

ALGEBRE LINEAIRE : MATRICES

Salut les boss ! Petit cours un peu compliqué sur les matrices. Bossez bien la première partie avec les calculs et les définitions de base. Enjoy !!!!! Code couleur : Bordeau = exemple ; Bleu = compléments d'info ; Vert = remarque/rappel

1. Pourquoi modéliser en santé

Modéliser permet de reproduire informatiquement une situation dans le but de tester des scénarios, des configurations.

Dans le contexte de Big Data (données massives) c'est-à-dire de données de différentes natures, hétérogènes ... il est possible de les structurer dans des grands tableaux (matrices) et d'effectuer des opérations mathématiques sur ces matrices (évolution, distances entre profils...).

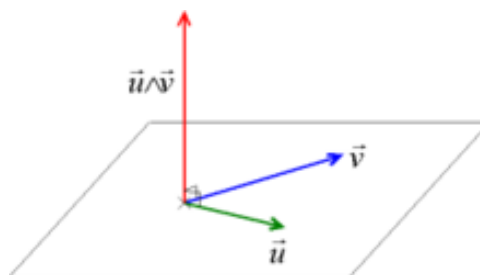
*Par exemple, estimer l'effet d'une augmentation du prix des cigarettes sur le système de santé (maladies, coût pour la société...), on est typiquement dans un **problème multifactoriel** et de Big data (il faut un grand nombre d'individus fumeurs ou non-fumeurs pour évaluer cet impact)*

Le calcul matriciel est précieux dans le domaine des **statistiques multivariées** (ACP, AFC...)

2. Définition de l'algèbre linéaire

C'est le domaine des mathématiques qui étudie les transformations linéaires et les espaces vectoriels.

Un espace vectoriel est une **structure stable** par addition de vecteurs et par multiplication par un scalaire. Autrement dit, on peut ajouter deux éléments d'un tel espace, ou les multiplier par un nombre, le résultat appartiendra encore à l'espace de départ.



Les transformations linéaires et les espaces vectoriels sont des outils pour l'analyse **multivariée de données** dans un contexte de BIG DATA.

a. Base du calcul matriciel

Une **matrice** est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes : $A(n, p)$.

C'est par exemple la donnée de n individus mesurés selon p variables ($p \geq 1$).

Cas particulier :

- Si $p=1$, on parle de matrice univariée (dit aussi matrice colonne). Ex : $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Si $p \geq 2$, on parle de matrice multivariée. Ex : $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$
- Si $n=p$, on parle de matrice carrée c'est-à-dire avec autant de lignes que de colonnes.
Ex : $C = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

IMPORTANT : Pour calculer un produit de 2 matrices A et B, il faut que le nombre de colonne de la première matrice soit égale au nombre de ligne de la deuxième matrice. Ainsi $A(n,p) * B(p, m) = C(n, m)$

Si A est la première matrice et B est la deuxième matrice, alors il faut que colonne de A = ligne de B.

Les puissances d'une matrice n'existent que pour des matrices carrées, en effet pour effectuer un produit de matrices il faut que le nombre de lignes de la deuxième matrice soit égal au nombre de colonnes de la première matrice, or dans ce cas $B=A$ et donc $n=p$.

b. Transposée, inverse et déterminant

La transposée d'une matrice revient à présenter l'information présente en colonne sous forme de ligne et inversement. Ainsi la transposée de A noté tA est une matrice à p lignes et n colonnes. Autrement dit, on s'intéresse à **p variables déclinées selon n individus**.

Ex : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ donc ${}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Remarque : la transposée d'une matrice existe **toujours**.

Lorsque l'on fait le produit de $A * {}^tA$ on obtient une **matrice carrée** d'ordre p. (Le nombre de colonne de A = nombre de ligne de tA .)

Remarque : la matrice obtenue est **symétrique par rapport à la diagonale** : $C = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 42 \\ 30 & 45 & 63 \\ 42 & 63 & 89 \end{pmatrix}$

♠ Une matrice est dite **symétrique** si sa diagonale principale (d'en haut à gauche jusqu'à en bas à droite) forme un axe de symétrie.

Pour toute matrice **symétrique** on a ${}^tA=A$: « une matrice est dite symétrique si sa **transposée est égale à elle-même** ». On a alors aussi ${}^tA - A = 0$.

♠ Une matrice est dite **antisymétrique** si ${}^tA = -A$ c'est-à-dire que sa transposée est égale à son opposée. Alors ${}^tA + A = 0$. Remarque : cela ne peut concerner que les matrices carrées mais également **uniquement** les matrices dont la diagonale est nulle.

Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 9 \\ -7 & -9 & 0 \end{pmatrix}$; alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ -2 & 0 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$. On voit bien que $A + {}^tA = 0$

Ex : Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; alors ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Cependant ${}^tB \neq$ l'inverse de B $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ donc B n'est pas antisymétrique.

♠ Une matrice est dite **diagonale** lorsqu'une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont **nuls**. Les coefficients de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls.

- **Toute puissance d'une matrice diagonale** est une **matrice diagonale** dont les **coefficients** diagonaux sont les **puissances** des coefficients diagonaux de la matrice de départ. *Exemple 1) ci-dessous*
- Dans le cas d'une **matrice diagonale inversible** : les éléments diagonaux de l'inverse sont les inverses des éléments de la matrice. *Exemple 2)*
- Toujours pour une **matrice diagonale inversible** : $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, soit : « l'inverse de la puissance est égal à la puissance de l'inverse ». *Exemple 3)*
- Toute matrice diagonale **commute** avec n'importe quelle de ses puissances, et leur inverse. *De manière plus générale, toute matrice diagonale commute avec toute autre matrice diagonale.*

Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ex 1 : $A^n = \begin{pmatrix} 8^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix}$ ex 2 : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ex 3 : $(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8^n & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix}$

♠ Une matrice est dite **nilpotente** d'ordre n lorsque $A^n=0$ et $A^{n-1} \neq 0$

C'est quoi une matrice nilpotente ? C'est une matrice dont il existe une puissance égale à la matrice nulle. Pour le prof, il faut que la puissance soit égale au nombre de ligne de la matrice.

♠ L'**inverse** d'une matrice n'existe que pour des matrices carrées sous condition que (**detA ≠ 0**). L'inverse est défini comme A^{-1} tel que $A \cdot A^{-1} = I$ où I est la matrice identité c'est-à-dire avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1 et tous les autres coefficients nuls. (Le **déterminant servira justement à calculer l'inverse.**)

Ex : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, matrice identité d'ordre 3

Remarque : la transposée d'une matrice est toujours inversible. La symétrie et l'antisymétrie ne joue pas sur l'inversibilité. On doit toujours calculer le déterminant.

♠ Le **déterminant** d'une matrice (detA) est donné par la formule suivante :

- $\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

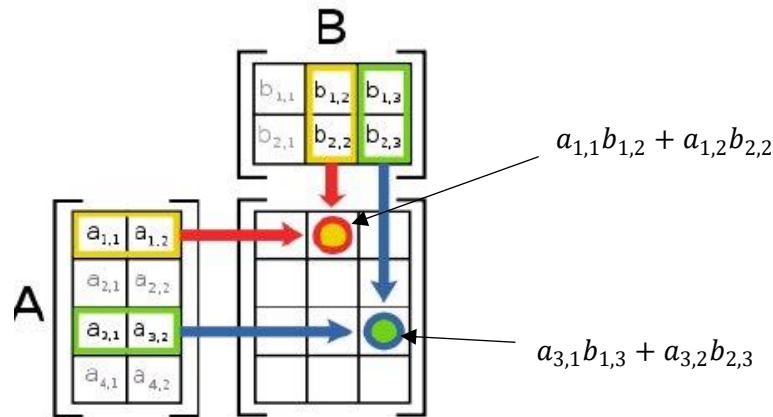
- $\text{Det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$ Formule horrible mais bon

Ex : $\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$
 $= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 10)$
 $= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-18) = -3 + 12 - 54 = -45$

- Soit $A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 :

Si $\det A \neq 0$, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} * \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

c. Calcul matriciel, produit de matrices :



Ex : Soit $A \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ deux matrices carrées d'ordre 2. On va calculer C à partir du produit de A et B. Pour ce faire, on va détailler le calcul :

$C_{1,1}$ = (coefficient de la première ligne avec coefficient de la première colonne) = $5*4+3*2 = 26$

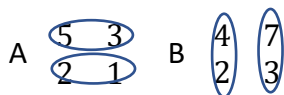
$C_{1,2}$ = (coefficient de la première ligne avec coefficient de la deuxième colonne) = $5*7+3*3 = 44$

$C_{2,1}$ = (coefficient de la deuxième ligne avec coefficient de la première colonne) = $2*4+1*2 = 10$

$C_{2,2}$ = (coefficient de la deuxième ligne avec coefficient de la deuxième colonne) = $2*7+1*3 = 17$

Cela donne alors $C \begin{pmatrix} 26 & 44 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$

Petite astuce : Pour ne pas se tromper et s’emmêler les pincesaux j’entourais les lignes et les colonnes comme ça :



♠ Généralement le produit de $A*B$ et $B*A$ n’est pas le même. Lorsque le produit est le même, on dit que les matrices **commutent**.

