SDA BIOSTATS

BASES D'ALGÈBRE LINÉAIRE POUR LA MODÉLISATION EN SANTÉ

Sommaire ?

Matrices

ACP

QRUs

Vos questions

Continuer

BIOSTAT ORIGINAL

Matrices

Une matrice est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes : A (n, p) c'est par exemple la donnée de n individus mesurés selon p variables (p≥1).

Point tut': Une matrice A (n,p) est un tableau à np éléments.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

avec ($a_{i,j}$) coefficients de la matrice

$1 \leq i \leq n$

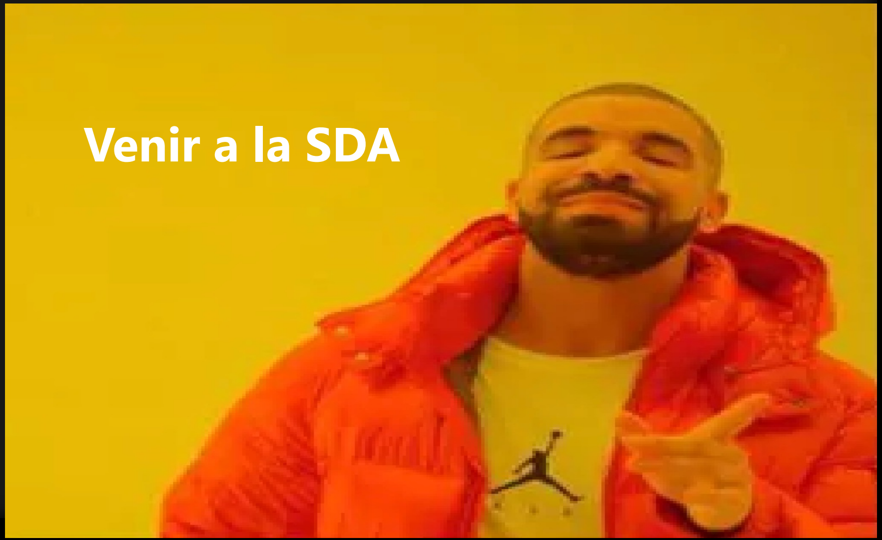
$1 \leq j \leq p$

VOCABULAIRE

Si p = 1, on parle de matrice univariée (=matrice colonne). $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

Si p ≥ 2, on parle de matrice multivariée. Ex : $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 11 \\ 33 & 5 \end{pmatrix}$

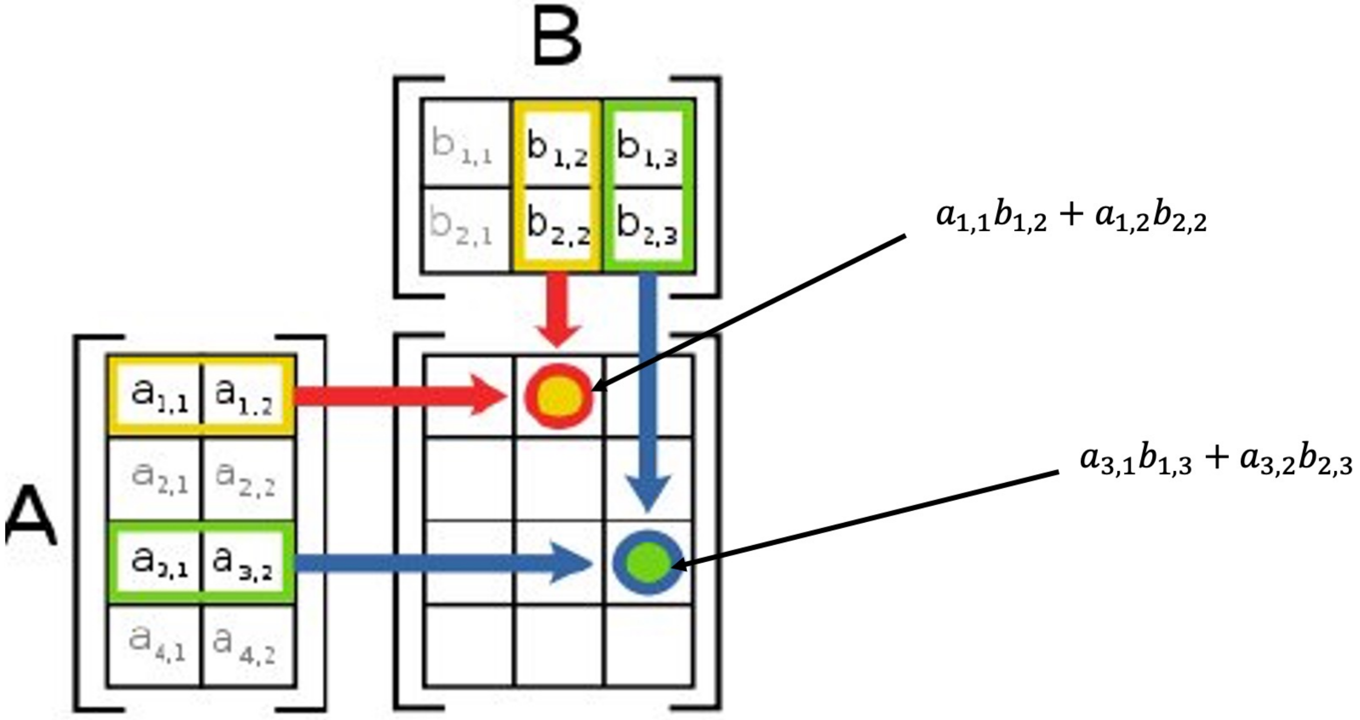
Si n=p, on parle de matrice carrée d'ordre n, cette matrice a autant de lignes (n) que de colonnes (p=n). Ex : C = $\begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.



