taille de l'échantillon n et la taille de la population N est inférieur ou égal à une valeur seuil : $\frac{n}{N} \leq 0,10$. $\frac{n}{N}$ est appelé taux de sondage. Si ce n'est pas le cas, on a recours à une autre loi de distribution de probabilités (loi hypergéométrique) pour modéliser le phénomène.

Loi binomiale : propriétés

- La forme du diagramme de probabilités d'une distribution normale est symétrique si $p = 0,50$, et ce $\forall n$.
- Si $p \neq 0,50$, alors asymétrie positive pour $p \geq 0,50$ et asymétrie négative pour $p \leq 0,50$.
- La forme devient symétrique quand n est grand.
- Si n est grand et si p n'est pas trop proche de 0 ou de 1, alors la loi binomiale tend vers la loi normale (cf. suite du cours).

Loi de Poisson 1/2

Schéma : Modélisation de phénomènes aléatoires où les événements se réalisent sur la base d'une unité de temps, de volume, de surface, etc.

Utilisation : La loi de Poisson est couramment utilisée dans les domaines de la qualité, de la fiabilité et de la sécurité pour modéliser le nombre de défauts par unité, les arrivées de pannes ou d'autres événements non souhaités.

Loi de probabilité : X suit une loi de Poisson de paramètre λ, on note $\mathfrak{P}(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad \lambda>0 \qquad k\in\mathbb{N} \qquad e=2,71828...$$

Moyenne et variance :

- $\mu=\sigma^2=\lambda$
- cette propriété mathématique est exploitée comme indicateur du caractère poissonien d'une variable discrète.

Loi de Poisson 2/2

On pourrait interpréter le paramètre λ comme le taux moyen avec lequel un événement particulier apparaît.

La somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes est une variable aléatoire de Poisson :

$$\text{si} \quad X_1 \sim \mathfrak{P}(\lambda_1) \quad \text{et} \quad X_2 \sim \mathfrak{P}(\lambda_2) \quad \text{alors} \quad X_1 + X_2 \sim \mathfrak{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Ce résultat peut être généralisé pour un nombre fini de variables de Poisson indépendantes.

Loi de Poisson : exercice 1/2

Enoncé : Le nombre de consultants d'un service d'urgence, hospitalisés le matin en semaine, est en moyenne de 2 par heure.
Quelle est la probabilité d'hospitaliser 0, 1 ou 2 patients au cours d'une heure ?
Quelle est la probabilité de n'hospitaliser aucun patient en 4 heures ?

Loi de Poisson : exercice 2/2

Réponse : La loi de probabilité de la variable aléatoire X du nombre de patients hospitalisés par heure est une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$. Il vient donc que

$$P(X = k) = \frac{2^k e^{-2}}{k!}$$

On demande cette probabilité pour $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$. Il suffit de remplacer les valeurs de k dans cette formule pour trouver : $P(X = 0) = 0,135$, $P(X = 1) = 0,271$ et $P(X = 2) = 0,271$.

Concernant la seconde question, on peut dire que nous avons 4 variables aléatoires indépendantes X_i avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$: nombre de patients hospitalisés durant la première, seconde, troisième et quatrième heure. La nouvelle variable aléatoire $Y = \sum X_i$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \sum \lambda_i = 8$.
La probabilité de n'hospitaliser aucun patient pendant 4 heures est donc donnée par la formule :

$$P(X = 0) = \frac{8^0 e^{-8}}{0!} = 0,335.10^{-3}$$

Loi géométrique 1/2

Schéma : Epreuves répétées de Bernouilli

Paramètres :

- p : probabilité d'un succès
- $q = (1-p)$: probabilité d'un échec
- X : v-a "nombre d'essais nécessaires jusqu'à la réalisation du premier succès"

Loi de probabilité : $X \sim \mathfrak{G}(p)$

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1} \qquad \text{pour} \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

Moyenne et variance :

- $\mu = 1/p$
- $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

Utilisation : étude de l'efficacité d'une carte de contrôle dans un dispositif de surveillance d'un processus de production

Loi géométrique 2/2

Exemple : Un procédé de production fournit 1% de pièces non-conformes. On prélève et on contrôle une à une des pièces jusqu'à l'obtention d'une pièce non-conforme. Quelle est la loi de probabilité ? Calculer la probabilité que 5 essais soient nécessaires jusqu'à l'obtention d'une pièce non-conforme ? Calculer le nombre moyen d'essais nécessaires pour l'obtention d'une pièce non conforme.
Réponse :

- Loi de probabilité : $X \sim \mathfrak{G}(0,01)$: $P(X=k) = 0,01 \times 0,99^{k-1}$
- En remplaçant k par 5 dans l'égalité : $P(X=5) = 0,01 \times 0,99^4 = 0,0096$
- Le nombre moyen est $\mu = 1/p = 1/0,01 = 100$

Loi hypergéométrique 1/3

Schéma : Soit une population de N individus parmi lesquels D ont un caractère donné. On prélève un échantillon de taille n, sans remise, soit au fur et à mesure, soit d'un seul coup.

Paramètres :

- X la variable aléatoire du nombre d'individus de l'échantillon possédant la propriété envisagée.

Loi de probabilité : $X \sim \mathfrak{H}(N; D; n)$

$$P(X = k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \qquad \text{avec} \qquad min(0; n - D) \leq k \leq max(n; D)$$

Moyenne et variance :

- $\mu = \frac{nD}{N}$
- $\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$

Utilisation : conception de plans d'échantillonnage pour le contrôle de réception

Loi hypergéométrique 2/3

Exemple : Considérons un lot de 100 articles parmi lesquels 97 sont conformes aux exigences et acceptables. Si 7 articles sont prélevés au hasard dans le lot, quelle est la probabilité de trouver au moins un article non conforme dans l'échantillon ?

