

Lois cinétiques

I. Loi de décroissance d'une population de noyaux radioactifs

La **radioactivité**, c'est l'émission d'une **particule**, souvent associée à un rayonnement, qui fait suite à la désintégration d'un noyau instable.

La radioactivité est un **phénomène statistique** : tout nucléide instable va se désintégrer d'une manière :

- **Aléatoire** = imprévisible, sans mémoire, on ne connaît pas l'instant t où le noyau va se désintégrer
- **Stationnaire** dans le temps, avec une probabilité invariable (constante, λ), qui ne dépend pas de notre durée d'observation

A. La constante radioactive λ

La probabilité P qu'un nucléide subisse une transformation radioactive pendant un intervalle de temps d'observation dt est :

$$P(dt) = \lambda \times dt$$

Tu t'désintègre (pas toi le noyau) : Petit point sur la constante radioactive λ :

- A une dimension qui **est l'inverse d'un temps**, en s^{-1} (mais elle peut aussi s'exprimer en min^{-1} , h^{-1} , années^{-1} etc...)
- Dépend de :
 - o La **nature du nucléide** : la constante radioactive est différente s'il s'agit de C^{14} , ou d' O^{15}
 - o Du **niveau d'énergie du noyau**
- Ne dépend pas :
 - o Des **conditions physicochimiques de l'environnement** (t° , pH, environnement moléculaire etc...)

Exemples :

Carbone 14 : $\lambda = 1,2 \times 10^{-4} \text{an}^{-1}$ → Chaque noyau a environ une chance sur 10 000 de se désintégrer au cours d'une année.

Sodium 24 : $\lambda = 4,62 \times 10^{-2} \text{h}^{-1}$ → Chaque noyau a un peu plus de 4 chances sur 100 de se désintégrer en une heure.

On voit grâce à leur constante radioactive λ que les **noyaux de sodium vont se désintégrer beaucoup plus rapidement que les noyaux de carbone 14**.

B. Évolution du nombre de noyaux au cours du temps

On va maintenant étudier la **probabilité de désintégration d'une population de nucléides radioactifs**.

N_0 représente le nombre de noyaux radioactif qu'il y avait au départ (effectif initial)

λ représente la constante radioactive associée

$N(t)$ représente le nombre de noyaux à l'instant t

dt représente l'intervalle de temps de notre observation

Entre les instants t et $t+dt$, la population de noyaux diminue de dN (=le nombre de noyaux qui disparaissent par désintégration radioactive)

$$dN = -N \times P(dt) \rightarrow dN = -n(t) \times \lambda \times dt$$

$$\text{On intègre : } N(t) = N_0 \times e^{-\lambda t}$$

Donc le **nombre de noyaux radioactif diminue par désintégration de manière exponentielle** selon cette formule.

On prend l'exemple d'un pommier avec ses pommes mûres et prêtes à tomber. Chaque pomme a une probabilité P de tomber à un instant t .

P est toujours la même, elle est **indépendante du temps** t et du nombre de pommes restantes.

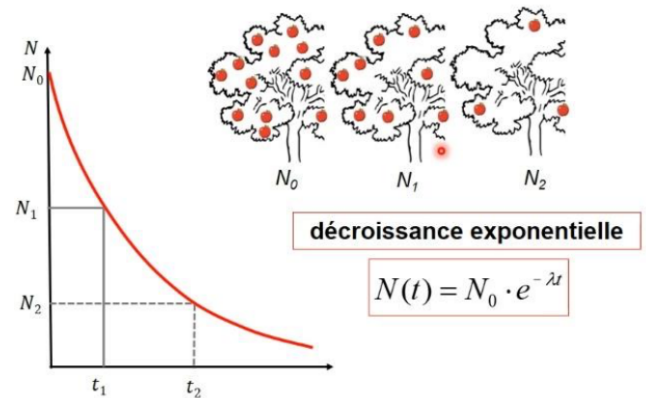
A l'instant $t = 0$, on a N_0 pommes.

A $t = 1$, on a N_1 pommes, avec une diminution assez rapide au départ du nombre de pommes.

