

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

INTRODUCTION

A. Définitions

Une **équation différentielle (=ED)** est une équation dont les **inconnus représentent des fonctions**.

Typiquement dans l'équation $3y' + 5y = 0$, on cherche la fonction qui lorsque l'on multiplie 3 fois sa dérivé (y') et 5 fois sa fonction (y) donne 0.

Toute ED est une équation reliant une fonction et ses dérivées d'ordre 1, 2, ...n.

$$F(x, y, y', y'', y^{(n)}) = 0$$

Les **solutions d'une ED** s'appellent le **flot**.

B. Utilité des ED

- ♥ Modéliser les oscillations d'un pendule, d'un ressort, d'une corde ...
- ♥ Modéliser les circuits électriques
- ♥ Estimer un taux de radioactivité (demi-vie...)
- ♥ Dater au carbone 14
- ♥ Modéliser des systèmes complexes (comme par exemple le modèle proies – prédateurs)

ED DU PREMIER ORDRE (ED1)

Les paragraphes suivants correspondent à la définition d'ensemble, c'est barbare et ça tombe pas tel quel, on retient surtout le reste.

Soit E un espace vectoriel normé complet sur \mathbb{R} . On appelle ED1 une équation de la forme $y' = f(x, y)$, où f est une application continue sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times E$ à valeurs dans E .

On appelle solution de cette équation une application ϕ dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans E telle que, pour tout point x de I , $(x, \phi(x))$ appartienne à U et que :

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x))$$

A. Résolution d'une ED1 sans second membre

Toute **ED1 sans second membre** s'écrit sous la forme : $y' + ay = 0 (E)$ où a est un réel quelconque.

Petit tips, si vous voyez une ED avec un y et un y' c'est forcément une ED1. Pourquoi dit-on que celle si est sans second membre ? Parce qu'après le égal vous avez un zéro.

Une ED1 a **toujours une solution**, et **ne peut pas ne pas avoir de solutions**.

Une ED1 a en fait une infinité de solutions mais une unique solution passant par un point donné de type (a, b) .

Remarquons que $y = 0$ est une **solution évidente** de (E) .

Cherchons maintenant les solutions non nulles.

Propriété : Lorsque l'on se trouve face à une équation différentielle du type :

$$y' = ay \quad (a \in \mathbb{R})$$

alors l'**ensemble des solutions** peut s'écrire sous la forme :

$$y(x) = Ce^{ax} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Pour trouver ce résultat, on a utilisé la **méthode de séparation des variables**.

Qu'est-ce qu'il faut comprendre ? Quand vous avez une ED1, vous la mettez sous la forme $y'=ay$, puis pour trouver l'ensemble des solutions vous utilisez la formule $y(x) = Ce^{ax}$ ($C \in \mathbb{R}$), ou C est une constante.

Exemple : On pose l'ED suivante $3y' + 5y = 0$

1) Transformer l'ED sous la forme $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$)

$$3y' + 5y = 0 \Leftrightarrow 3y' = -5y \Leftrightarrow y' = -\frac{5}{3}y$$

2) On trouve a

$$a = -\frac{5}{3}$$

3) On peut donc donner l'ensemble des solutions

La formule générale est : $y(x) = Ce^{ax}$ ($C \in \mathbb{R}$), on remplace $y(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$ ($C \in \mathbb{R}$)

B. Résolution d'une ED1 avec second membre réel

Toute ED1 avec second membre s'écrit de la forme $y' + ay = b$ (E') où a et b sont des réels quelconques

On comprend donc que b est notre second membre.

Propriété : Lorsque l'on se trouve face à une équation différentielle du type :

$$y' = ay + b$$

alors l'**ensemble des solutions** peut s'écrire sous la forme :

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a} \quad (C \in \mathbb{R})$$

La solution de cette équation est donc la **somme de la solution de l'équation sans second membre** (Ce^{ax}) et d'une **solution particulière** $y_0 = -\frac{b}{a}$ (vu juste après)

Exemple : On pose l'ED $2y' - y = 3$

1) Transformer l'ED sous la forme $y' = ay + b$:

$$2y' - y = 3 \Leftrightarrow 2y' = 3 + y \Leftrightarrow y' = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}y$$

2) On trouve a et b

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

3) On peut donc donner l'ensemble des solutions

La formule générale est $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, on remplace $y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3$