Loi de probabilité : $X \sim \mathfrak{H}(100; 3; 7)$

$$P(X = k) = \frac{C_3^k \times C_{97}^{7-k}}{C_{100}^7}$$

On demande $P(X \geq 1)$. Il suffit de se souvenir que $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$. Il faut donc calculer $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \frac{C_3^0 \times C_{97}^7}{C_{100}^7} = 0,8025$$

Au final $P(X \geq 1) = 1 - 0,8025 = 0,1975$

Loi hypergéométrique 3/3

Attention : Dans la présentation du problème on a : N effectif de la population, n la taille de l'échantillon et D le nombre d'individus présentant une caractéristique donnée. Le rapport $D/N = p$ exprime aussi la probabilité au sein de la population d'avoir la caractéristique donnée. $q = (1 - p)$ exprime la probabilité de ne pas avoir la caractéristique. Ce qui revient à dire, pour la moyenne et la variance que :

- **Moyenne** : $\mu = \frac{nD}{N} = np$
- **Variance** : $\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1} = (\frac{N-n}{N-1})np(1-p) = (\frac{N-n}{N-1})npq$

Loi hypergéométrique et loi binomiale sont donc proches. Elles ont la même espérance (np), mais pas la même variance. En voyant l'expression de la variance, on comprend mieux les conditions d'approximation : si n est petit devant N, le rapport $\frac{N-n}{N-1}$ est proche de 1.

Variables aléatoires continues

Densité de probabilité 1/3

Rappel : une variable aléatoire X dont l'image $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire continue.

Ce qui caractérise une variable continue, c'est qu'elle a une probabilité nulle d'être égale à n'importe quel nombre donné. Par exemple, la probabilité qu'un homme tiré au sort dans la population pèse $66,666\ldots6\ldots kg$ est nulle. La probabilité pour qu'il pèse exactement $99,999\ldots9\ldots kg$ est nulle également.

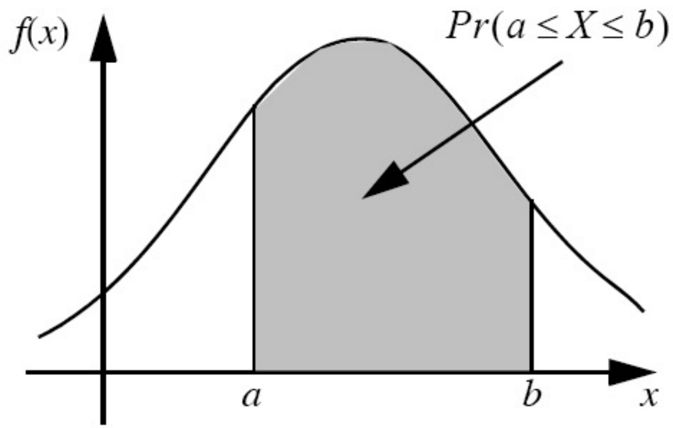
C'est pourquoi la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue ne peut pas être définie en listant les probabilités de toutes les éventualités, puisqu'elles sont toutes nulles.

En revanche, on sait parler de probabilité pour qu'une variable aléatoire X prenne une valeur comprise entre deux valeurs a et b. On notera cette probabilité $P(a \leq X \leq b)$ ou $P(X \in [a, b])$.

Densité de probabilité 2/3

Définition : densité de probabilité :
Soit X une variable aléatoire continue prenant des valeurs comprises entre a et b (a et b étant éventuellement infinis). On définit la loi de probabilité de X, ou distribution de X, à l'aide de la fonction $f(x)$ appelée **densité de probabilité** de X telle que

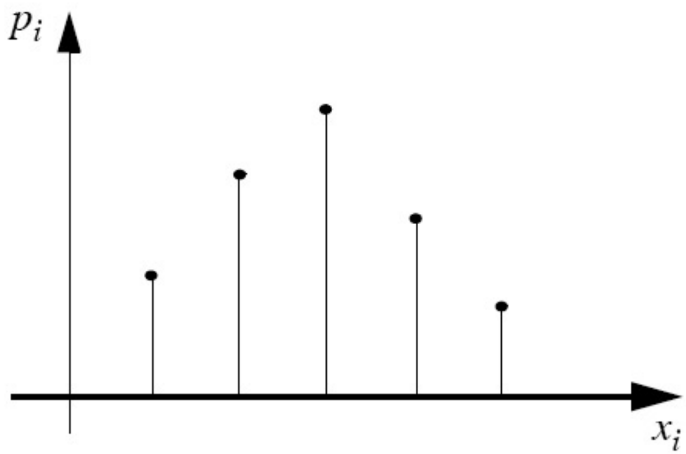
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



Si f est donnée, la probabilité $P(a \leq X \leq b)$ est la surface sous la courbe entre a et b.

Densité de probabilité 3/3

Le passage du discret au continu transforme les sommes $\sum$ en $\int$ et p_i en $f(x)dx$. Ainsi, soit X une variable aléatoire discrète et p_i sa distribution.