Au temps $t = 2$, on a N_2 pommes.

On a une **décroissance exponentielle** du nombre de pommes : **rapide au départ**, qui va ensuite se tasser avec le temps.

Cet exemple peut se transposer au nombre de noyau d'une population d'atomes radioactifs.



II. Période radioactive T

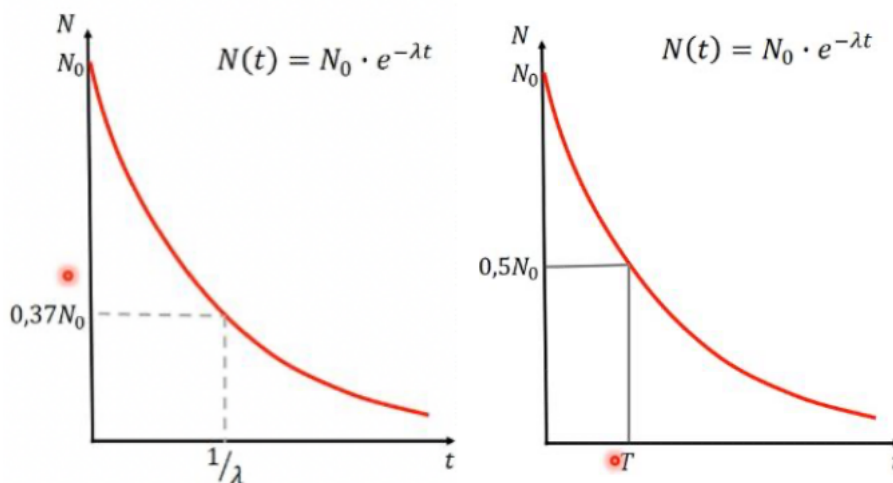
A. Définition

Pour caractériser la décroissance on a λ : la **constante radioactive**, exprimée comme l'inverse d'un temps.

Il est plus simple d'utiliser une **constante de temps** $= \frac{1}{\lambda}$, exprimée en unité de temps (secondes, heures, années...). (l'unité de λ étant l'inverse d'un temps, $\frac{1}{\lambda}$ est donc un temps)

On calcule le nombre de noyaux N restant au temps $t = \frac{1}{\lambda}$ (donc après un intervalle $dt = \frac{1}{\lambda}$)

$$N\left(\frac{1}{\lambda}\right) = N_0 \cdot e^{-\lambda \frac{1}{\lambda}} \rightarrow N\left(\frac{1}{\lambda}\right) = N_0 \cdot e^{-1} \rightarrow N\left(\frac{1}{\lambda}\right) = N_0 \times 0,37$$



Sur le graphique : Le temps est sur l'axe des abscisses, on voit la **décroissance exponentielle** du nombre de noyaux en fonction du temps : à $t = \frac{1}{\lambda}$, il **reste 37% de l'effectif initial des nucléides** (ça veut dire que 63% des noyaux se sont désintégrés)

En théorie : la constante radioactive (λ) ou la constante de temps ($\frac{1}{\lambda}$) suffisent pour caractériser la décroissance de la population des noyaux instables.

En réalité : on préfère utiliser la **période radioactive T** :

Elle s'exprime en unité de temps (secondes, minutes, années ...)

Elle définit le **temps au bout duquel il ne reste plus que 50% de l'effectif initial** (donc effectif réduit de moitié), donc $N(T) = \frac{N_0}{2}$.

