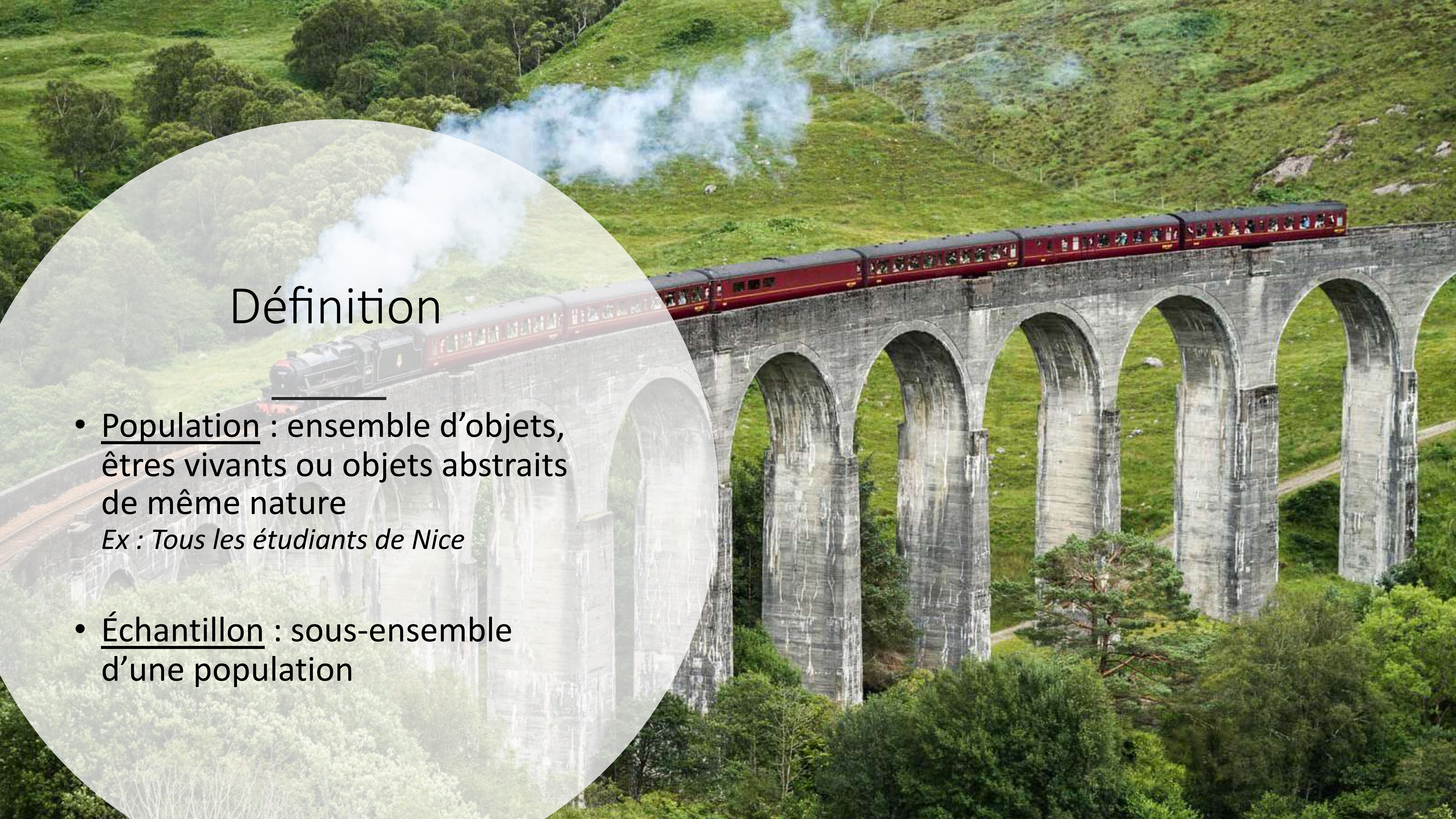
Probabilités élémentaires et dénombrements

