SDA
Biostat matière reine <3

Base matricielle

Les matrices c'est quoi ?

Une matrice est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes : A (n, p).

Exemple : A(3,2) = matrice A avec 3 lignes et 2 colonnes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

C'est par exemple la donnée de n individus mesurés selon p variables (p≥1).

Cas particuliers

♠Si p=1, on parle de matrice **univariée** (dit aussi matrice colonne). Ex : A = $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

♠Si p≥2, on parle de matrice **multivariée**. Ex : B = $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

♠ Si n=p, on parle de **matrice carrée** c'est-à-dire avec autant de lignes que de colonnes. Ex : C = $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Calcul matriciel

IMPORTANT : Pour calculer un produit de 2 matrices A et B, il faut que le nombre de colonne de la première matrice soit égale au nombre de ligne de la deuxième matrice.

Ainsi $A(n,p)*B(p, m) = C(n, m)$

Si A est la première matrice et B est la deuxième matrice, alors il faut que colonne de A = ligne de B.

Calcul matriciel et produits de matrices

Ex : Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ deux matrices carrées d'ordre 2.
On va calculer C à partir du produit de A et B.
Pour ce faire, on va détailler le calcul :

C1.1 = (coefficient de la première ligne avec coefficient de la première colonne) = 5*4+3*2 = 26

C1.2= (coefficient de la première ligne avec coefficient de la deuxième colonne) = 5*7+3*3 = 44

C2.1= (coefficient de la deuxième ligne avec coefficient de la première colonne) = 2*4+1*2 = 10

C2.2 = (coefficient de la deuxième ligne avec coefficient de la deuxième colonne) = 2*7+1*3 = 17

Cela donne alors : $\begin{bmatrix} \mathbf{26} & \mathbf{44} \\ \mathbf{10} & \mathbf{17} \end{bmatrix}$

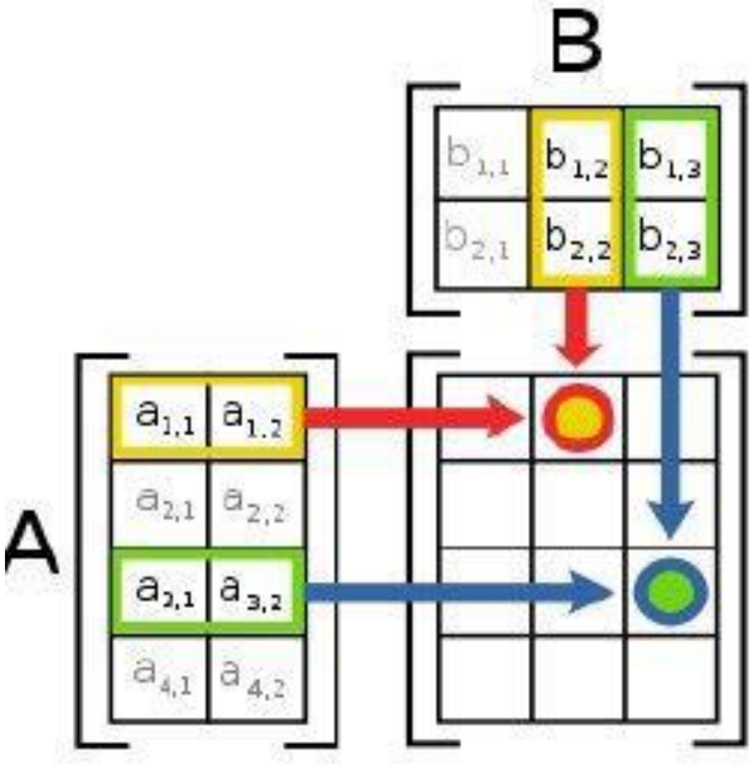
Astuce

Pour pas se tromper/s'emmêler les pinceaux j'entourais les lignes/colonnes :

$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Du coup ça fait :

$$\left.\begin{array}{l} 5*4 + 3*2 = 26 \\ 5*7 + 3*3 = 44 \\ 2*4 + 1*2 = 10 \\ 2*7 + 1*3 = 17 \end{array}\right\} \begin{bmatrix} \mathbf{26} & \mathbf{44} \\ \mathbf{10} & \mathbf{17} \end{bmatrix}$$



Super technique aussi : on met la **matrice longue à gauche** et la **matrice large en haut**

Attention

Le produit de A*B est généralement différent du produit de B*A

→Lorsque le produit est le même, on dit que les matrices **commutent**

Le produit de 2 matrices peut être nul sans que les matrices soient nulles.

Transposée d'une matrice

La transposée d'une matrice revient à présenter l'information présente en **<u>colonne sous forme de ligne et inversement</u>**. Ainsi la transposée de A noté ^tA est une matrice à p lignes et n colonnes. La transposée d'une matrice existe **<u>toujours</u>**.

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad {}^tA = 1 \quad 5 \quad 9$

Remarque : Le produit de A avec sa transposée donne une matrice carrée d'ordre p.

Symétrie et antisymétrie

Une matrice est dite **symétrique** si sa diagonale principale (d'en haut à gauche jusqu'à en bas à droite) forme un axe de symétrie.

Pour toute matrice **symétrique** on a **tA=A** : « une matrice est dite symétrique si sa **transposée est égale à elle-même** ». On a alors aussi **tA – A = 0.**

Une matrice est dite **antisymétrique** si tA = -A → **tA + A = 0**

Soit A = $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 9 \\ -7 & -9 & 0 \end{pmatrix}$ alors ${}^{t}A$ = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ -2 & 0 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ → on voit bien que A + tA = 0 → **antisymétrie**

Soit B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ alors tB= $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ → on voit bien que B + tB ≠ 0 → **pas d'antisymétrie**

Diagonale d’une matrice

Matrice dont les coefficients <u>en dehors de la diagonale principale</u> sont **nuls**.

Différents cas :

A = $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A^n = $\begin{pmatrix} 8^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix}$ 1/A = $\begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\mathbf{A\hat{}n}) - \mathbf{1}$ = $(\mathbf{A\hat{}} - \mathbf{1})\ \boldsymbol{n}$ = $\begin{pmatrix} (1/8)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix}$

Inverse d’une matrice

→N’existe que pour les matrices carrées sous condition que :

Det(A) ≠ 0

Mais c'est quoi « Det(A) » ?????

Le déterminant d'une matrice (det) est donné par la formule :

$$\text{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a*d-b*c$$

$$\text{Det}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a*\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b*\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c*\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

Big exemple

Ex : $\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1*\text{Det}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2*\text{Det}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3*\text{Det}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$

$= 1*(5*9 - 6*8) – 2*(4*9 - 6*7) + 3*(4*8 – 5*10)$

$= 1*(-3) – 2*(-6) + 3*(-18) = -3+12-54 = -45$

$-45 \neq 0$ donc l'inverse existe

Mais comment on écrit l’inverse ?

Soit A $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d’ordre 2 :

Si detA ≠ 0, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} * \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Astuce cool

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix} = a*\begin{pmatrix}e & f\\ h & i\end{pmatrix} - b*\begin{pmatrix}d & f\\ g & i\end{pmatrix} + c*\begin{pmatrix}d & e\\ g & h\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

QRU

QRU 1 : A propos des bases du calcul matriciel

A) Pour effectuer un produit matriciel, il faut que le nombre de ligne de la première matrice soit égale au nombre de colonnes de la deuxième matrice
B) Pour effectuer un produit matriciel, il faut que le nombre de ligne de la deuxième matrice soit égale au nombre de colonnes de la première matrice
C) Les matrices commutent toujours
D) Généralement, les matrices ne sont pas transposables
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Correction

QRU 1 : A propos des bases du calcul matriciel

A) Pour effectuer un produit matriciel, il faut que le nombre de ligne de la première matrice soit égale au nombre de colonnes de la deuxième matrice

B) Pour effectuer un produit matriciel, il faut que le nombre de ligne de la deuxième matrice soit égale au nombre de colonnes de la première matrice

C) Les matrices commutent toujours → Généralement les matrices ne commutent pas

D) Généralement, les matrices ne sont pas transposables → La transposée d'une matrice existe toujours ++++++++++++++++++++

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QRU

QRU 2 : Soit A $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

A) Le produit de A*B n'est pas possible

B) La transposée de A est $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

C) La transposée de B est $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

D) L'inverse de A existe

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Correction

QRU 2 : Soit A$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$et B$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

A) Le produit de A*B n'est pas possible → 3 colonnes pour A et 3 lignes pour B donc produit possible

B) La transposée de A est $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

C) La transposée de B est $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

D) L'inverse de A existe → A n'est pas une matrice carrée

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

FIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIN

ON VOUS LOVE BANDE DE FOLLASSES

LA BIOSTAT VOUS SOUHAITE UN BON COURAGE <3333333333333333