La formule

$$P(x_k \leq X \leq x_n) = \sum_{i=k}^{i=n} p_i$$

est analogue à

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Propriétés

En utilisant cette analogie, on admettra les définitions suivantes pour une variable aléatoire X, continue, de distribution $f(x)$:

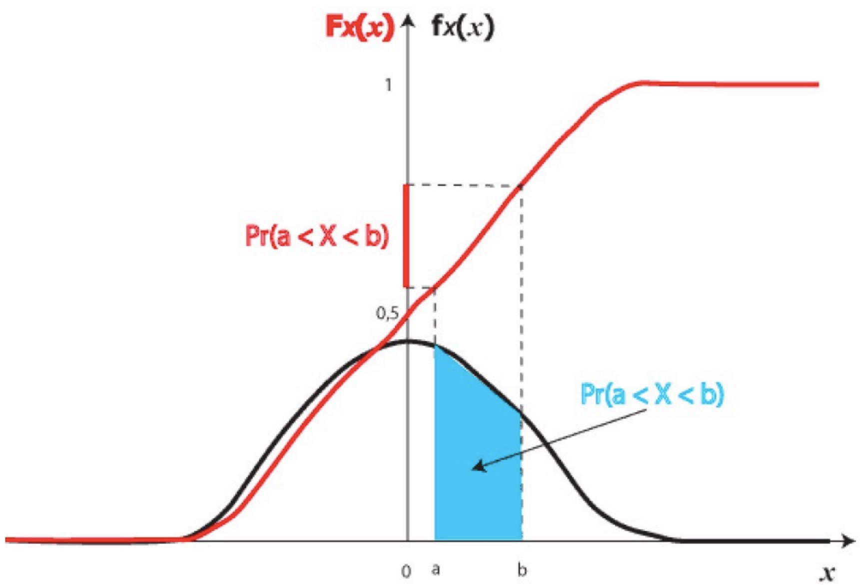
- $f(x) \geq 0$ (analogue à $p_i \geq 0$)
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ (analogue à $\sum_i p_i = 1$)
- $\mu = E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$ (analogue à $\sum_i x_i p_i$)
- $\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f(x)dx$ (analogue à $\sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$)
- $\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - \mu^2$ (analogue à $\sum_i x^2 p_i - \mu^2$)

Fonction de répartition 1/2

Les propriétés de la fonction de répartition sont conservées :

- fonction monotone croissante (mais plus par paliers...),
- partant de 0 pour $x \to -\infty$
- et atteignant 1 pour $x \to +\infty$
- $F(X) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (analogue à $\sum\limits_{x_i \leq x_n} p_i$)
- $P(a \leq X \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$

Fonction de répartition 2/2



- Cet exemple montre la densité de probabilité et la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire continue.
- La probabilité de l'intervalle [a b] est la surface sous la courbe de densité limitée par cet intervalle.
- C'est aussi la différence des hauteurs F(b)-F(a) si on utilise la fonction de répartition. Contrairement au cas des variables discrètes, la fonction de répartition est ici continue.
- Pour résumer l'analogie entre le cas discret et le cas continu, un point du domaine discret correspond à un intervalle dans le cas continu, la somme discrète correspond à l'intégrale.

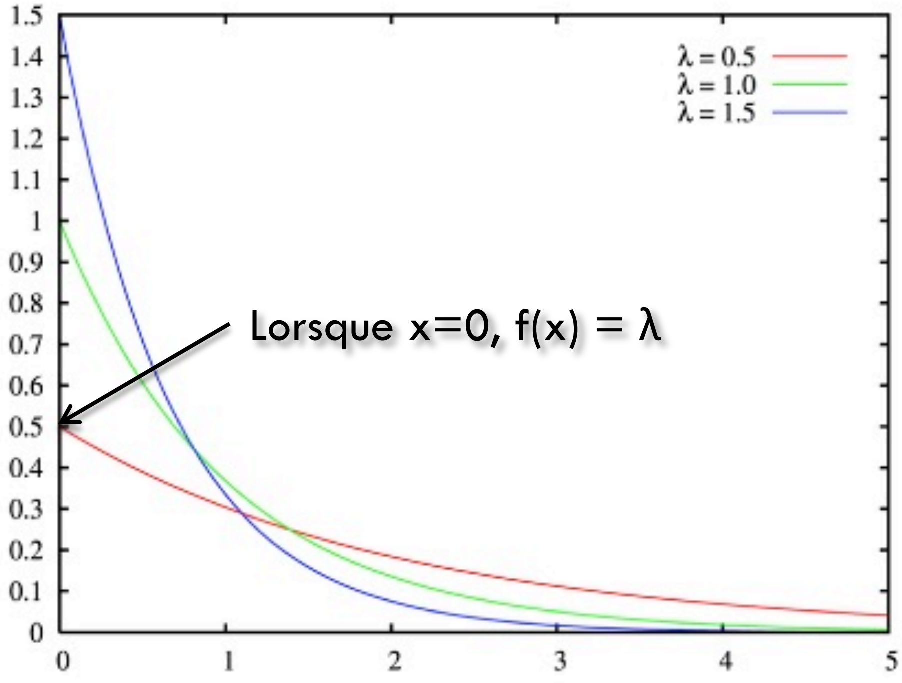
Lois de probabilité continue

Loi exponentielle 1/2

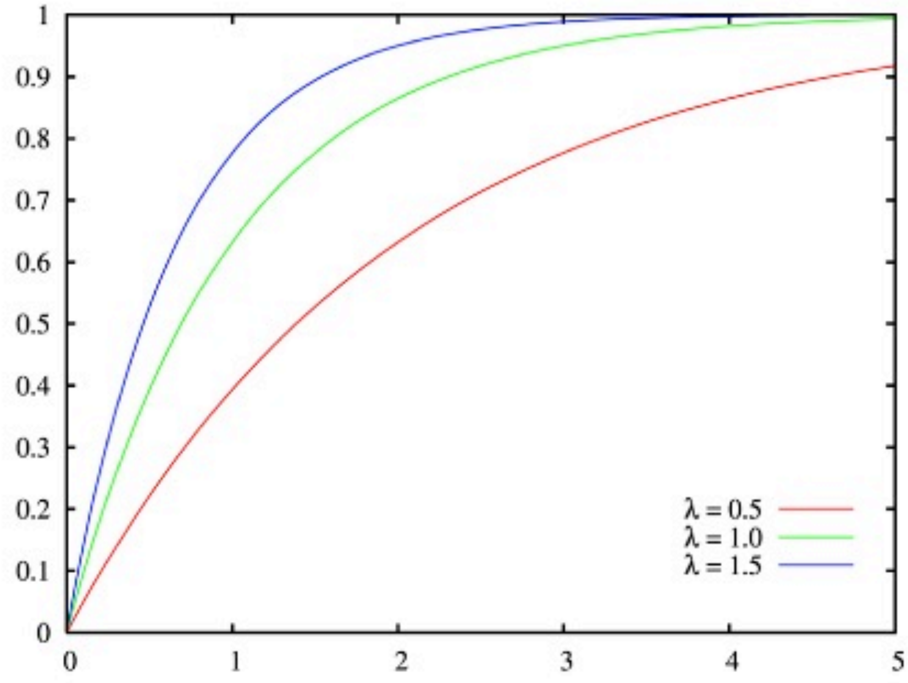
- **Fonction de densité** : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$ et $x \geq 0$
- **Paramètres** : $\lambda =$ taux de défaillance instantané
- **Espérance** : $\mu = 1/\lambda$
- **Variance** : $\sigma^2 = 1/\lambda^2$
- **Fonction de répartition** : $F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$
- **Utilisation** : décrire un processus de mortalité dans lequel le "risque instantané" (ou taux de défaillance) de décès est constant (durée de vie de composants ou d'équipements)
- **Lien avec la loi de Poisson** : on démontre en effet que si un événement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ, le temps entre deux réalisations consécutives de l'événement considéré est distribué selon une loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$