Pour toute matrice carrée, si A^{-1} existe, alors A^{-1} et A commutent **toujours**.

♠ On peut aussi avoir un produit de matrice qui est **nul** sans même que les matrices soient nulles.

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A*B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

♠ Une matrice est dite « **creuse** » lorsqu'elle contient beaucoup de 0. Le produit de deux matrices creuses peut donner une matrice nulle.

$$\text{Ex : } A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} * B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note **P** la **matrice de passage** de A à B telle que **APA-1=B**. On utilisera cette égalité également sous la forme **AP=BA**, ou **P=A-1BA**

3. Calcul matriciel pour les analyses multivariées (analyses factorielles) – modélisation en santé

Le terme **d'analyses factorielles** désigne un ensemble de techniques d'ajustement linéaire dont le but est de résumer l'essentiel de l'information contenue dans des gros tableaux de données. (Plusieurs dizaines, centaines d'individus observés selon un grand nombre de variables : supérieures à 100 par exemple.)

Le procédé consiste à passer d'un espace de grandes dimensions à un espace plus petit (factorisation du tableau de données) avec une perte d'information **minimale et contrôlée**.

Pour ce faire il y a deux méthodes d'analyse :

- **L'ACP** : l'analyse en composante principale
- **L'AFC** : l'analyse factorielle des correspondances

Le fonctionnement est le même pour les deux méthodes. Ici nous détaillerons que l'ACP.

a. L'ACP : intérêt et analyse de données

♠ L'ACP permet d'extraire le **maximum d'informations** sous une forme simple et cohérente à partir d'un ensemble très important de données (description synthétique).

♠ Il permet de mettre en évidence :

- Des interrelations entre les variables
- Des ressemblances ou oppositions entre individus

♠ Les résultats se présentent sous forme de combinaisons linéaires de variables différenciant les individus statistiques.

L'ACP s'applique uniquement sur des variables quantitatives qui peuvent être exprimées :

- Soit dans la même unité (le % de cas de Covid 19 dans les passages aux urgences)
- Soit dans des unités différentes (la mort infantile, le revenu par habitant ...)

♠ Le tableau de données est constitué de n individus statistiques (unités spatiales, individus ...) caractérisés par p variables quantitatives. Ce tableau de données D constitue une matrice d'informations (n,p)

- Chaque ligne = vecteur ligne décrit un individu selon p variables
- Chaque colonne = vecteur colonne décrit un indicateur selon n individus.

Rappel : on utilise l'ACP pour résumer les informations issues d'un tableau de données.

Exemple à petite échelle pour illustrer tous ces mots compliqués :

	Taille (m)	Masse (kg)	Tour de tête (cm)	IMC	Age (années)	VMA	Moyenne à l'examen du S1	...
Patient 1	1.65	46	56	16.543	18	11	13.365	...
Patient 2	1.85	90	59	26.354	19	13	12.456	...
...

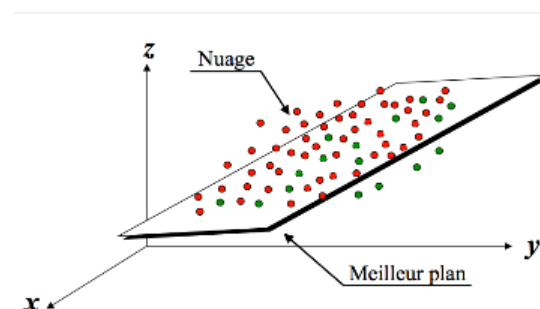
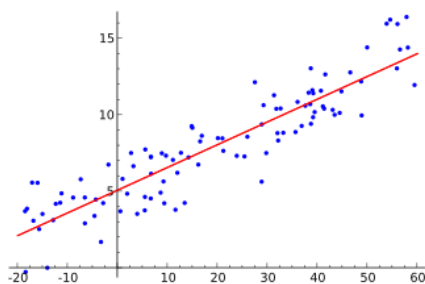
Remarque : ici on utilise des variables quantitatives d'unités différentes.