On lie les formules et on développe :

$$N(T) = \frac{N_0}{2} \text{ et } N(T) = N_0 \cdot e^{-\lambda T}$$

$$\text{Donc } N_0 \cdot e^{-\lambda T} = \frac{N_0}{2}$$

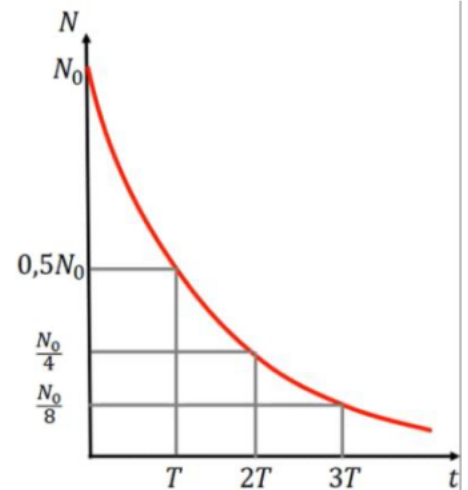
$$\rightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \rightarrow \lambda \cdot T = \ln(2)$$

$$\rightarrow T = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} +++$$

On cherche maintenant à écrire $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ en remplaçant λ par $\frac{\ln(2)}{T}$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2) \cdot t}{T}} = N_0 \cdot \{(e)^{\ln(2)}\}^{-\frac{t}{T}}$$

$$\frac{N(t)}{N_0} = 2^{-\frac{t}{T}}$$



t	T	$2T$	$3T$	$10T$	nT
$N(t)/N_0$	$\frac{1}{2}$	2^{-2}	2^{-3}	2^{-10}	2^{-n}
%	50	25	12,5	0,1	...

$\frac{N(t)}{N_0}$ correspond au **pourcentage de noyaux restants** après l'intervalle de temps t .

Après 1 période radioactive, il reste **50% des noyaux**.

Après 2 périodes radioactives, il **reste 25% des noyaux** (car on a divisé la quantité qu'il restait après une période par 2)

Après 10 périodes radioactives, il reste 0,1% des noyaux, soit un millième de l'effectif initial N_0 on considère qu'au bout de $10T$, le radionucléide a quasiment disparu +++

B. Exemples de calculs

$$^{24}\text{Na} : \lambda = 4,62 \cdot 10^{-2} \text{ h}^{-1}$$

$$T = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

$$T = \frac{0,693}{4,62 \cdot 10^{-2}} = 15 \text{ h}$$

$$^{99\text{m}}\text{Tc} : \lambda = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} = 3,2 \cdot 10^{-5} \times 3600 = 0,1152 \text{ h}^{-1}$$

$$T = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

$$T = \frac{0,693}{0,1152} = 6 \text{ h}$$

!! Petit point unités : si on vous demande un T en h, il faut que λ soit en h^{-1} , si on vous demande un T en s, il faut un λ en s^{-1} !!

C. Période effective en physiologie

Une population d'atomes radioactifs dans l'organisme peut être éliminée par :

- **Élimination physique**, par désintégration radioactive : suit une loi exponentielle
→ Élimination caractérisée par la **période radioactive** $T_{\text{radioactive}} = T_{\text{physique}}$
- **Élimination biologique** (le radionucléide quitte l'organe, éliminé via les urines ou les selles par exemple), et suit aussi une loi exponentielle
→ Élimination caractérisée par la **période biologique** T_{bio} = temps au bout duquel la moitié des noyaux initiaux ont été éliminés biologiquement.

L'élimination réelle des radionucléides tient compte de ces deux phénomènes : physique et biologique. Un élément qui se désintègre selon une période radioactive T est également métabolisé avec une période biologique T_{bio} il sera finalement éliminé selon la période effective T_{eff} avec :

$$\frac{1}{T_{eff}} = \frac{1}{T_{physique}} + \frac{1}{T_{bio}} + + +$$

III. Activité d'un radioélément

A. Définition

L'**activité** est :

- Le nombre moyen de désintégration radioactives par unités de temps
- Proportionnelle au nombre de radionucléides restants (= pas encore désintégrés) à chaque instant t

$$A(t) = \lambda \cdot N(t)$$

Avec :

- $A(t)$ l'activité au temps t
- $N(t)$ le nombre de nucléides au temps t
- λ la constante radioactive

Le nombre de photons ou de particules émises par unité de temps (car pendant une désintégration il y a libération de photon ou de particule détectable) est :

- Proportionnel à ce que l'on peut détecter
- Une grandeur utile pour exprimer une quantité de radionucléides. Le taux de désintégration des particules radioactives est un élément plus important que leurs nombre N ou leurs masse m (en gros, ce qui compte c'est la radioactivité émise, exprimée par l'activité)

Retour de l'exemple du pommier : Soit N le nombre de pommes sur l'arbre (= nb d'atomes radioactifs). On change de référentiel et on se met à la place du gars sous le pommier. Pour lui, ce qui est important c'est **le nombre de pommes qu'il se prend sur la tête**, pas le nombre de pommes dans le pommier. On va donc regarder le nombre de pommes émises à chaque instant t par le pommier $A(t)$ => c'est l'**activité**.