PRODUIT DE 2 MATRICES

On y gooooooo

<u>Pour calculer le **produit**</u> de deux matrices A et B, il faut que le nombre de lignes de la deuxième matrice soit égale au nombre de colonnes de la première matrice. Ainsi A(n,p)*B(p, m) = C(n, m)



EXEMPLES

Oui oui on travail

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,

Calculer BA

Calculer AB

EXEMPLES

Oui oui on travail

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,

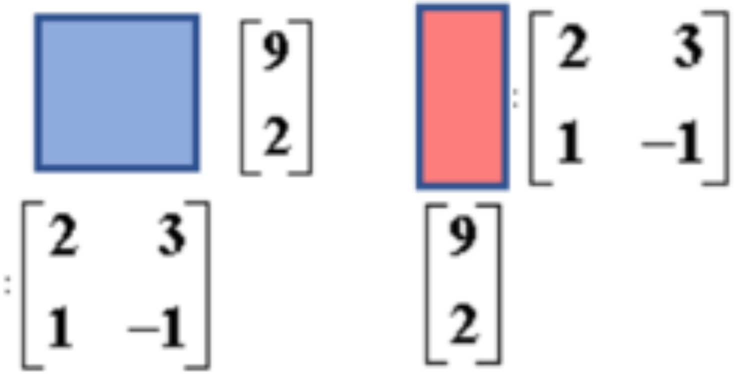
- Calculer BA

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,

Calculer AB

Calculer BA est **IMPOSSIBLE**

<u>Pour calculer le **produit**</u> de deux matrices A et B, il faut que le nombre de lignes de la deuxième matrice soit égale au nombre de colonnes de la première matrice. Ainsi A(n,p)*B(p, m) = C(n, m)



EXEMPLES

Oui oui on travail

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,

- Calculer AB

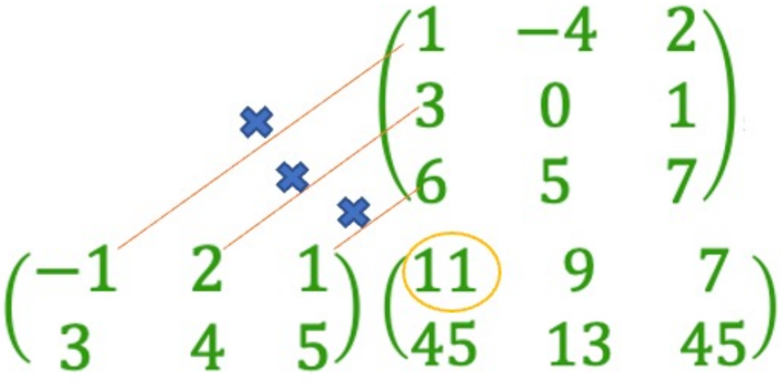
EXEMPLES

Oui oui on travail

- Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, on a $AB = C = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 7 \\ 45 & 13 & 45 \end{pmatrix}$.