On retrouve donc une solution générale Ce^{ax} et une solution particulière $\frac{b}{a}$: $y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3$

Si l'ED est directement sous la forme $y' + ay = 0$ alors les solutions générales peuvent simplement s'écrire :

Ce^{-ax} +++

→ si ED : $y' + ay = 0$ alors $S = Ce^{-ax}$

→ si ED : $y' = ay$ alors $S = Ce^{ax}$ /!\ changement signe /!\

Et si l'ED est directement sous la forme $y' + ay = b$ alors les solutions générales peuvent simplement s'écrire :

$Ce^{-ax} + b/a$ +++

→ si ED : $y' + ay = b$ alors $S = Ce^{ax} + \frac{b}{a}$

→ si ED : $y' = ay + b$ alors $S = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$

C. Résolution d'une ED1 avec une fonction en second membre

Lorsque le second membre est une fonction, on procède par la **méthode de la variation de la constante suivie d'une intégration** (calcul intégral).

Là le prof détaille les théorèmes mais ça a très peu de chances de tomber car trop long pour un examen. Je vous les met quand même révisez les vite fait.

1. Premier théorème

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$)

Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I , $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Il existe une unique solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$; elle est définie par :

$$\forall x \in I, y(x) = y_0 e^{A(x_0)-A(x)} + \int_{x_0}^x b(t) e^{A(t)-A(x)} dt.$$

2. Deuxième théorème

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, solutions générale et particulière)

Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I , \bar{y} une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur I . Soit de plus y une fonction dérivable sur I . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $y' + ay = b$ sur I .

(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, sur I , on ait

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\lambda e^{-A}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

Là je vous met le détail d'un exemple, gros merci à RockLeegament (votre vieux de biostat) qui a fait tout le calcul, mais encore une fois c'est un peu du bonus, peu de risque que ça tombe

Exemple : On considère l'ED : $y' - 2y = x^2$

On cherche d'abord à montrer que $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une solution particulière de l'équation.

Pour cela on remplace y par $u(x)$ dans notre ED afin de retrouver l'égalité $u'(x) - 2u(x) = x^2$

On commence en calculant $u'(x)$ $u'(x) = -x - \frac{1}{2}$

Puis on remplace dans l'équation $u'(x) - 2u(x)$

$$\begin{aligned} &= -x - \frac{1}{2} - 2 \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \\ &= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

On a donc prouvé que $u(x)$ est une solution particulière de l'ED $y' - 2y = x^2$. En remplaçant y par $u(x)$ dans l'équation, l'égalité est vérifiée.

On va maintenant chercher à trouver les solutions générales de notre équation différentielle. Pour cela, une propriété nous dit que face à une équation de la forme $y' = ay + f$ ($y' = 2y + x^2$ dans l'exemple), l'ensemble des solutions est représenté par la somme de 2 fonctions :

$$x \rightarrow u(x) + v(x)$$

Où $u(x)$ est une solution particulière de l'équation $y' = ay + b$ et $v(x)$ une solution particulière de l'équation $y' = ay$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE

(ED2)

A. ED2 à coefficients constants

1. ED HOMOGENE (=SANS SECOND MEMBRE)

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$)

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. On appelle polynôme caractéristique de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

• **Cas complexe** ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

- Si $\Delta \neq 0$, soient r_1 et r_2 les racines distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.
- Si $\Delta = 0$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

• **Cas réel** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

- Si $\Delta > 0$, soient r_1 et r_2 les racines (réelles) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, soient $r + i\omega$ et $r - i\omega$ les racines (complexes conjuguées) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \mapsto (\lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x)) e^{rx}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que l'on peut aussi mettre sous la forme $x \mapsto \lambda \sin(\omega x + \phi) e^{rx}$ ou $x \mapsto \lambda \cos(\omega x + \phi) e^{rx}$, $\lambda, \phi \in \mathbb{R}$.

Si de plus une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ est fixée, avec $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, alors la valeur des constantes est fixée. L'équation avec condition initiale possède une unique solution.