On ne regarder pas le nombre d'éléments présents mais le nombre de particules émises à chaque instant.

B. Unité de l'activité

Dans le SI, l'unité de l'activité est le **Becquerel (Bq)** : $1\text{Bq} = 1$ désintégration par seconde

Quand on a une population d'atomes radioactifs, on a généralement plusieurs milliers voire millions de désintégrations par secondes, le Bq est donc une unité très petite, et on utilise souvent le MBq (1 million de Bq), ou parfois le GBq (1 milliard de Bq) +++

L'ancienne unité est le **Curie (Ci)**, $1\text{Ci} = 3,7 \cdot 10^{10}\text{Bq} = 37\text{GBq}$

Le Curie est une unité très grande, les sources en médecine sont moins radioactives, donc on utilise des sous multiples du Ci : le mCi (un millième, = 10^{-3}Ci , $1\text{mCi} = 37\text{MBq}$) ou le μCi (un millionième, = 10^{-6}Ci)

C. Évolution dans le temps

$$N(T) = N_0 \cdot e^{-\lambda T}$$

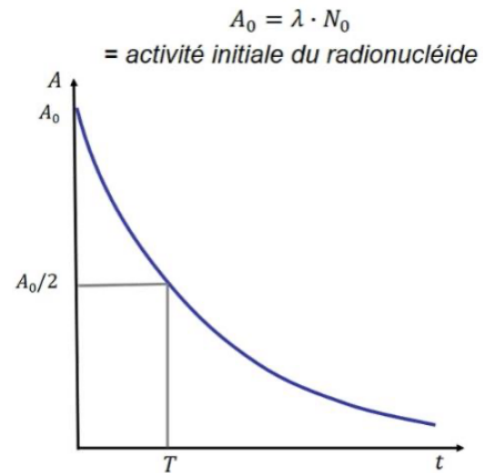
$$\text{or } A(t) = \lambda \cdot N(t)$$

$$\text{et } A_0 = \lambda \cdot N_0$$

$$\text{Donc } A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda T}, \text{ ou encore } A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2) \cdot t}{T}}$$

On remarque qu'on retrouve les mêmes formules que pour le nombre de noyaux, et c'est normal car l'activité est proportionnelle au nombre de noyaux.

L'activité **décroit exponentiellement** également



D. Mesure de l'activité

On dispose d'outils détecteurs de radioactivité : ils mesurent l'émission de particules ou de rayonnements électromagnétiques -> les **activimètres**.

Cependant, l'activité mesurée n'est **pas fixe dans le temps** (la radioactivité est un phénomène probabiliste et aléatoire). Le nombre de désintégration qui se produit pendant un certain temps t n'est pas prévisible, on a seulement une probabilité. Les mesures vont refléter cette incertitude.

La source radioactive a une activité précise à un temps donné mais pour une même source, en répétant les mesures, l'activimètre nous donne une variabilité de valeurs d'activité. On observe une répartition spécifique des fréquences d'activité : les valeurs suivent la loi de Poisson (courbe Gaussienne). Il y a une fréquence maximale \bar{A} qui correspond à l'activité moyenne de notre source.

E. Calcul de la masse de radioéléments à partir de son activité

Il est possible de calculer la masse d'un radio élément à partir de l'activité que l'on a mesurée. Pour calculer la masse d'un atome unique, on passe par la masse molaire M de l'élément.