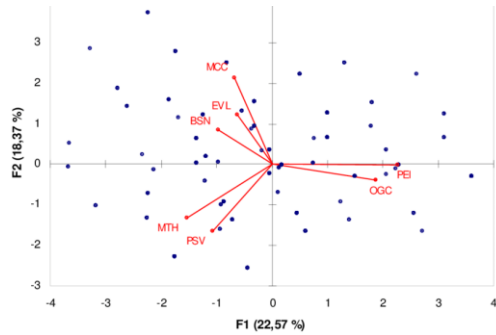
- ➔ Le but de l'ACP est de prendre l'information contenue dans ce tableau de dimension importante et la représenter sous forme simplifiée.

b. ACP : Méthode

L'ACP consiste à réduire la taille du nuage de points **multi-dimensionnels** en un nuage de points en **3-4 dimensions**.

Pour analyser les données d'une variable, il ne faut qu'une dimension : **représentation axiale** (1^{er} image). Pour analyser les données de 2 variables (masse en abscisse et âge en ordonnées par ex), il faut utiliser les **nuages de points** (2^e image). Si on veut analyser les données de 3 variables, il va falloir passer par une **représentation 3D** car sinon ça ne va pas être clair. Au-delà de 3 variables il va falloir utiliser l'ACP qui permet de condenser plusieurs variables dans les 1ers axes (3^e image).





Pour cela on fait une projection selon des axes (axes factoriels ou facteurs). Ces axes sont des combinaisons linéaires de variables.

$$F_i = A_1X_1 + A_2X_2 + \dots + A_pX_p \text{ avec la plupart des } A_i \neq 0$$

♠ Les coefficients A_i permettent de mesurer l'intensité de la relation de chaque variable avec le facteur considéré (de max à nul selon les composantes), les coefficients A_i changent d'un facteur à l'autre. **Les coefficients sont les données des matrices.**

♠ **Les facteurs (ou axes) sont hiérarchisés** : le premier contient le maximum d'informations : axe de plus grande dispersion du nuage de points. Cependant il laisse de côté des résidus, c'est le 2^{ième} axe qui prend en compte le maximum d'informations résiduelles et ainsi de suite pour les axes suivants.

Remarque : Par construction, tous les axes (facteurs) sont non corrélés, ils forment donc des angles droits deux à deux. En fait, les facteurs forment des angles aigus ou obtus lorsqu'ils sont corrélés. Un plan est formé de deux vecteurs directeurs, ou 2 axes de même origine.

c. ACP : calcul des axes factoriels

L'idée est de transformer la matrice d'information en une matrice de projection des individus statistiques sur les axes.

Une étape importante : **Centrer-réduire les données**

L'idée de centrer – réduire les données permet de **gommer les effets taille**.

- ♠ Si les données sont assez homogènes, on pratique un **simple centrage**.
 - ♠ Si les données sont assez hétérogènes, le centrer-réduire est **obligatoire** (ramène la moyenne à 0 et l'écart-type à 1).
- ➔ Cela donne un ACP normé.

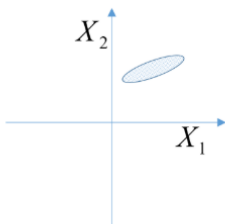
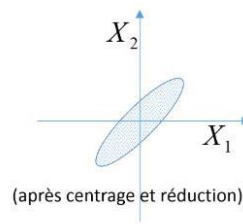


Fig. 7 ACP générale



(après centrage et réduction)

Fig. 9 ACP normée

Important : L'ACP normée consiste en :

- **Variables centrées réduites**
- **Projections orthogonales**
- **Méthode des moindres carrés**

Petit récap et compléments d'infos

♠ Les axes = facteurs sont hiérarchisés : le premier contient le maximum d'informations sur lequel le nuage se déforme le moins en projection. On cherche alors le second axe sur lequel le nuage se déforme le moins **après** le premier axe, tout étant orthogonal (perpendiculaire) au premier axe. On réitère jusqu'à l'obtention de p axes.

♠ Le meilleur axe (premier axe) est celui où la dispersion du nuage est maximale, c'est-à-dire où l'**inertie** du nuage est maximale. On va voir la notion de « matrice inertie ».

La matrice de données D (individus, variables) est une matrice à n lignes et p colonnes. On lui associe une matrice D' , la **matrice transposée de D** .

En faisant le produit de $D' * D$, on obtient une matrice carrée, symétrique d'ordre p , appelée **matrice d'inertie**, notée T .

Toute l'ACP repose sur du calcul matriciel. Les Axes sont définis par des **vecteurs propres et valeurs propres** :

♠ Un **vecteur propre** (ici V) est un vecteur tel que $T.V = \mu V$ où μ est une **valeur propre**.