Exemple : On considère l'équation différentielle suivante : $y'' - 4y' + 3y = 0$

- On pose le polynôme caractéristique associé : $r^2 - 4r + 3 = 0$
- On résout l'équation du second degré : $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4 > 0$
- On regarde le signe de Δ : ici $\Delta > 0$ donc 2 solutions réelles
- On calcule nos solutions réelles :

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ ici } r = \frac{4 \pm 2}{2} \text{ soit } r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 3.$$

Propriété : Lorsqu'un polynôme caractéristique d'une ED possède 2 solutions réelles alors l'**ensemble des solutions réelles** de l'équation différentielle est sous la forme :

$$y_{c1c2} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Avec C_1 et C_2 des constantes réelles

Ainsi, nous venons donc de développer le premier point du théorème ($\Delta \neq 0$ et $\Delta > 0$).

Exemple : On considère l'équation différentielle suivante : $y'' - 4y' + 4y = 0$

- 1) On pose le polynôme caractéristique associé : $r^2 - 4r + 4 = 0$
- 2) On résout l'équation du second degré : $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$
- 3) On regarde le signe de Δ : ici $\Delta = 0$ donc 1 solution réelle
- 4) On calcule notre solution réelle

$$r = \frac{-b}{2a}, \text{ soit ici } r = \frac{4}{2} = 2$$

Propriété : Lorsqu'un polynôme caractéristique d'une ED possède 1 unique solution réelle alors l'**ensemble des solutions réelles** de l'équation différentielle est sous la forme :

$$y_{c1c2} = (C_1x + C_2)e^{rx}$$

Avec C_1 et C_2 des constantes réelles

Ainsi, nous venons donc de développer le deuxième point du théorème ($\Delta = 0$)

Exemple : On considère l'équation différentielle suivante : $y'' - 2y' + 5y = 0$

- 1) On pose le polynôme caractéristique associé : $r^2 - 2r + 5 = 0$
- 2) On résout cette équation du second degré : $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$
- 3) On regarde le signe de Δ , ici $\Delta < 0$ donc 2 solutions complexes conjuguées
- 4) On calcule nos solutions complexes conjuguées :

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta i}}{2a}, \text{ ici } r = \frac{2 \pm 4i}{2} \text{ soit } r_1 = 1 - 2i \text{ et } r_2 = 1 + 2i$$

Propriété : Lorsqu'un polynôme caractéristique d'une ED possède 2 solutions complexes conjuguées ($r + iw$ et $r - iw$) alors l'**ensemble des solutions réelles** de l'équation différentielle est sous la forme :

$$y_{c1c2} = (C_1 \sin(wx) + C_2 \cos(wx))e^{rx}$$

Avec C_1 et C_2 des constantes réelles

Ainsi, nous venons donc de développer le troisième point du théorème ($\Delta < 0$).

2. EQUATION AVEC SECOND MEMBRE

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

En gros en déterminant un x^0 spécifique, il n'y a qu'une seule solution à l'équation. Pas grand-chose à rajouter pour ce premier théorème, il ne me semble pas hyper important

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et \bar{y} une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ sur I . Soit de plus $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable sur I . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $ay'' + by' + cy = d$ sur I .

(ii)

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\tilde{y}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

Propriété : L'ensemble des solutions d'une ED2 avec second membre correspond à la somme des solutions générales de l'équation homogène associée (sans second membre) et d'une solution particulière de l'ED.

Exemple : On considère l'équation différentielle suivante : $y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}$

1) On cherche l'ensemble des solutions de l'ED homogène associée

Ici cette ED homogène est $y'' - 4y' + 4y = 0$. On fait le détail et on conclut que l'ensemble des solution est donc sous la forme $y_{c1c2} = (C_1x + C_2)e^{r^2}$

2) Il ne nous reste donc plus qu'à trouver une solution particulière de l'ED $y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}$

Ici le prof ne détaille pas mais j'ai un super copain en prépa qui vous fait l'explication :

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 * 4 = 0$$

La racine $r = -\frac{b}{2a} = 2$ et la solution homogène $y_h : y_h(x) = (C_1x + C_2)e^{2x}$

Méthode de calcul de la solution particulière y_p ED2 second membre non-constant ($\neq 0$)

Tu sais que ta solution particulière vérifie ton équation, donc elle a de très grandes chances d'être de la même forme que ton second membre (e^{-2x}). Donc ici on essaye avec une constante que multiplie e^{-2x} .

On pose $y_p = Ce^{-2x}$. Une fois cette hypothèse posée (en général l'hypothèse étant juste), on dérive cette solution afin de pouvoir la remplacer directement dans l'équation différentielle.

Donc la dérivé première de $y_p = Ce^{-2x}$ est $y'_p = -2Ce^{-2x}$, sa dérivé seconde est la dérivée de la dérivé première soit : $y''_p = 4Ce^{-2x}$.

On obtient donc l'ED suivante : $y''_p - 4y'_p + 4y_p = e^{-2x} \rightarrow 4Ce^{-2x} + 8Ce^{-2x} + 4Ce^{-2x} = e^{-2x}$

On simplifie : $e^{-2x} * (4C + 8C + 4C) = e^{-2x} * (1)$ je peux donc enlever mes e^{-2x}

On obtient : $16C = 1$ soit $C = \frac{1}{16}$. On a donc trouver notre constante C qui vaut $\frac{1}{16}$.

Notre solution particulière étant égale à Ce^{-2x} , on remplace le C soit $y_p = \frac{1}{16}e^{-2x}$

On a la solution particulière de l'ED : $\frac{1}{16}e^{-2x}$

3) On détermine les solutions générales de l'ED. On additionne donc les solutions générales de l'ED associée et la solution particulière de l'ED.

$$y(x) = (C_1x + C_2)e^{2x} + \frac{1}{16}e^{-2x}$$

Pour n'importe quelle valeur de C, cette équation est solution de l'ED2 $y'' - 4y + 4y = e^{-2x}$

On a donc prouvé que si l'on connaît une solution particulière de l'équation, on en connaît toutes les solutions.

MODELES EN ED

Ces deux modèles sont dits **périodiques**, c'est-à-dire que les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ passent par des mêmes valeurs à intervalles de temps réguliers.

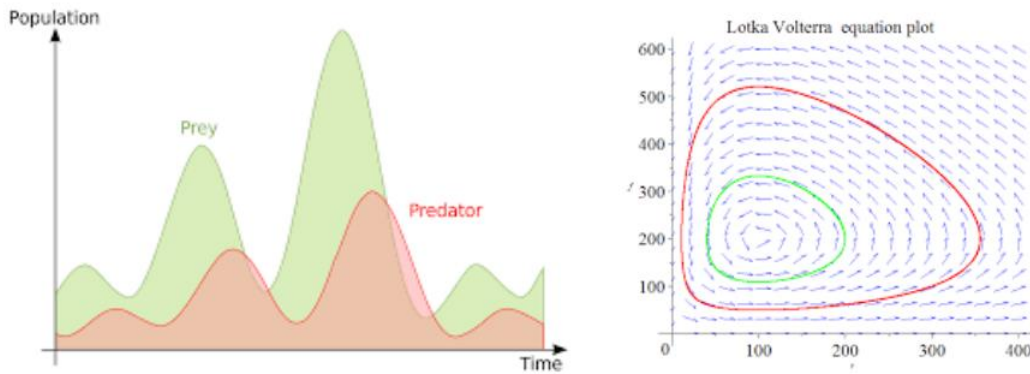
A. Modèle de Lotka-Volterra

En mathématiques, les équations de prédation de Lotka-Volterra, que l'on désigne aussi sous le terme de « **modèle proie-prédateur** », sont un couple **ED1 non-linéaires**, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent.

Dans ce système, t désigne le temps, $x(t)$ l'effectif des proies, $y(t)$ l'effectif des prédateurs, $x'(t)$ et $y'(t)$ les variations des populations au cours du temps, α le taux de reproduction des proies, β le taux de mortalité des proies, δ le taux de reproduction des prédateurs et γ le taux de mortalité des prédateurs.

On obtient le système suivant :
$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = y(t)(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$$

Ce système n'as **pas de solution analytique**, on représente ces résultats sous forme de schémas.



B. Modèle de Verhulst

Verhulst a proposé de modéliser la dynamique de population, le cycle de vie d'une innovation etc...

Ce problème se modélise par une ED de la forme :
$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y' = ry(1 - y/K) \end{cases}$$

Autrement dit l'évolution de la population est une fonction de la population et de la population au carré.

Et d'ailleurs en faisant un **changement de variable** $z = 1/y$, on obtient : $z' = rz \left(1 - \frac{1}{kz}\right) = rz - \frac{r}{k}$

Soit : $z' = rz - \frac{r}{k}$, c'est-à-dire une ED1 avec second membre.

Et oui parce que je peux remplacer le z par un y et donc on obtiendrait $y' = ry - \frac{r}{k}$