Tut'rappel : Masse molaire M = masse d'une mole

Une mole c'est la quantité de matière qui contient autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes de carbone 12 dans 12g, soit environ $6 \cdot 10^{23}$ atomes, c'est le nombre d'Avogadro.

$$\text{Masse d'un atome (g)} = \frac{M}{N_A}$$

← Masse molaire ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)
← Nb d'Avogadro ($6 \cdot 10^{23}$ atomes)

$$\text{Masse responsable d'une activité } A \text{ au temps } t : m(t) = N(t) \times \frac{M}{N_A}$$

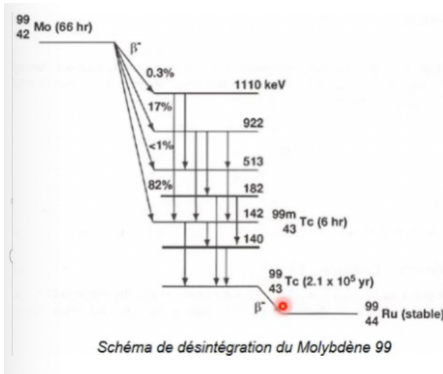
$$m(t) = \frac{A(t)}{\lambda} \times \frac{M}{N} = \frac{A(t) \times T}{\ln(2)} \times \frac{M}{N_A} +++++$$

IV. Cinétique des filiations radioactives

On va voir comment évolue l'activité d'un nucléide fils par rapport à l'activité du noyau radioactif père dont il est issu.

Un noyau radioactif père se désintègre et va donner un noyau fils. Ce noyau fils sera soit stable, soit lui aussi radioactif. Dans le cas où il est aussi radioactif, il va se désintégrer +/- rapidement en un autre élément.

C'est important car en médecine nucléaire (où on utilise des sources radioactives en imagerie ou pour les traitements) on a souvent recourt à un radioélément à décroissance rapide, lui-même fils d'un radioélément à demi-vie plus longue.



Exemple : Technétium 99m

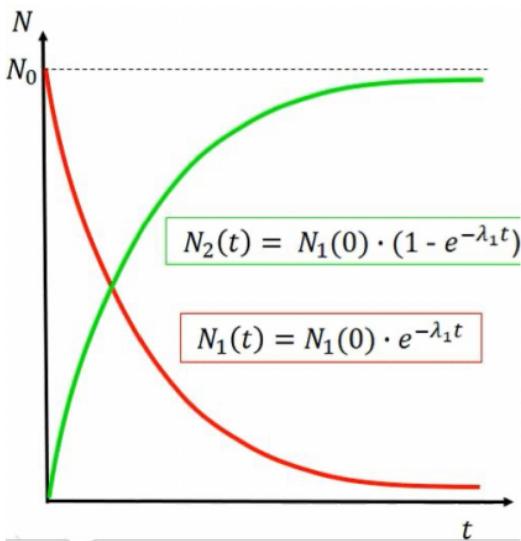
Utilisé pour des images scintigraphiques, il est impliqué dans toute une cascade de transformations :

Père molybdène – 99, $\frac{1}{2}$ vie = 66h \rightarrow désintégration β^- \rightarrow donne plusieurs éléments fils dont le Tc-99m : instable $\frac{1}{2}$ vie = 6h \rightarrow transformation isomérique Tc – 99 \rightarrow désintégration β^- \rightarrow Ru-99 stable

A. Formation d'un nucléide stable

Situation simple : $^*X_1 \rightarrow X_2$

Père radioactif Fils stable



On sait que : (N_1 est le nombre de noyaux pères et λ_1 la constante radioactive du père)

Quand $t=0$, $N_2(0) = 0 \rightarrow$ le nombre de noyaux père est à son maximum, il n'y a pas encore de noyaux fils.

A chaque instant, un atome père donne un atome fils, dont le nombre de pères + le nombre de fils correspond au nombre de pères initialement présentes (constante $N_1(0)$)

$$\text{A tout instant, } N_1(t) + N_2(t) = N_1(0)$$

$$\text{Donc } N_2(t) = N_1(0) - N_1(0) \cdot e^{-\lambda_1 t}$$

$$N_2(t) = N_1(0) \cdot (1 - e^{-\lambda_1 t})$$

On voit que la croissance du nombre d'atomes fils en fonction du temps est la symétrie de la décroissance du nombre d'atomes

père est la symétrie de la décroissance du nombre d'atomes pères (toutes deux exponentielles).