Ex : Soit la matrice symétrique T suivante :

$$T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver la valeur propre μ , on résout le système :

$$T.V = \mu V \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mu & 2 \\ 2 & 1-\mu \end{pmatrix} = 0$$

(Quand on divise par V des 2 côtés de l'égalité, comme c'est du calcul matriciel on ne peut pas écrire $T = \mu$, on est obligé de garder une forme matricielle à gauche comme à droite, donc on multiplie par I , la matrice identité d'ordre 2.)

Pour trouver une solution à ce type d'équation, on cherche à ce que le déterminant de la matrice $T - \mu I$ soit égal à 0. On aura donc...

$$\text{Det}(T - \mu I) = (1 - \mu)^2 - 4 = (-1 - \mu)(3 - \mu) = 0$$

On a alors 2 possibilités : $\mu = -1$ et $\mu = 3$.

On résout alors les systèmes $T.V = -V$ et $T.V = 3V$ (le prof ne détaille que le 2nd)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * V = 3V$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1V1 + 2V2 \\ 2V1 + 1V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3V1 \\ 3V2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1V1 + 2V2 = 3V1 \\ 2V1 + 1V2 = 3V2 \end{cases}$$

$\Rightarrow V1 = V2$ donc $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ car les vecteurs sont normés.

De même, l'autre équation amène à $V3 = -V4$ et $V = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

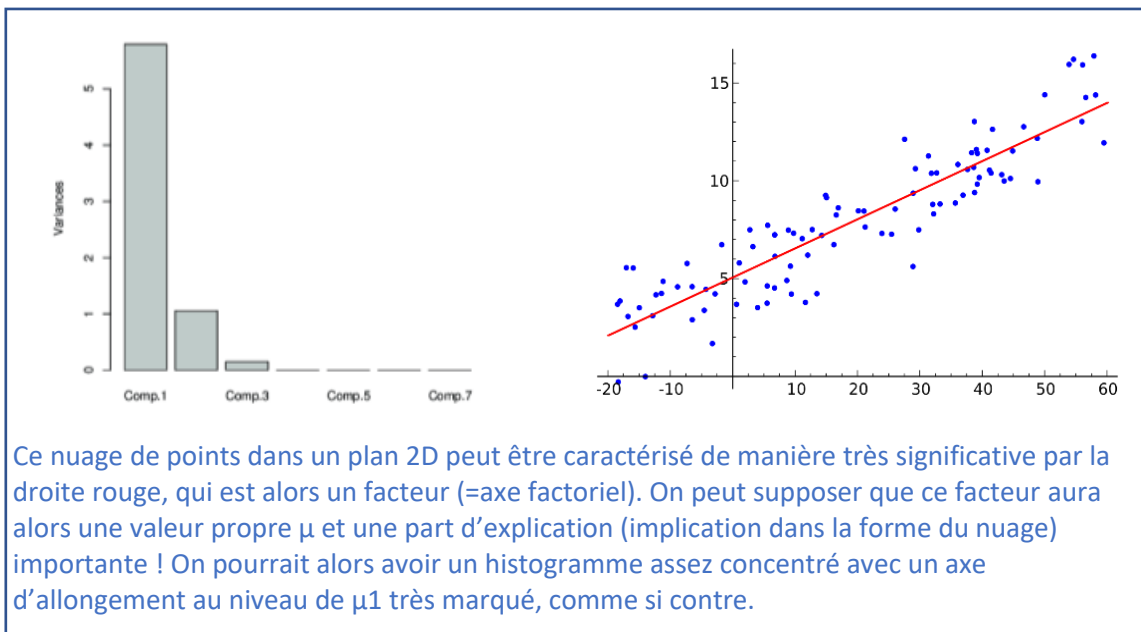
Remarquons que nos 2 vecteurs obtenus sont bien orthogonaux (leur produit scalaire est nul : les axes sont donc bien décorrélés)

d. ACP : part d'explication des axes factoriels

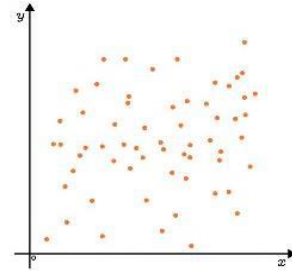
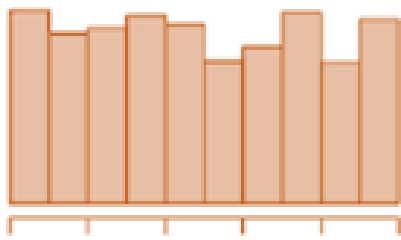
La **part d'explication** d'un axe est donné par la formule suivante : $\mu_i \% = \frac{\mu_i}{\sum \mu_i} * 100$