Plan du cours

- Définitions
- Les ensembles
- Dénombrements
- Éléments de probabilité



Définition

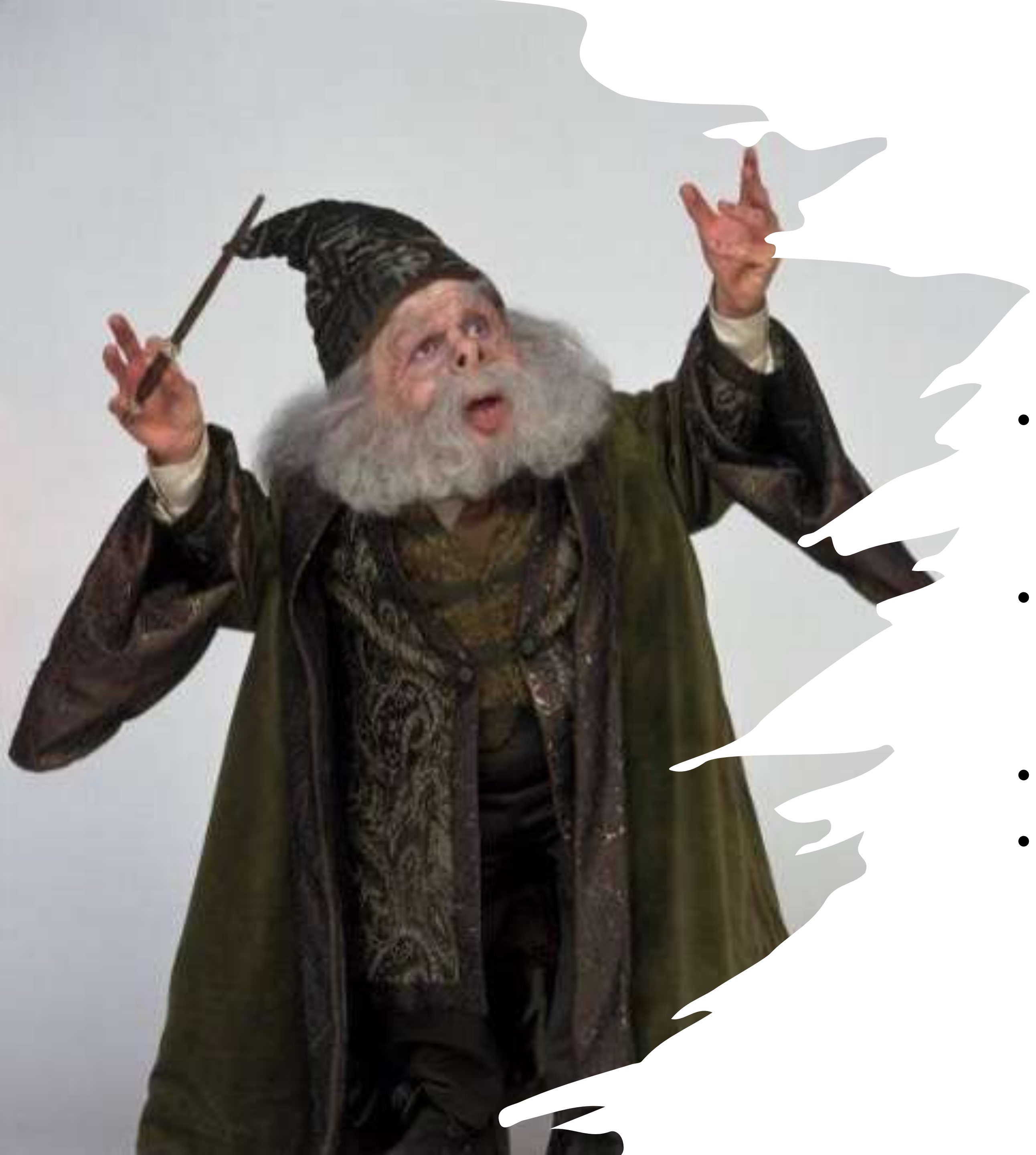
- <u>Population</u> : ensemble d’objets, êtres vivants ou objets abstraits de même nature
  Ex : Tous les étudiants de Nice