On regarde maintenant les activités :

Celle du père s'obtient avec : $A_1(t) = \lambda N_1(t) = A_1(0) \cdot e^{-\lambda_1 t}$

Celle du fils : elle est nulle, le fils est stable, donc il n'a pas de radioactivité +++

B. Formation d'un nucléide instable : cas général

C'est un peu plus complexe : $^*X_1 \rightarrow ^*X_2 \rightarrow X_3$

Radioactif Radioactif Stable

Le père et le fils sont instables et radioactifs (X_2 va aussi se désintégrer en X_3 stable)

Évolution de nombre de noyaux

Pour les noyaux pères, on a une décroissance exponentielle à partir de $N_1(0)$

La cinétique d'évolution du nombre de noyaux fils X_2 en fonction du temps dépend d'un équilibre entre :

- La formation des atomes de X_2 , qui provient directement de la transformation radioactive de X_1 (un père se désintègre en un fils)
- La disparition de X_2 radioactif qui se désintègre en X_3

Équation qui calcule N_2 à chaque instant t :

$$dN_2 = \lambda_1 N_1 dt - \lambda_2 N_2 dt$$

$$N_1(t) = N_1(0) \cdot e^{-\lambda_1 t}$$

Équation différentielle qui conduit à l'expression :

$$N_2(t) = N_1(0) \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

La différence entre la formation et la désintégration du nombre de noyaux N_2 pendant un intervalle de temps dt = nombre d'atome père qui se désintègre pendant dt – nombre d'atome fils qui se désintègrent pendant dt .

C'est une **équation complexe**, qui donne l'évolution de X_2 selon le temps.

Évolution du nombre de noyaux petits fils X_3 stables :

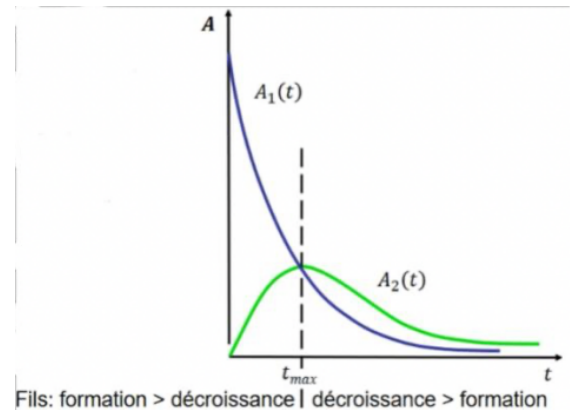
- Ne fait **qu'augmenter**, à la fin N_3 sera égal à $N_1(0)$

Évolution des activités :

On a vu que l'activité est directement proportionnelle au nombre de nucléides présent à un instant t → les équations du calcul d'activité seront donc similaires.

- Activité du père : $A_1(t) = A_1(0)e^{-\lambda_1 t}$
- Activité du fils : $A_2(t) = A_1(0) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$

On retrouve aussi les mêmes courbes, le père a une activité exponentielle décroissante et l'activité du fils croît rapidement, atteint un maximum puis décroît.



Particularités :

On a un **temps t_{max}** = temps auquel l'activité du fils X_2 va être maximale.