Loi exponentielle 2/2

Densité de probabilités (f):



Fonction de répartition (F):



Loi uniforme 1/2

- **Fonction de densité :**

  $f(x) = 1/(b-a)$ si $x \in [a,b]$ et $f(x) = 0$ si $x \notin [a,b]$ avec $\lambda > 0$ et $x \geq 0$

- **Paramètres :** intervalle $[a,b] \in \mathbb{R}$

- **Espérance :** $\mu = (a+b)/2$

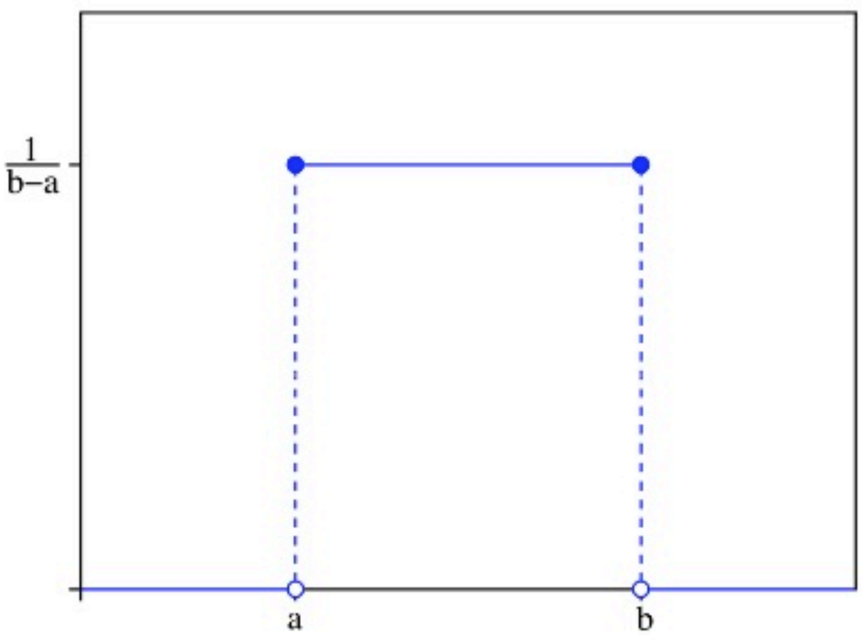
- **Variance :** $\sigma^2 = (b-a)^2/12$

- **Utilisation :** La face du dé est un exemple de loi "uniforme", c'est-à-dire dont les 6 valeurs ont la même probabilité.

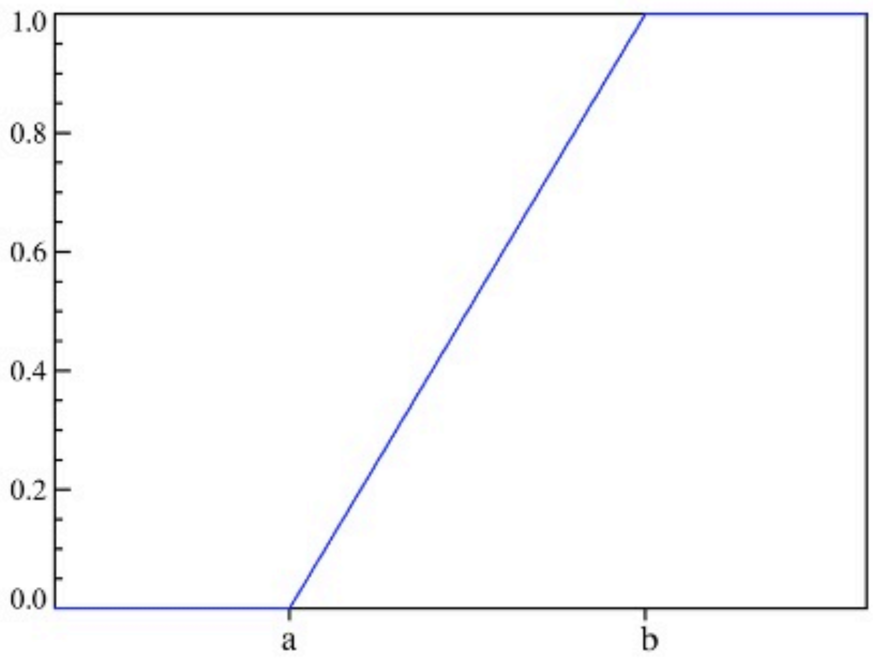
- **Exemple :** la masse (en kg) de sacs de semence de gazon fabriqués par une entreprise suit une loi uniforme de densité : $f(x) = 1/1,25$ pour $24,75 \leq x \leq 26$. la proportion de sacs contenant moins de 25kg de semence de gazon est : $P(X \leq 25) = \int_{24,75}^{25} \frac{1}{1,25} dx = \frac{25-24,75}{1,25} = 0,20$