- <u>Échantillon</u> : sous-ensemble d’une population

- Ensemble : liste ou collection d'objets définis
  Exemple : Tous les étudiants de LAS de Nice

- Élément : objet appartenant à l'ensemble
  Exemple : 1 étudiant particulier

L'ensemble se définit en **extension** (explicite ou listé) ou en **compréhension** (implicite ou critère)



Notation

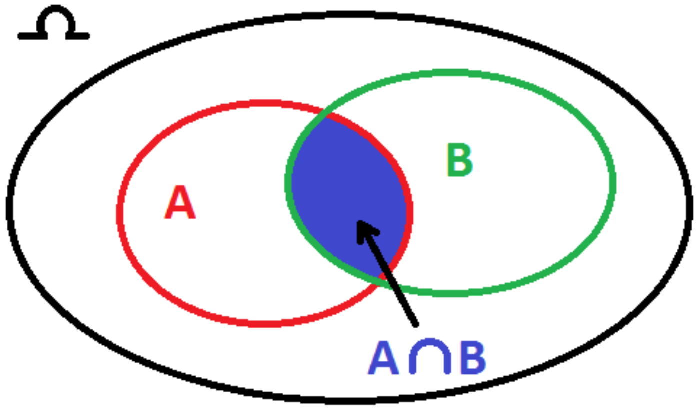
- p est un élément de l'ensemble A : p ∈ A
  Exemple : si A : { 1, 2, 3 } et p = 2 alors p ∈ A

- L'ensemble B est une partie de l'ensemble A : B ⊂ A
  Exemple : si B : { 1, 3 } alors B ⊂ A

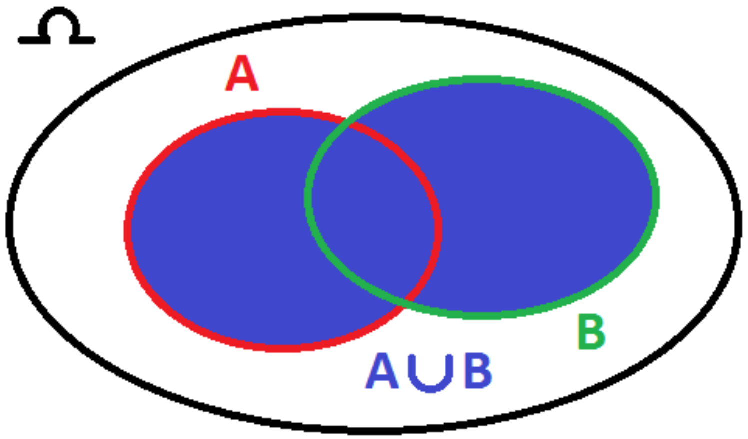
- L'ensemble vide : ∅
- L'univers : Ω

Opérations

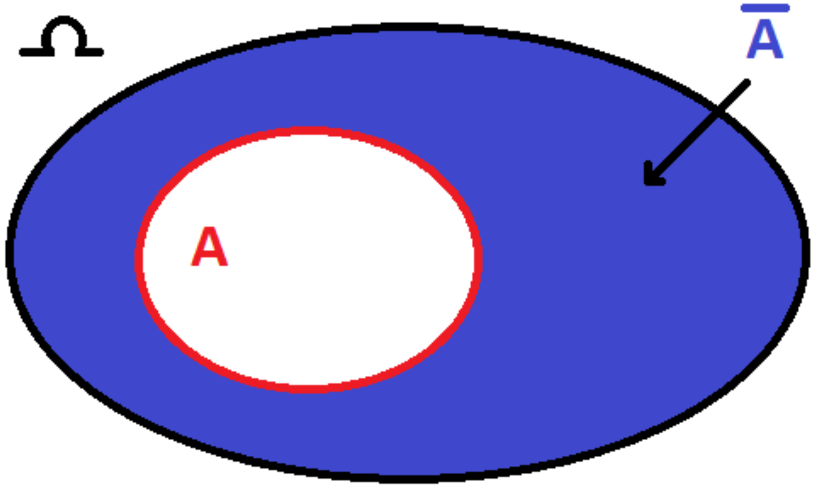
- Intersection : A ∩ B : éléments de A et de B
- Si A ∩ B = Ø alors A et B sont disjoints