Dans le cas à n dimensions, deux situations peuvent se produire :

- Soit l'**histogramme des valeurs propres** est assez **concentré**, les valeurs propres sont très **différenciées** et on perçoit l'existence de deux **axes d'allongement très marqués**, on peut s'attendre alors à ce qu'il ressorte une structure de différenciation forte (profils marqués).
- Soit l'**histogramme des valeurs propres** est assez **droit**, le nuage de points est plutôt **arrondi sans axe d'allongement** véritablement marqué : on peut en déduire que les **interrelations** entre les variables sont **sans doute faibles** et qu'il ne se dégage pas de combinaisons simples de l'ensemble des données.



Ce nuage de points dans un plan 2D peut être caractérisé de manière très significative par la droite rouge, qui est alors un facteur (=axe factoriel). On peut supposer que ce facteur aura alors une valeur propre μ et une part d'explication (implication dans la forme du nuage) importante ! On pourrait alors avoir un histogramme assez concentré avec un axe d'allongement au niveau de μ_1 très marqué, comme si contre.



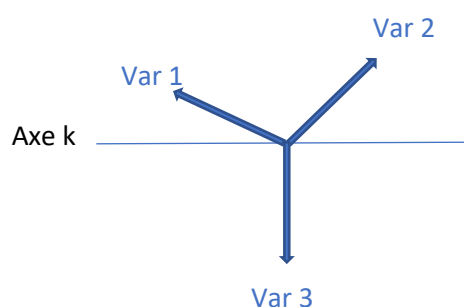
Sur ce 2^e type de nuage de points, on n'observe aucun axe d'allongement marqué, les valeurs sont dispersées. L'histogramme des valeurs propres est alors assez droit, aucune ne prend le dessus sur les autres. On peut en déduire que les interrelations entre les variables sont faibles.

e. ACP : interprétation d'une analyse factorielle

Plusieurs données doivent être analysées :

- ♣ Les **coordonnées** sur les axes factoriels : elles donnent la **position** des individus par rapport aux axes factoriels. On peut alors mettre en évidence des **oppositions entre groupe d'individus** par rapport aux combinaisons de variables définies par les axes.
- ♣ La **qualité de représentation** des individus sur les axes : deux points distincts peuvent avoir la même projection sur l'axe factoriel, mais l'un sera mieux représenté que l'autre (**angle plus petit par rapport à l'axe**).

Ex :



Les variables 1 à 3 forment des angles avec l'axe k . On voit que les var 1 et 2 forment des angles aigus avec cette axe donc il y a une qualité de représentation. La var 3 forme un angle droit avec l'axe donc la qualité de représentation sera moins bonne.

- ♣ La **contribution des individus dans la formation de l'axe** : les individus contribuent plus ou moins à déterminer la direction des différents axes d'allongement du nuage. Elle est mesurée par la **part de l'individu dans la variance**.
- ♣ La **part de l'individu dans l'inertie totale** du nuage = **INR** : elle est proportionnelle à sa distance au centre de gravité G . Elle donne une idée de la spécificité de l'individu par rapport à la moyenne.

FINITO PIPOOOOOOOOO

Bon bon bon petit cours assez compliqué étant donné qu'il faut faire pas mal de QRU pour bien comprendre et ça prend pas mal de temps en vrai.

Je vous ai sorti un dm des QCM du prof présents sur sa diapo. Alors oui c'est des QCM donc pas spécialement représentatifs mais ça permet quand même de bien s'entraîner sur certaines notions. Le prof insiste énormément sur les calculs et la première partie du cours donc taffez bien cette partie. Malheureusement on a très peu de reculs sur les QRU à l'examen étant donné que ce cours est sorti l'année dernière 😞

Place aux dédis :

Tout d'abord, dédi à votre vieille Sarah aka Fred' sur le forum qui a dû se battre l'année dernière avec ce nouveau cours et franchement elle a assuré de fou <3

Dédi à Julo, toujours, c'est toi le réel boss de l'univers et le plus sérieux des P2

Dédi à mes co-tuts on est vraiment la meilleure team <3333333

Dédi à la dynastie biostat ainsi qu'à toutes les alliances

Dédi à maman la plus importante de toutes les personnes sur terre.