- On remarque qu'on peut calculer AB **mais pas BA**. Pour trouver AB, on a calculé les coefficients un à un :

  - $C_{1,1} = (-1)\times1 + 2\times3 + 1\times6 = 11$
  - $C_{1,2} = (-1)\times(-4) + 2\times0 + 1\times5 = 9$
  - $C_{1,3} = (-1)\times2 + 2\times1 + 1\times7 = 7$
  - $C_{2,1} = 3\times1 + 4\times3 + 5\times6 = 45$
  - $C_{2,2} = 3\times(-4) + 4\times0 + 5\times5 = 13$
  - $C_{2,3} = 3\times2 + 4\times1 + 5\times7 = 45$



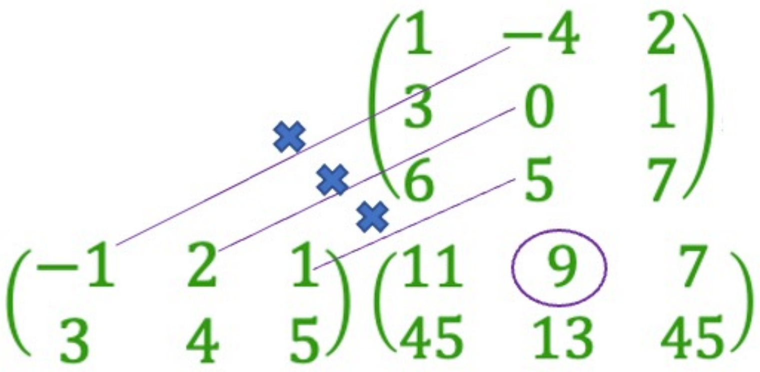
EXEMPLES

Oui oui on travail

- Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, on a $AB = C = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 7 \\ 45 & 13 & 45 \end{pmatrix}$.

- On remarque qu'on peut calculer AB **mais pas BA**. Pour trouver AB, on a calculé les coefficients un à un :

  - $C_{1,1} = (-1)\times 1 + 2\times 3 + 1\times 6 = 11$
  - $C_{1,2} = (-1)\times(-4) + 2\times 0 + 1\times 5 = 9$
  - $C_{1,3} = (-1)\times 2 + 2\times 1 + 1\times 7 = 7$
  - $C_{2,1} = 3\times 1 + 4\times 3 + 5\times 6 = 45$
  - $C_{2,2} = 3\times(-4) + 4\times 0 + 5\times 5 = 13$
  - $C_{2,3} = 3\times 2 + 4\times 1 + 5\times 7 = 45$



MATRICES QUI COMMUTENT

Vive les matrices

Dans le cas général, le produit de matrice AB est différent de BA. Il se peut même que l'un des produits n'existe pas. Dans l'exemple précédent, le produit BA n'est pas possible car le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de A.

⇨ Si AB = BA on dit que les **matrices commutent +++**

FORMULES DE MATRICES

Vive les matrices

Avec : A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$et B=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

A+B =$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. 3A = $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

Les **puissances** d’une matrice n’existent que pour des **matrices carrées**, en effet pour effectuer un produit de matrices il faut que le nombre de lignes de la deuxième matrice soit égale au nombre de colonnes de la première matrice, or dans ce cas B=A et donc n=p.

Ex : On peut calculer $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}^2$ mais pas $\cancel{D = \begin{pmatrix} 43 \\ 57 \end{pmatrix}^2}$

A =

Les **puissances** d’une matrice n’existent que pour des **matrices carrées**, en effet pour effectuer un produit de matrices il faut que le nombre de lignes de la deuxième matrice soit égale au nombre de colonnes de la première matrice, or dans ce cas B=A et donc n=p.

Ex : On peut calculer $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}^2$ mais pas $\cancel{D = \begin{pmatrix} 43 \\ 57 \end{pmatrix}^2}$

$$A = \begin{pmatrix} 28 & 36 \\ 54 & 73 \end{pmatrix}$$

TRANSPOSÉE

La **transposée** d'une matrice revient à présenter l'information qui est en colonnes en lignes. Ainsi la transposée de A(n,p), notée ${}^tA$ est une matrice à p lignes et n colonnes. Autrement dit, on s'intéresse à p variables déclinées selon n individus. ${}^tA$ s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Ex : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors on a ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Point tut' : La transposée d'une matrice existe toujours.

TRANSPOSÉE

Lorsque l'on effectue le **produit ${}^tA.A$**, on obtient une **matrice carrée d'ordre p**, qui est une matrice **symétrique** (par rapport à la diagonale qui part du coefficient en haut à gauche de la matrice).

Ex : $\begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{pmatrix}$ est symétrique (de chaque côté de cette diagonale)

Quelle est la transposée de $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$?

TRANSPOSÉE

Lorsque l'on effectue le **produit $^{t}A.A$**, on obtient une **matrice carrée d'ordre p**, qui est une matrice **symétrique** (par rapport à la diagonale qui part du coefficient en haut à gauche de la matrice).