Loi uniforme 2/2

Densité de probabilités (f):



Fonction de répartition (F):



Loi normale 1/3

- **Fonction de densité** : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

  Elle est définie pour $-\infty \leq x \leq +\infty$

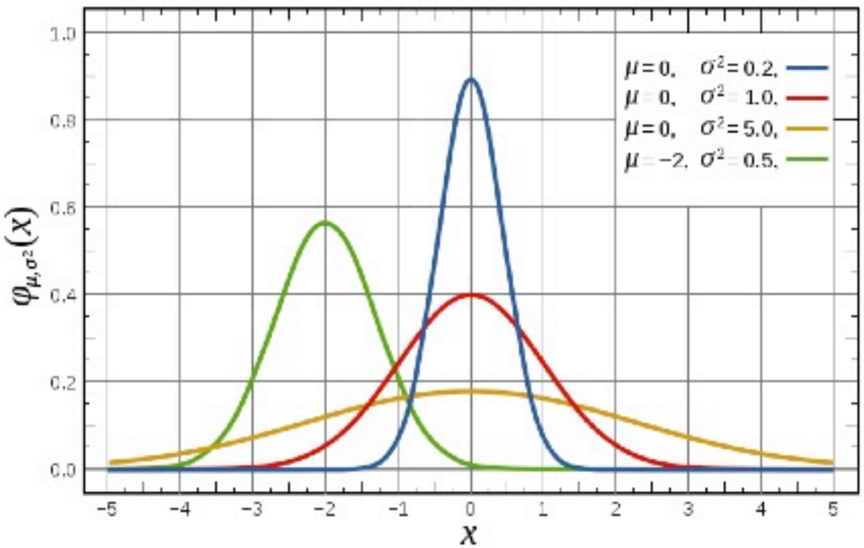
  La densité de probabilité d'une v-a normale de moyenne μ et d'écart-type σ est symétrique autour de μ et a deux points d'inflexion aux abscisses $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$

- **Paramètres** : μ et σ, respectivement moyenne et écart-type de X

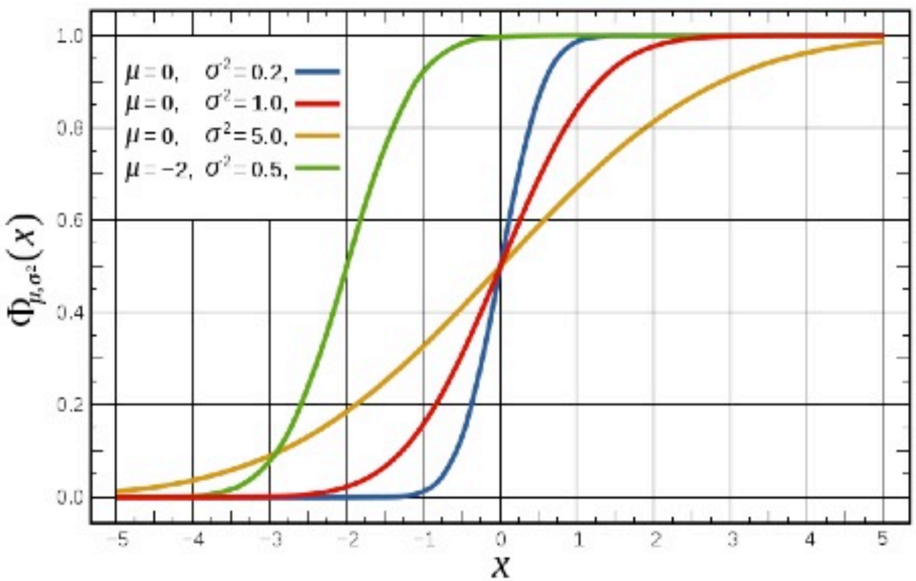
- **Utilisation** : La loi normale sert tout le temps. Par exemple, les bilans biologiques effectués dans les laboratoires d'analyses médicales sont effectués grâce à des appareils de mesure qui ont une erreur de mesure qui est quantifiée grâce à la loi normale.

Loi normale 2/3

Densité de probabilités (f):



Fonction de répartition (F):



Loi normale 3/3

Valeurs limites importantes à savoir

- il y a 10 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1,65\sigma$ ou $X > \mu + 1,65\sigma$
- il y a 5 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1,96\sigma$ ou $X > \mu + 1,96\sigma$
- il y a 1 chance sur 100 pour que $X < \mu - 2,58\sigma$ ou $X > \mu + 2,58\sigma$
- il y a 1 chance sur 1000 pour que $X < \mu - 3,30\sigma$ ou $X > \mu + 3,30\sigma$

Dans la plupart des applications statistiques de la loi normale (en particulier les tests statistiques), on se servira de la seconde ligne : une variable aléatoire distribuée normalement a 5 chances sur 100 de présenter un écart à la moyenne supérieur à $1,96\sigma$ (on arrondit généralement à 2).

Loi normale centrée réduite

On appelle **loi normale centrée réduite** la loi normale de **moyenne 0** et de **variance 1**. Une variable suivant une loi normale centrée réduite est notée Z. Si X est une variable aléatoire distribuée selon une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, alors la variable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

est une variable aléatoire distribuée selon une loi normale centrée réduite.

Ce changement de variable est très utile en pratique. N'importe quel problème de probabilité concernant une distribution normale peut être ainsi ramené à un seul cas, celui de l'interprétation d'une loi normale centrée réduite.

Loi normale centrée réduite

Nous ne pouvons pas afficher l'image.