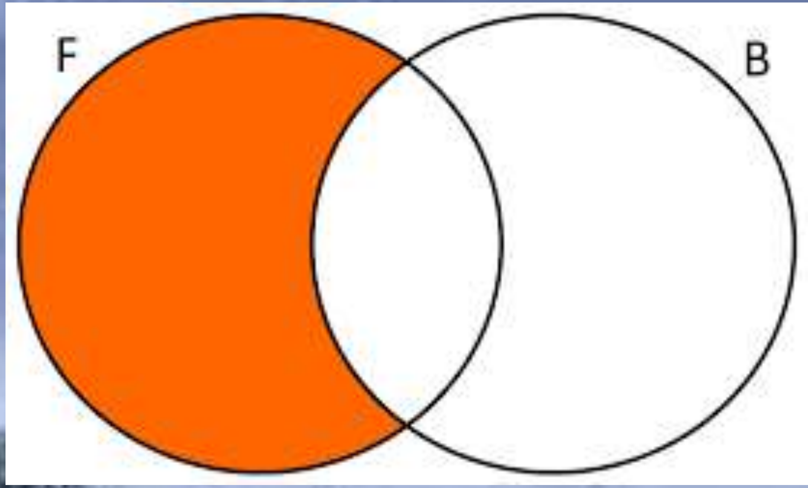
- Réunion : A ∪ B : élément de A, de B ou des 2

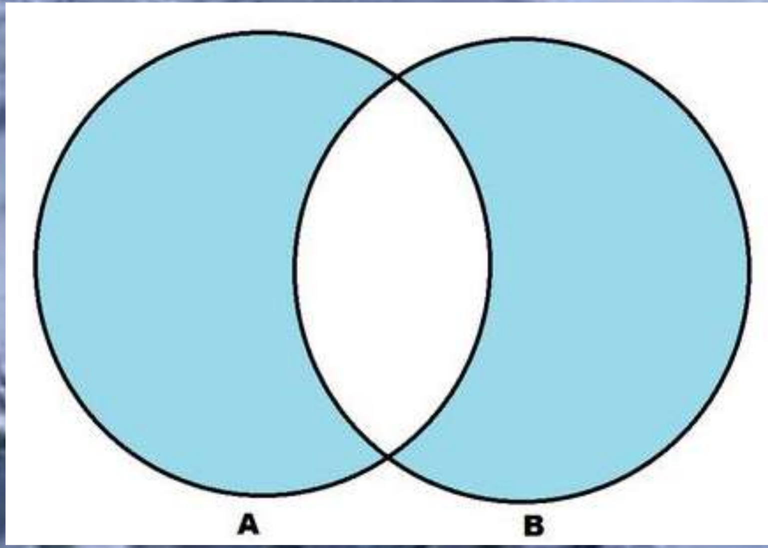


- Complémentaire de A : CA ou Ā: tout ce qui n’est pas A



- Différence : A-B : ce qui appartient à A sans appartenir à B
- Différence symétrique : AΔB : ce qui appartient à A ou à B sans appartenir à A∩B :
  AΔB = AUB - A∩B





- Opérations importantes à comprendre

$$A \cup A = A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cup \Omega = \Omega$$
$$A \cup \complement A = \Omega$$
$$\complement\complement A = A$$
$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$$
$$A \cap A = A$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cap \Omega = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cap \complement A = \varnothing$$
$$\complement\Omega = \varnothing, \complement\varnothing = \Omega$$
$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

Les ensembles

- Finis : nombre fini d'éléments

- Infinis : - dénombrable : chaque élément peut être compté
  - indénombrable : on ne peut pas tous les compter

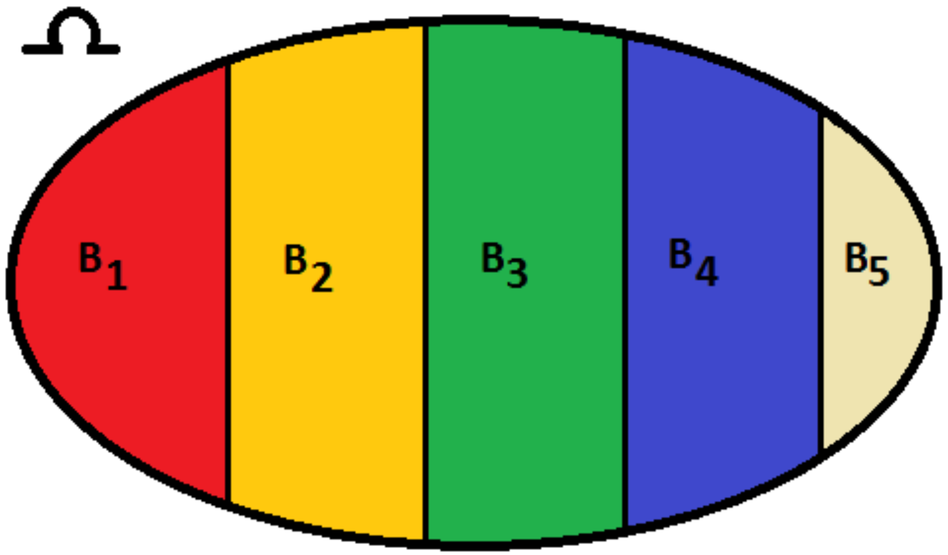
- Ensemble produit : A x B : tous les couples (a ; b) avec a ∈ A et b ∈ B

  Nombre de couples (a ; b) : **Card (A) x Card (B)**
  Card (A) : nombre d'éléments de A

- Famille d'ensembles/ de parties de A : toutes les divisions possibles d'un ensemble
  Ex : A = {1,2,3} les familles sont {1}; {1,3};…

  Nombre de parties : 2^p avec p le nombre d'élément de l'ensemble

- Partition de A : division de A en sous-ensembles disjoints dont la réunion forme A



Exercice !!!

On a 100 étudiants en LAS. 50 d'entre eux sont des garçons (évènement A). 25 des garçons sont en SV et il y a au total 60 étudiants en SV (évènement B).

➔ $A \cup B = 25$

➔ La population est de 60

➔ $A - B = 25$

➔ $A \cap B = 4$

➔ Les réponses sont toutes fausses

Exercice !!!

On a 100 étudiants en LAS. 50 d'entre eux sont des garçons (évènement A). 25 des garçons sont en SV et il y a au total 60 étudiants en SV (évènement B).

➔ $A \cup B = 25$

➔ La population est de 60

➔ $A - B = 25$

➔ $A \cap B = 4$

➔ Les réponses sont toutes fausses

Dénombrements

Avec remise		Sans remise			
Ordonné		Ordonné			Non ordonné
p-liste avec remise	Arrangements avec répétition	Arrangements de n éléments pris p à p	Permutation d'un ensemble fini à n éléments	Permutations avec répétition	Combinaisons de n éléments pris p à p parties d'un ensemble
On prend 1 élément dans E, on le remet et on répète p fois	On prend 1 élément dans n, on le remet et on répète p fois	On prend SUCCESSIVEMENT (=les uns après les autres) p éléments parmi n sans remettre	On prend les éléments 1 à 1 sans les remettre jusqu'à épuisement p = n	On prend les éléments 1 à 1 jusqu'à épuisement en ne tenant compte que des catégories	On prend SIMULTANEMENT (=tous en même temps) p éléments parmi n
$(\text{Card } E)^p$	n^p	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$n!$	$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,...\,k_x!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

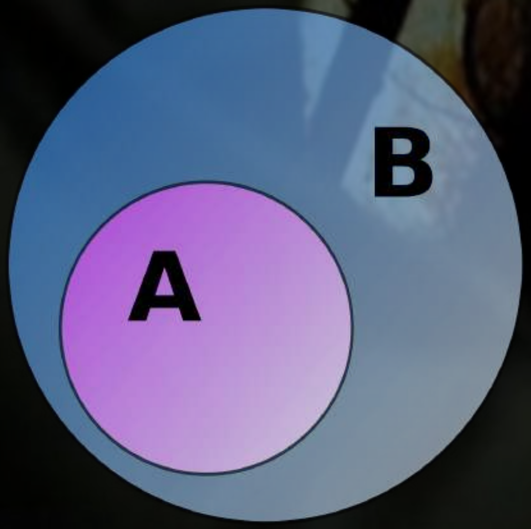
Éléments de probabilité

- Phénomène aléatoire ≠ Phénomène déterministe (prévisible)
- Ensemble fondamental : Ω : l'univers

- Événement : sous ensemble de l'univers :

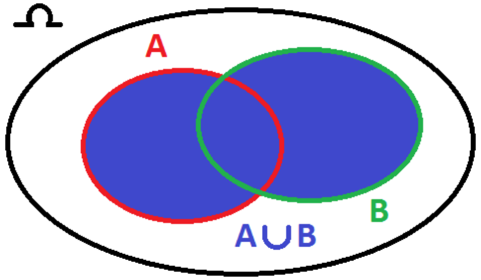
- Événement élémentaire : 1 seul résultat
- Événement impossible : Ø : ensemble vide
- Événement certain : contient tous les résultats possibles

- Probabilité : associer à chaque élément un nombre entre 0 et 1
- P (Ø) = 0
- P (Ω) = 1
- P (CA) = 1 - P (A)
- Si A est inclus dans B alors P (A) ≤ P (B)

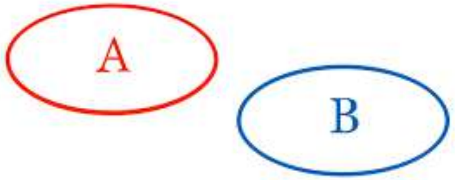


Théorème des probabilités totales

- **$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$**

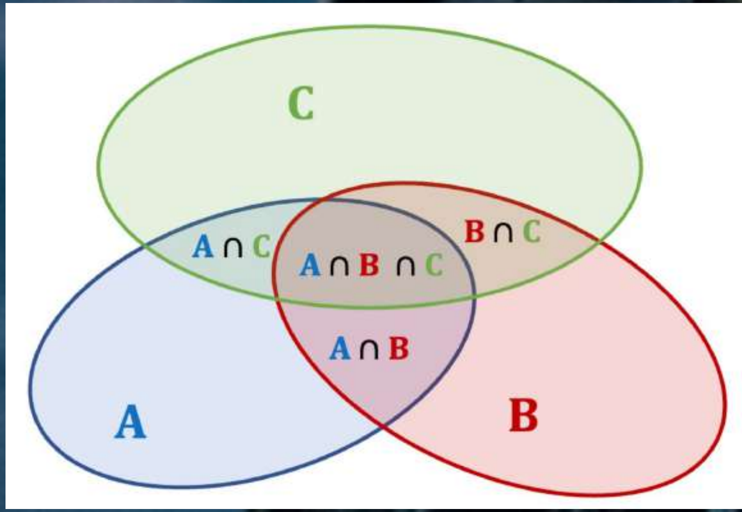


- Si A et B sont incompatibles ($P(A \cap B) = 0$) alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



Propriété d'additivité forte/formule de Poincaré

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$



- Équiprobabilité : tous les événements élémentaires ont la même probabilité
  P (A) = $\frac{card(A)}{card(\Omega)}$

Exercice !!!

4 patients arrivent aux urgences et il y a 4 lits disponibles. De combien de manières différentes peut-on les répartir ?

A. 4^4
B. 24
C. 1
D. 16
E. Les réponses A, B, C et D sont fausses

Exercice !!!

4 patients arrivent aux urgences et il y a 4 lits disponibles. De combien de manières différentes peut-on les répartir ?

A. 4^4
B. 24
C. 1
D. 16
E. Les réponses A, B, C et D sont fausses


FIN