SDA

Équations différentielles

GENERALITES

<u>ED</u> = équation dont les inconnues représentent des fonctions

- Solutions d'ED = le **flot**
- Différents types d'ED :

ED1 : inconnues = dérivée première fonction + fonction

ED2 : inconnues = dérivée seconde fonction + dérivée première + fonction

ED1

- 2 types :

  Sans second membre

  Avec second membre

ED1 SANS SECOND MEMBRE

- Forme : $y' + ay = 0$
- Ensemble des solutions : $y_c(x) = Ce^{ax}$

RÉSOLUTION ED1 SANS SECOND MEMBRE

<u>Exemple</u> : *résolution* $\mathbf{2y' + 4y = 0}$

1) On transforme sous la forme $\boldsymbol{y' = -ay}$
2) On trouve notre a
3) On remplace dans la formule de l'ensemble des solutions a

$$Ce^{-2x}$$

ED1 AVEC SECOND MEMBRE

- Forme : $\boldsymbol{y' + ay = b}$
- Ensemble des solutions : $\boldsymbol{y_c(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}}$

RÉSOLUTION ED1 AVEC SECOND MEMBRE

Exemple : résolution $\boldsymbol{2y' + 4y = 6}$

1) On transforme sous la forme $\boldsymbol{y' = -ay + b}$
2) On trouve a et b
3) On remplace dans la formule de l'ensemble des solutions a

$$Ce^{-2x} + 3/2$$

ED2

- Toujours homogène en P1
- 3 possibilités

Δ positif

Δ nul

Δ négatif

ED2

- Forme : $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$
- Polynôme caractéristique associé : $\boldsymbol{aX^2 + bX + c}$
- Déterminant : $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$

RÉSOLUTION ED2
Δ POSITIF

<u>Exemple</u> : résolution $\boldsymbol{2y'' + 4y' + y = 0}$

1) On trouve le polynôme associé
2) On résout l'équation du second degré par calcul du Δ
3) On calcule les solutions réelles $\boldsymbol{r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$
4) On donne l'ensemble des solutions sous la forme : $\boldsymbol{y_{c1c2} = C_1 e^{r1x} + C_2 e^{r2x}}$

On prendra $\sqrt{8} = 3$

$$C_1 e^{-1/4x} + C_2 e^{-7/4x}$$

RÉSOLUTION ED2 Δ NUL

Exemple : résolution $\boldsymbol{2y'' + 4y' + 2y = 0}$

1) On trouve le polynôme associé
2) On résout l'équation du second degré par calcul du Δ
3) On calcule la solution réelle $\boldsymbol{r = \frac{-b}{2a}}$
4) On donne l'ensemble des solutions sous la forme : $\boldsymbol{y_{c1c2} = (C_1 x + C_2)e^{rx}}$

$$(C_1 x + C_2) e^{-x}$$

RÉSOLUTION ED2 Δ NÉGATIF

Exemple : *résolution* $\boldsymbol{2y'' + 4y' + 6y = 0}$

1) On trouve le polynôme associé
2) On résout l'équation du second degré par calcul du Δ
3) On calcule les solutions conjuguées $\boldsymbol{r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta} i}{2a}}$
4) On donne l'ensemble des solutions sous la forme : $\boldsymbol{y_{c1c2} = (C_1 sin(wx) + C_2 cos(wx)) e^{rx}}$

On prendra $\sqrt{32} = 6$

$$(C_1 \sin 3/2x + C_2 \cos 3/2x)e^{-x}$$

QRU 1 : L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' + 2y = 0$, INDIQUER LA PROPOSITION EXACTE :

A) Il s'agit d'une équation du premier ordre avec second membre

B) La solution est e^{-2x}

C) Une des solutions est e^{-2x}

D) Toute solution s'écrit $\frac{b}{a} + Ce^{-ax}$, avec C une constante quelconque

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QRU 1 : C

A) Faux : On se retrouve sous la forme $y' + ay = 0$, donc c'est une ED1 sans second membre

B) Faux : Une des solution est e^{-2x}, mais si on prenait $C = 2$ on aurait comme solution $2e^{-2x}$.

C) Vrai : On met l'équation sous la forme $y' = ay$ donc ici on a $y' = -2y$, toutes les solutions sont Ce^{-2x}, une des solutions peut-être e^{-2x} avec $C = 1$

D) Faux : Ce type de solution s'applique aux ED1 avec second membre

E) Faux

QRU 2 : ON CONSIDÈRE L'ED $2y'' + 4y' + 2y = 0$, INDIQUER LA PROPOSITION EXACTE :

A) L'ED a pour solution : $x(t) = e^{-t}(At + B)$

B) L'ED a pour solution :

C) L'ED a pour solution : $x(t) = e^{2t}(At + B)$

D) L'ED a pour solution :

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QRU 2 : A

A) Vrai : $2y" + 4y' + 2y = 0$ est une ED2 sans second membre. On remplace les y par la variable r, on a donc y'' → r², y' → r et y → 1
On obtient donc : $2r^2 + 4r + 2 = 0$. On calcule le déterminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 * 2 * 2 = 0$
On calcule r = $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{4} = -1$
Donc l'ensemble des solutions est sous la forme : $x(t) = e^{rt}(At + B)$ donc ici $x(t) = e^{-t}(At + B)$ où A et B sont des constances quelconques.

B) Faux

C) Faux

D) Faux

E) Faux

QRU 3 : ON CONSIDÈRE L'ED $21y' + 7y = 14$, INDIQUER LA PROPOSITION FAUSSE :

A) Il s'agit d'une ED2 avec second membre

B) La solution particulière est $Ce^{-x/3}$

C) L'ensemble des solutions est $Ce^{-x/3}+2$

D) On ne cherche pas de solutions complexes conjuguées

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QRU 3 : ON CONSIDÈRE L'ED $21y' + 7y = 14$, INDIQUER LA PROPOSITION FAUSSE : B

A) Faux

B) La solution particulière est $Ce^{-x/3}$ → solution homogène, 2 est la solution particulière

C) Faux

D) Faux

E) Faux