$\alpha/2 = 2{,}5\%$

$1-\alpha = 95\%$

$\alpha/2 = 2{,}5\%$

Approximations

Approximations 1/5

Approximation de la loi binominale par la loi de Poisson

La loi de Poisson sert à approximer une loi binomiale lorsque $n > 50$, $p \leq 0,10$ et $np < 5$, alors

$$\mathfrak{B}(n;p) \to \mathfrak{P}(\lambda = np)$$

Exercice : Une entreprise fabrique des moteurs tels que 95% d'entre eux doivent pouvoir fonctionner à une température de 125°C. Un contrôle est effectué sur un échantillon de 50 moteurs sur un lot de 1800 moteurs, en les plaçant dans un four à 125°C. On s'intéresse au nombre de moteurs qui ne fonctionnent plus au cours des essais.

Approximations 2/5

Réponse
La loi de probabilité de la variable aléatoire
$X = \{$nombre de moteurs arrêtés au cours des essais$\}$
est une loi binomiale $\mathfrak{B}(50; 0,05)$.
On vérifie au passage que le rapport :

$$\frac{n}{N} = \frac{50}{1800} = 0,0278 < 0,10$$

et donc que l'on peut appliquer ce modèle de distribution de probabilité à la variable aléatoire X, ce qui donne l'expression suivante :

$$P(X = k) = C_{50}^{k} \times 0,05^{k} \times 0,95^{50-k}$$

La simplification du problème (calcul des dénombrements) passe par l'utilisation d'une loi de Poisson $\mathfrak{P}(2,5)$ (en effet $\lambda = 50 \times 0,05 = 2,5$). Les conditions d'approximation sont vérifiées : $n = 50$, $np = 2,5 < 5$ et $p = 0,05 \leq 0,10$.
Si on fait le calcul pour $P(X \leq 2)$, on trouve 0,5438 avec le développement binomial et 0,5405 avec l'approximation de Poisson.

Approximation 3/5

Approximation de la loi binominale par la loi normale

La loi normale sert à approximer une loi binomiale lorsque $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, alors :

$$\mathfrak{B}(n;p) \to \mathfrak{N}(np; \sqrt{npq})$$

Exercice : La SNCF d'Ile de France, dans son projet de reconquête des voyageurs affirme que 95% de ses trains arriveront à l'heure sur l'ensemble du réseau (1300k= et 5000 trains par jour). Supposons qu'en fonctionnement normal l'affirmation sur ce projet ambitieux soit vraie. Un francilien, dans ses déplacements entre son domicile et son lieu de travail prend 3 de ces trains. En supposant que sur les lignes qu'il emprunte, la variable "nombre de trains arrivant en retard" suit une loi binomiale avec n=3 et p=0,05 ($X \sim \mathfrak{B}(3; 0,05)$), calculer a) la probabilité qu'aucun des trains empruntés d'arrive en retard ; b) la probabilité qu'un seul train arrive en retard...

Application 4/5

Réponse

a) probabilité qu'aucun train n'arrive en retard

$$P(X = 0) = C_3^0 \times 0,05^0 \times 0,95^3 = 0,8573$$

b) probabilité qu'un seul train arrive en retard

$$P(X = 1) = C_3^1 \times 0,05^1 \times 0,95^2 = 0,1354$$

Suite énoncé : pour l'ensemble du réseau, lors d'une journée de fonctionnement normal, le nombre de trains arrivant à l'heure peut également être modélisé par une loi binomiale de paramètres $n = 5000$ et $p = 0,95$. Quelle est la probabilité qu'au moins 4700 trains, parmi les 5000 circulant quotidiennement, arrivent à l'heure ?

Approximation 5/5

Réponse

$$\mathfrak{B}(5000; 0,95) \rightarrow \mathfrak{N}(5000 \times 0,95; \sqrt{5000 \times 0,95 \times 0,05}) = \mathfrak{N}(4750; 15,41)$$

$$P(X \geq 4700) \simeq P(\frac{4700 - 4750}{15,41}) = P(Z \geq -3,31) = P(Z \leq 3,31) = 0,99952$$

lecture de la valeur de P(Z) dans la table de la loi centrée réduite (cf. exercice de ce cours)

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Approximation 5/5

Approximation de la loi de Poisson par la loi normale

La loi normale sert à approximer une loi de Poisson lorsque $\lambda > 25$, alors :

$$\mathfrak{P}(\lambda) \rightarrow \mathfrak{N}(\lambda; \sqrt{\lambda})$$

Exercice 1

Enoncé : Une étude d'observation a permis de vérifier que le nombre de personnes arrivant à un guichet d'une usine pour s'approvisionner en pièces détachées est distribué selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda =$ (2 arrivées toutes les 5 minutes). Quel est le temps moyen écoulé entre deux arrivées consécutives ?

Réponse : Il faut se souvenir que dans ce cas, la variable aléatoire X "temps entre deux événements consécutifs" suit une loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$. Il vient donc assez logiquement que

$$E(X) = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} = 2,5\text{min}$$

entre 2 arrivées consécutives.

Exercice 2a

Enoncé : Un liquide contient 10^5 bactéries par litre réparties au hasard. On en prélève $1mm^3$. Quelle est la probabilité que ce prélèvement ne contienne aucune bactérie ?

Exercice 2b

Réponse : Pour un litre de liquide, chacune des 10^5 bactéries peut : 1) être présente dans le mm^3 prélevé, avec une probabilité $p = 10^{-6}$ car il y a $10^6 mm^3$ dans un litre et la répartition est équiprobable ; 2) être absente du mm^3 prélevé avec une probabilité $q = 1 - p$.
Soit X le nombre de bactéries présentes dans le mm^3 prélevé. X suit la loi binomiale $\mathfrak{B}(10^5; 10^{-6})$. Comme $n = 10^5$ et $p = 10^{-6}$, nous sommes dans le cas où nous pouvons approximer la loi binomiale par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 0,1$
On demande $P(X = 0)$

- **Loi binomiale** : $= (1 - 10^{-6})^{10^5} \simeq 0{,}904\ 837\ 463$
- **Loi de Poisson** : $\simeq e^{-0,1} \simeq 0{,}904\ 837\ 418$

Exercice 3a

Exercices de lecture de la table de la fonction de répartition de $\mathfrak{N}(0,1)$

- Si X suit la loi normale $\mathfrak{N}(4;2)$, déterminer $P(X \leq 6)$
- Si X suit la loi normale $\mathfrak{N}(3;2)$, déterminer x / $P(X \leq x) = 0,4207$

Exercice 3b

Résolution

- Si X suit la loi normale $\mathfrak{N}(4;2)$, déterminer $P(X \leq 6)$
- **Réponse :**

  1) passage à la variable centrée réduite $Z = \frac{(6-4)}{2} = 1$

  2) puis lecture dans la table de la valeur de $P(Z \leq 1) = 0,8413$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Exercice 3c

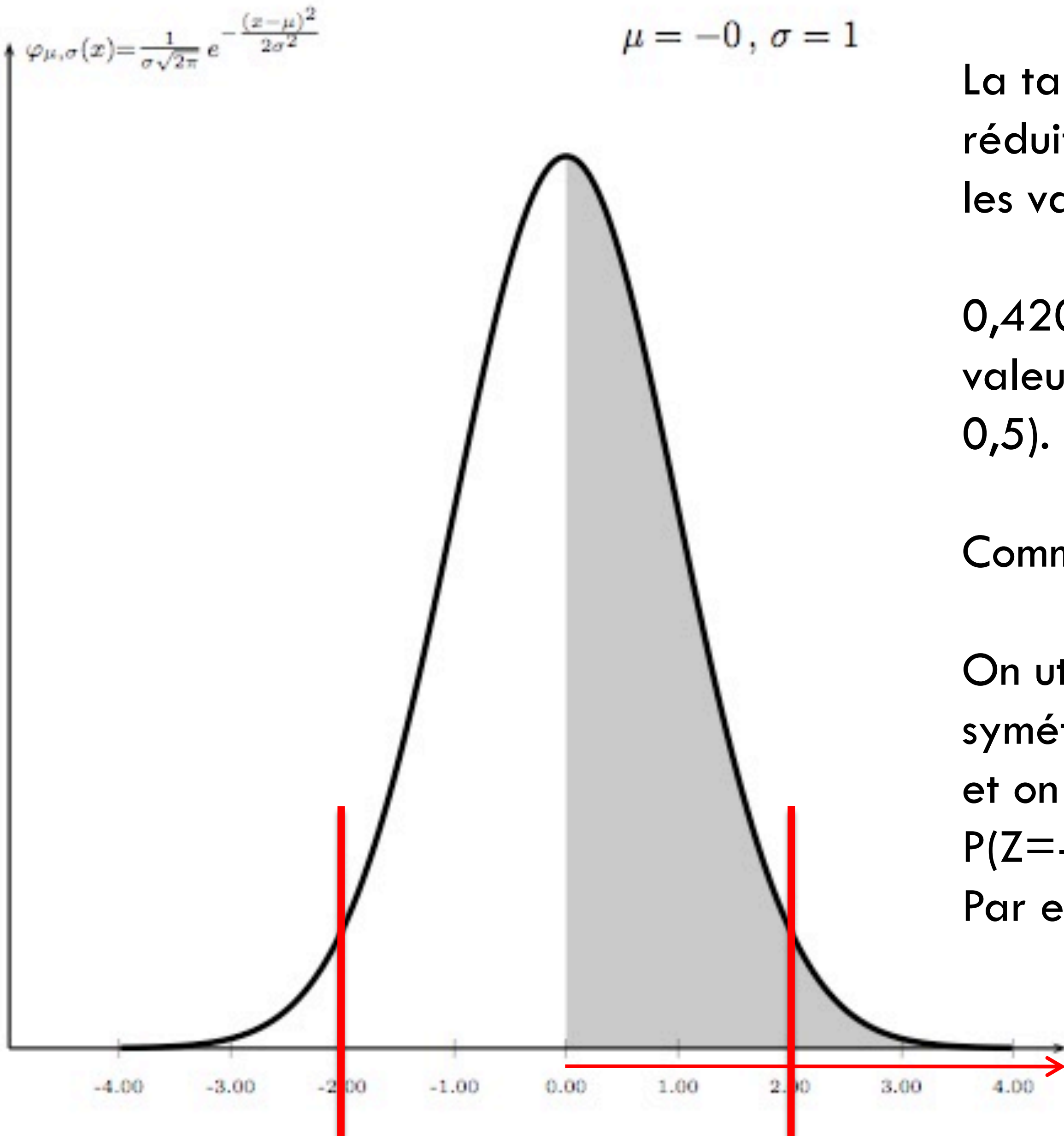
Résolution

- Si X suit la loi normale $\mathfrak{N}(3;2)$, déterminer x / $P(X \leq x) = 0,4207$
- **Réponse** :

  1) lecture dans la table de la valeur de z / $P(Z \leq z) = 0,4207$: $z =???$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	[illegible]	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Où se trouve 0,4207 ?



La table de la loi normale centrée réduite utilisée pour ce cours donne les valeurs de P(X≤x) pour x≥0.

0,4207 correspond donc à une valeur < 0 (puisque pour P(X≤0) = 0,5).

Comment faire ?

On utilise les propriétés de la symétrie de la distribution normale et on constate facilement que
P(Z=-z) = 1-P(Z=z)
Par exemple : P(-2) = 1 – P(2)

Exercice 3d

Résolution

- Si X suit la loi normale $\mathfrak{N}(3;2)$, déterminer x / $P(X \leq x) = 0,4207$
- **Réponse :**

  1) lecture dans la table de la valeur de z / $P(Z \leq z) = 0,4207$: $z = ???$

  Partant de cette propriété liée à la symétrie de la distribution, il vient que nous allons d'abord déterminer la valeur de z qui correspond à $1 - 0,4207 = 0,5793$. On trouve $z = 2$.

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Exercice 3e

Résolution

- Si X suit la loi normale $\mathfrak{N}(3;2)$, déterminer x / $P(X \leq x) = 0,4207$
- **Réponse** :

  1) lecture dans la table de la valeur de z / $P(Z \leq z) = 0,4207$: $z =???$

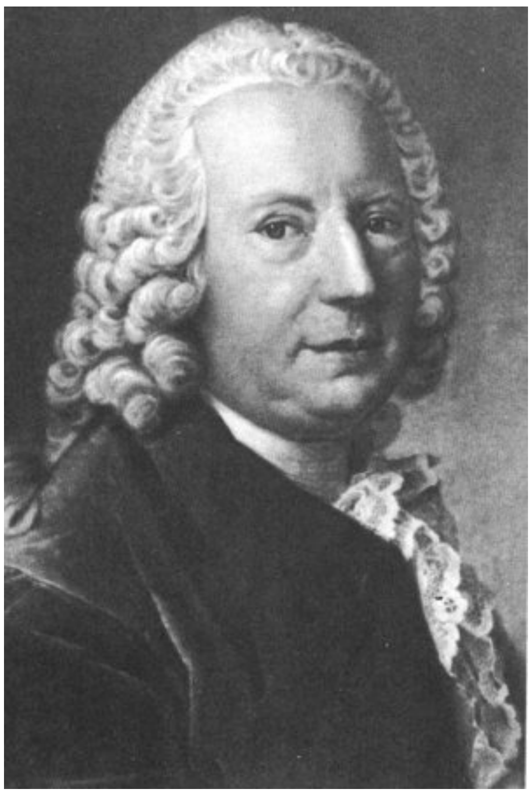
  Partant de cette propriété de la symétrie de la distribution, il vient que nous allons d'abord déterminer la valeur de z qui correspond à $1 - 0,4207 = 0,5793$. On trouve $z = 0,2$.

  On en déduit que la valeur de z / $P(Z \leq z) = 0,4207$ est $z = -0,2$.

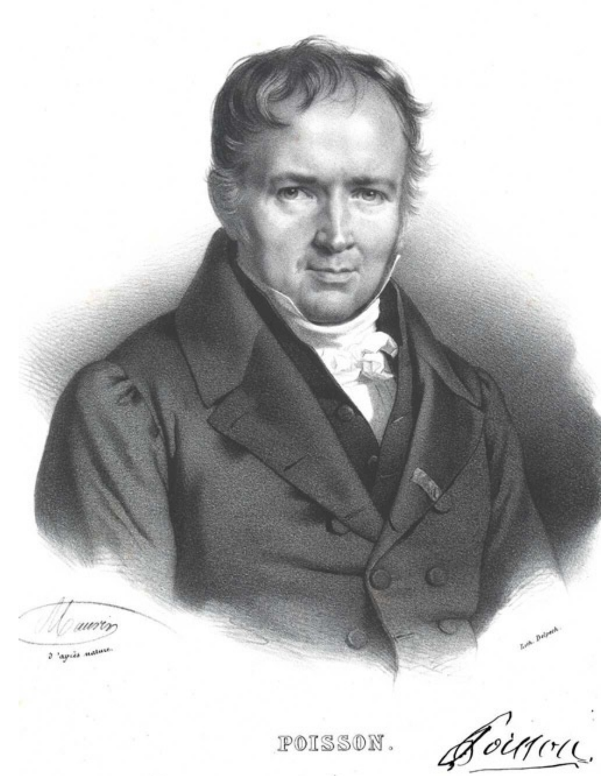
  2) Il faut ensuite revenir à la loi normale $\mathfrak{N}(3;2)$.

  On a trouvé que $\frac{X-3}{2} = -0,2$. Il vient que la valeur x est $x = 2,6$

Portraits



Le mathématicien et physicien suisse
Jacques (ou Jakob) Bernoulli



Le mathématicien, géomètre et physicien
français Siméon Denis Poisson

Portraits

L'astronome, mathématicien et physicien
allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Sources, Crédits

- Couty F, Debord J, Fredon D. Probabilités et statistiques. Paris : Dunod éditions, 1999. 208 p.
- Golmard JL, Mallet A, Morice V. Biostatistique PCEM1. 2009-2010. Université Paris VI.
- Moreau D. Graphiques des lois usuelles de probabilités. 2010. http://www.cnam.fr/math/IMG/pdf/Cours5_Graphiques_Lois_usuelles.pdf
- Valleron AJ. Probabilités et statistiques PCEM1. Paris : 2ème édition, Editions Masson, 2008. 230 p.

Mentions légales

- L'ensemble de ce document relève des législations française et internationale sur le droit d'auteur et la propriété intellectuelle.
- Tous les droits de reproduction de tout ou partie sont réservés pour les textes ainsi que pour l'ensemble des documents iconographiques, photographiques, vidéos et sonores.
- Ce document est interdit à la vente ou à la location par un tiers autre que l'Université de Nice-Sophia Antipolis.
- La diffusion, la duplication, la mise à disposition du public (sous quelque forme ou support que ce soit), la mise en réseau, de tout ou partie de ce document, sont strictement réservées à l'Université de Nice-Sophia Antipolis.
- L'utilisation de ce document est strictement réservée à l'usage privé des étudiants inscrits aux cours et au tutorat organisés par l'UFR de Médecine de l'Université de Nice-Sophia Antipolis, et non destinée à toute autre utilisation privée ou collective, gratuite ou payante.