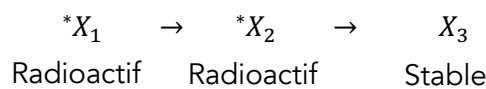
Ce t_{max} correspond aussi au moment où l'activité de X_2 est égale à l'activité des noyaux père X_1 (= croisement des deux courbes d'activité, père et fils). On peut calculer ce temps d'activité +++

$$t_{max} = \frac{\ln \lambda_2 - \ln \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

La courbe d'activité du fils instable X_2 a :

- Une **phase de croissance** avant t_{max} : formation du fils X_2 > désintégration en X_3
- Un **maximum** en t_{max} : $A_1(t_{max}) = A_2(t_{max})$
- Une **phase de décroissance** après t_{max} : noyaux qui se désintègrent en X_3 > noyaux X_2 qui proviennent du X_1 (car il n'y a plus beaucoup de noyaux pères)

C. Formation d'un nucléide instable : cas particulier de l'équilibre de régime $\lambda_1 < \lambda_2$ ($T_1 > T_2$)



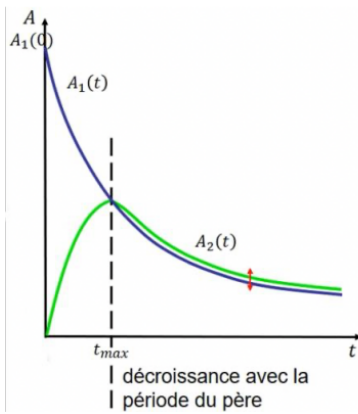
On a encore un noyau père radioactif qui se désintègre en noyau fils, lui-même radioactif qui donne X_3 MAIS avec le **cas particulier de l'équilibre de régime** (ou équilibre séculaire)

L'équilibre du régime survient quand :

$$\begin{array}{l} \lambda \quad \lambda_1 < \lambda_2 \\ T \quad T_1 > T_2 \end{array}$$

Les deux relations reviennent au même, car la période radioactive T est l'inverse de la constante radioactive λ .

→ Cela signifie qu'on a un **équilibre de régime** quand le père se désintègre moins vite que le fils.



En termes d'activité on a la formule de l'activité du fils à un instant t

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Pour tout temps $t > t_{max}$ on montre que l'activité du fils égale l'activité du père au même instant multiplié par un coefficient de proportionnalité :

$$A_2(t) \cong A_1(t) \times \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Coefficient de proportionnalité

Donc après t_{max} (après son palier maximum) **ET toujours sous la condition que $T_1 > T_2$ +++ :**

- La **décroissance du fils X_2 sera proportionnelle à celle du père X_1** → elle suit la décroissance du père avec la même période radioactive que celle du père
- Il y a une légère différence (A du fils $>$ A du père), qui correspond au **coefficient de proportionnalité** qui nous donne la vraie activité du fils.

Ceci n'est vrai **que quand les noyaux pères et fils sont ensemble**, dans le même compartiment / même solution, si on les sépare on perd cet équilibre de régime.

Exemple :

Le TC-99m est utilisé en médecine pour les scintigraphies.

On a des générateurs avec du Mo-99m (puis du Tc-99m)

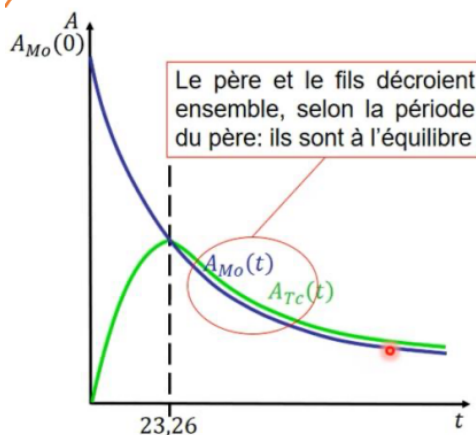
Il y a une **différence de constantes radioactives et périodes radioactives** du père et du fils, $T_1 > T_2 \rightarrow$ équilibre de régime.