Ex : $\begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{pmatrix}$ est symétrique (de chaque côté de cette diagonale)

Quelle est la transposée de $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$? $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

NILPOTENTE

Une matrice est dite **nilpotente** d'ordre n lorsque $A^n=0$ et $A^{n-1}\neq 0$. Une matrice est nilpotente lorsqu'il existe une puissance pour laquelle cette matrice est égale à la matrice nulle.

- Ex : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

INVERSE

L'**inverse** d'une matrice n'existe que pour des **matrices carrées** sous conditions (**$\det A \neq 0$**), il est défini comme A^{-1} tel que $\mathbf{AA^{-1}=I}$ où I est la matrice identité c'est-à-dire avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1 et tous les autres coefficients nuls. Le déterminant sera utile pour calculer l'inverse.

Ex : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3

Point tut' : La transposée d'une matrice inversible est toujours inversible.

DÉTERMINANT

Le **déterminant** d'une matrice (det A) est donné par la formule suivante :

- $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

- Ex : $det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2$

$\det\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ =

DÉTERMINANT

Le **déterminant** d'une matrice (det A) est donné par la formule suivante :

- $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

• Ex : $det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\times4 - 2\times3 = -2$

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 5\times8 - 10\times7 = -30$$

DÉTERMINANT

- $$det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a\times det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b\times det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c\times det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

- Ex :

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= 1\times det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2\times det\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3\times det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 1\times(5\times9 - 6\times8) - 2\times(4\times9 - 6\times7) + 3\times(4\times8 - 5\times7) \\ &= -3 + 12 - 9 = 0 \end{aligned}$$

Pour la matrice 3x3, pas la peine de retenir la formule, retenez visuellement.

DÉTERMINANT

$$\text{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a*\text{Det}\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b*\text{Det}\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c*\text{Det}\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}.$$

Grace au système de couleurs on peut visualiser :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Ça nous donne donc :

$$\text{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a\,(ei - fh) - b\,(di - fg) + c\,(dh - eg)$$

CALCUL DE L'INVERSE

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, une matrice carrée d'ordre 2 :

  - Si det(A)≠0, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$

A^{-1} =

CALCUL DE L'INVERSE

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, une matrice carrée d'ordre 2 :
  - Si det(A)≠0, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\times4 - 2\times3 = -2.$

$A^{-1} = -\frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

MATRICES DIAGONALES

- Une matrice carrée est dite **diagonale** lorsque ses coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls. Les coefficients de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls.

- Toute <u>puissance d'une matrice diagonale</u> est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les puissances des coefficients diagonaux de la matrice de départ.

Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A^n = \begin{pmatrix} 8^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

MATRICES DIAGONALES

Dans le cas d'une matrice diagonale inversible, les éléments diagonaux de l'inverse sont les inverses des éléments de la matrice. Sachant qu'une matrice diagonale est inversible si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

- Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

MATRICES DIAGONALES

Toujours pour une matrice diagonale inversible : $(A^n)^{-1} = (A^{-1})n$, soit :
« l'inverse de la puissance est égal à la puissance de l'inverse ».

Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8^n & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Toute matrice diagonale commute avec n'importe quelle de ses puissances, et leur inverse. De manière plus générale, toute matrice diagonale commute avec toute autre matrice diagonale.

QCM 1

Soient A et B deux matrices carrées d’ordre n. Quelle est la proposition exacte parmi les suivantes ?

A) Ces deux matrices commutent

B) Le produit de AB et le produit de BA existent car ces matrices ont les mêmes dimensions

C) AB = BA

D)On ne peut pas calculer les puissances de matrices carrées
E)Les propositions A, B, C et D sont fausses

QCM 1

Soient A et B deux matrices carrées d’ordre n. Quelle est la proposition exacte parmi les suivantes ?

A) Ces deux matrices commutent

B) Le produit de AB et le produit de BA existent car ces matrices ont les mêmes dimensions

C) AB = BA

D)On ne peut pas calculer les puissances de matrices carrées

E)Les propositions A, B, C et D sont fausses

QCM 2

À propos des matrices, quelles sont les propositions exactes :

A) A et B commutent si AB=I
B) La transposée d'une matrice rectangulaire n'existe pas
C) Une matrice est un tableau à n lignes et p colonnes
D) Si p>2, on parle de matrice univariée
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QCM 2

À propos des matrices, quelles sont les propositions exactes :

A) A et B commutent si AB=I
B) La transposée d'une matrice rectangulaire n'existe pas
C) Une matrice est un tableau à n lignes et p colonnes
D) Si p>2, on parle de matrice univariée
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses