Probabilités conditionnelles, théorème de Bayes et indépendance en probabilités :

I. Définitions de base en probabilités :

- **Ω Ensemble fondamental, l'univers :** P(Ω) = 1, cela représente 100% des évènements, la probabilité est certaine. *Ex. Tout les étudiants de Nice*

- **P(A) :** Probabilité de l'évènement A. *Ex : Probabilité qu'un étudiant soit en LAS*

- **P(Ā) ou P(∁A) :** Probabilité de l'évènement contraire de A, donc de ne pas avoir A. On peut aussi dire que Ā c'est l'univers moins A.

Donc P(Ā) = P(Ω) – P(A) = 1 – P(A). *Ex : ici ça serait la probabilité qu'un étudiant de Nice ne soit pas en LAS*

- **P(A∩B)=P(B∩A):** Probabilité de A **et** B = Probabilité de B et A (c'est pareil) ou probabilité de A inter B (intersection des évènements A et B). *Ex : si on définit l'évènement B comme étant « l'étudiant aime les animés », **P(A∩B)** est la probabilité qu'un étudiant de Nice soit en LAS et aime les animés* ❤️

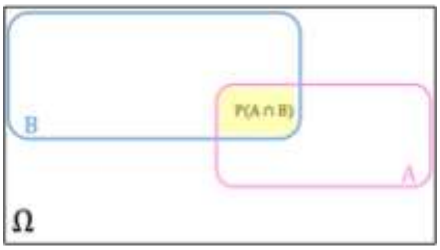
II. Probabilités conditionnelles :

A. Définition:

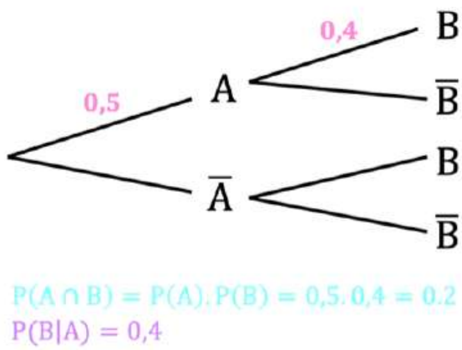
Une probabilité conditionnelle s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un évènement A **à condition** qu'un autre évènement B ait déjà été réalisé.

Ainsi on s'intéresse seulement aux évènements A réalisés par les évènements B réalisés et non plus parmi tout l'univers. Autrement dit, on cherche à savoir quelle est la probabilité que A se réalise une fois que B est réalisé.

Notation : **P(A|B)** = **PB(A)**, c'est la probabilité de A sachant B réalisé.



Attention: ⚠️ Pour la **probabilité de l'intersection**, on regarde sur **tout l'univers** car on cherche la probabilité d'A et B sur l'univers alors que pour une **probabilité conditionnelle**, on regarde **parmi la population de B** seulement. ⚠️



B. Formule de la probabilité conditionnelle :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Équivalence de la formule en lettres : la probabilité qu'un étudiant aime les animés sachant qu'il est en LAS est égale à la probabilité qu'un étudiant soit en LAS ET qui aime les animés divisé par la probabilité qu'un étudiant soit en LAS.

C. Théorème de la multiplication :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B)\ \ P(B) = P(B|A) \times P(A)}$$

Remarque: En biostat, il est important de connaitre le nom du théorème de la formule que l'on utilise.

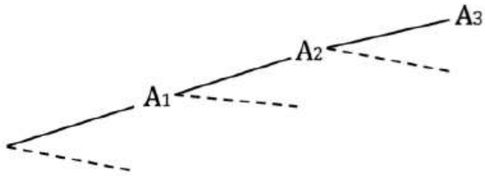
Le théorème peut se généraliser pour plus de 2 évènements de la manière suivante:

$$\boxed{P(A1 \cap A2 \ldots \cap An) = P(A1) \times P(A2|A1) \ldots \times P(An|A1 \cap A2 \ldots \cap An-1)}$$

Explications avec un exemple :

On a une boite de 10 pâtisseries avec 5 croissants, 2 pains au chocolat et 3 tartes aux citrons. On veut connaître la probabilité de tirer 3 croissants d'affilé dans une boite neuve.

- A_1 *: tirer un premier croissant*
- A_2 *: tirer un deuxième croissant*
- A_3 *: tirer un troisième croissant*



On a donc: $P(A1) = \frac{5}{10}; P(A2/A1) = \frac{5-1}{10-1} = \frac{4}{9};$

$P(A3 \cap A2 \cap A1) = P(A1) \times P(A2/A1) \times P(A3/A2/A1) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$

Il y a donc 1/12 chance de tirer 3 croissants d'affilé.

III. Diagramme en arbre :

1. Selon le théorème de la multiplication, la probabilité d'un chemin est le produit de chaque branche du chemin
2. Les chemins s'excluent mutuellement
3. La somme de toutes les probabilités des finalités doit être égale à 1

IV. Formule et théorème de Bayes :

A. Formule de Bayes :

Pour comprendre d'où vient cette formule, vous reprenez la formule de la probabilité conditionnelle ainsi que le théorème de la multiplication

➡ Probabilité conditionnelle: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

➡ Théorème de la multiplication:
$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$

Ça nous donne la formule de Bayes:

$$P(B/A) = \frac{P(A/B) \times P(B)}{P(A)}$$

Exemple d'application de la formule de Bayes 😆 *:*

Dans une classe on a 20 élèves. On a 15 élèves droitiers et le reste des élèves est gaucher. On sait aussi que 12 d'entre eux ont les yeux marrons, 4 ont les yeux bleus et le reste a les yeux verts. Parmi les gauchers, 4 ont les yeux marrons, et celui restant a les yeux bleus. On veut savoir quelle est la probabilité si on tire un élève au hasard parmi ceux qui ont les yeux marrons de tomber sur un gaucher ?

On définit les évènements:

- *A : être gaucher →P(A) = 5/20*
- *B : avoir les yeux marrons →P(B) = 12/20*
- *P(B|A)=4/5*

On cherche P(A/B): $P(A/B) = \dfrac{P(B/A) \times P(A)}{P(B)} = \dfrac{\frac{4}{5} \times \frac{5}{20}}{\frac{12}{20}} = \dfrac{1}{3}$

Nb. Le plus important dans les QCMs avec un long texte c'est de trouver les infos importantes ! 😉

B. Théorème de Bayes :

Soit un univers Ω formé par un ensemble d'évènements de A1 à An. On dit que cet ensemble d'évènements de A1 à An constitue une **partition de Ω**. L'ensemble d'évènements de A1 à An dont l'union forme Ω. C'est une illustration du **théorème des probabilités totales** :

$$\mathbf{P(B) = P(B \cap A1) + P(B \cap A2) + \cdots + P(B \cap An)}$$

Théorème des probabilités totales :

$$P(B) = P(B \cap A1) + P(B \cap A2) + \cdots + P(B \cap An)$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(B \cap An) = P(B|An).P(An)$$

=

$$P(B) = P(B|A1).P(A1) + P(B|A2).P(A2) + \ldots + P(B|An).P(An)$$

+

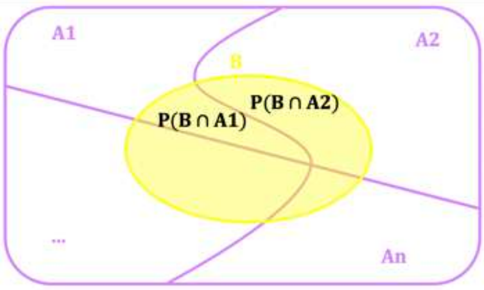
Formule de Bayes :

$$P(An|B) = \frac{P(B|An).P(An)}{P(B)}$$

=

Théorème de Bayes :

$$P(An|B) = \frac{P(B|An).P(An)}{P(B) = P(B|A1).P(A1) + P(B|A2).P(A2) + \ldots + P(B|An).P(An)}$$



V. Évènements indépendants :

A. Introduction :

<u>Définition</u> : Deux évènements sont indépendants si **$P(B \cap A) = P(A)$x $P(B)$**. Les évènements sont indépendants dans la mesure où la probabilité de réalisation de A ne change pas avec la réalisation de B.

Soit P(A|B) = P(A) et P(B|A) = P(B). Conséquences :

- A et $\bar{B}$ sont indépendants
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants
- $\bar{A}$ et B sont indépendants

Cas de trois évènements : soient A, B, et C.
S'ils sont **indépendants deux à deux** (A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B) **ET** si **$P(A \cap B \cap C) = P(A)$ x $P(B)$ x $P(C)$**, alors ces trois évènements sont **indépendants** !

Remarque : *La seconde condition n'est pas une conséquence de la première. C'est-à-dire que les trois évènements peuvent être indépendants deux à deux, mais on peut avoir : $P(A|B \cap C) \neq P(A)$ et ducoup A, B, et C ne sont pas indépendants.*

B. Indépendance et inclusion :

<u>Définition</u> : A⊂B : A est inclus dans B donc $P(A \cap B) = P(A)$
Remarque : *on a $P(A \cap B) = P(B|A).\ P(A)$ avec la proba de B sachant A* égale à 1, car A étant inclus dans B on est certain d'avoir B !

⚠️ A et B ne sont **PAS** indépendants ⚠️

C. Indépendance et exclusion :

<u>Définition</u> : $A \cap B = \varnothing$; $P(A \cap B) = 0$: A et B sont **exclusifs**, **disjoints**, **incompatibles** (*attention aux synonymes* 🤪), donc $P(A|B) = P(B|A) = 0$. *Ex : A « être majeur », B : « être mineur », les 2 ne peuvent pas se produire en même temps, ils sont incompatibles.*

⚠️ A et B ne sont **PAS** indépendants ⚠️

Et voilà c'est fini pour ce cours ! C'est maintenant l'heure des dédicaces (va y en avoir un paquet)!!!

Déjà grosse dédicace à mes co-tut Camilyatomic, Madelime, Sap1ens et Eva'nouir

Dédi aussi à nos vieux Camileon, Juj', Glyc'olive et Exodia

Dédi à Bakugo (ceux qui suivent mha vous savez pourquoi)

Et enfin défi à ma famille qui m'a soutenue pendant toute ma p1 !!!