	$^{99}_{42}\text{Mo}$	\rightarrow	$^{99m}_{43}\text{Tc}$	\rightarrow	$^{99}_{43}\text{Tc}$
λ	10^{-2}h^{-1}		11,5 $\cdot 10^{-2} \text{h}^{-1}$		
T	67 h		6 h		

$$\text{Pour } t > t_{max}, t_{max} = \frac{\ln \lambda_2 - \ln \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 23,26 \text{ h}$$

$$A_2(t) \cong A_1(t) \times \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = 1,09$$

$$A_{Tc}(t) = 1,09 \times A_{Mo}(t)$$



On peut calculer $t_{max} = 23,26 \text{ h}$, au-delà duquel l'activité du Tc-99m sera égale à l'activité du Mo-99 multipliée par le facteur de proportionnalité (on le calcule = 1,09) $\rightarrow A_{Tc}(t) = 1,09 \times A_{Mo}(t)$

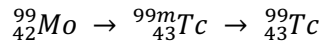
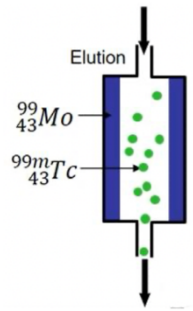
La courbe de décroissance de l'activité du Tc subit celle du Mo en étant **légèrement supérieure** (avec un facteur de 1,09).

⚠ Attention ⚠ : Quand on dit que l'activité du Tc décroît avec l'activité du Mo, on considère **l'activité globale du Tc dans le générateur** : si on regardait individuellement ce qu'il se passe pour chaque noyau de Tc-99m, chacun diminuerait avec sa période propre (de 6h) mais globalement **quand Mo et Tc sont ensemble**

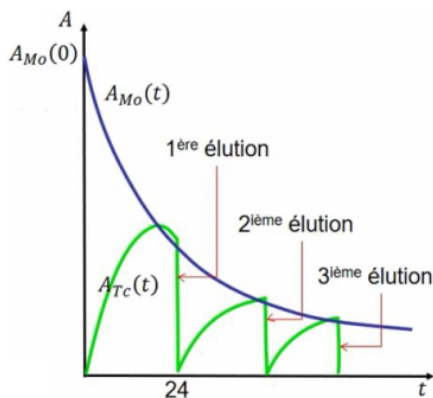
dans le générateur, ils diminuent avec la même période.

Schéma : On a ici un schéma du générateur de Tc-99m présent dans les services de médecine nucléaire. Il est fait d'une résine échangeuse d'ions dans laquelle est incorporée de Mo-99. Quand il se désintègre en Tc-99m, ce dernier est libéré de la résine et se retrouve dans la cavité centrale du générateur. Il faudra faire des élutions = faire passer un liquide (de l'eau par exemple) dans le générateur pour récupérer les noyaux de Tc-99m de la cavité centrale (le Mo reste dans la résine, on récupère seulement le Tc pour l'imagerie).

Application au générateur Mo-99 / Tc-99m



T 67 h 6 h



Activité du Mo : Il reste inclus dans la résine, donc son **activité décroît exponentiellement** avec le temps selon sa période de 67h

Activité du Tc : à $t = 0$ il n'y a pas de Tc ; puis il y a **formation** de Tc → **activité qui augmente**, jusqu'à arriver à t_{max} (environ 23h), au-delà il commence à décroître avec le Mo → c'est donc le moment idéal pour faire **l'élution** (on a un max de Tc dans la cavité). On récupère le Tc donc son activité dans le générateur retombe à 0. On répète le processus... on va souvent ç un maximum de 3 élutions (il y a de moins en moins de Tc car de moins en moins de Mo)

Grâce à cet équilibre de régime, les physiciens peuvent prévoir quelle quantité de Tc-99m on récupérera à chaque élution.

La durée de vie du générateur de médecine nucléaire est d'environ 3j → on le change deux fois par semaine.

Dédisssssss (youpiiii)

Dédi à ma petite sœur pour lui faire plaisir (elle a forcé pour l'avoir cte forceuse)💕

Dédi à toute la team du tut parce que c'est vraiment les meilleurs, et particulièrement à tous les tuts de biophy (même les vieux) car ils sont tous incroyables

Dédi à mes grands-parents qui ne verront jamais cette fiche 🥺

Dédi à mes parents parce que je les aime

Dédi à tous mes fillots (jvous aime fort)

Dédi à VOUS +++++ parce que quand même vous êtes arrivés à la fin de cette fiche, c'est pas un cours facile mais vous allez y arriver !!! Parce que je crois en vous et tout le tut est derrière vous 💕