ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I. Définitions

Une **équation différentielle** est une équation dont la solution est une fonction.
Par exemple, dans l'équation 5y'+3y = 2 on cherche quelle est la fonction qui vérifie cette équation.
Généralement, il y a plusieurs solutions à chaque équation.
Une équation différentielle relie une fonction et ses dérivées successives (y', y'', y''',…)

Les solutions d'une équation différentielle sont appelées le **flot**.

II. Équation différentielle du premier ordre

Une équation différentielle est du premier ordre si la fonction y est dérivée une seule fois

1. ED 1 sans second membre

Une ED 1 sans second membre est de la forme y'+ay = 0.

Une ED 1 sans second membre à **toujours** une solution. Cette équation a notamment comme solution évidente y=0

Une solution de l'équation différentielle y' = ay est $\boldsymbol{Ce^{ax}}$
Avec C une constante qu'on ne cherche pas à calculer

/!\ Une solution de l'ED y'+ay = 0 est Ce^{-ax}. Attention aux signes des solutions

Exemple : 5y'+3y = 0

1. On met sous la forme y' = ay. 5y' = -3y
2. On trouve a. y' = $-\frac{3}{5}$ y donc a = $-\frac{3}{5}$
3. On remplace a dans la formule $Ce^{-\frac{3}{5}x}$

2. ED 1 avec second membre

Une ED1 avec second membre est de la forme y'+ay = b
On dit que cette équation est avec second membre car b n'est pas lié à la fonction y ou à une de ses dérivées

Une ED 1 avec second membre a toujours une solution notamment $y_0 = -\frac{b}{a}$

Une solution de l'équation différentielle y' = ay + b est $\boldsymbol{Ce^{ax} - \frac{b}{a}}$
C'est la somme de l'équation sans second membre et d'une solution particulière $y_0 = -\frac{b}{a}$

Exemple : 2y' + 6y = 4

1. On met sous la forme y' = ay + b. 2y' = - 6y + 4
2. On trouve a et b. y' = -3y + 2 donc a = -3 et b = 2
3. On remplace dans la formule $Ce^{-3x} + \frac{2}{3}$

III. Équations différentielles du second ordre

Une équation différentielle est du second ordre si y est dérivé 2 fois (y'')

1. <u>ED homogène (sans second membre)</u>

Une ED 2 homogène est de la forme ay'' + by' + cy = 0

On associe cette équation à un polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c = 0$
On peut calculer son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

a. Δ>0

On calcul les racines du polynôme $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Les solutions sont de la forme $C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

Attention à ne pas confondre c du polynôme caractéristique et C les constantes de la solution

Exemple : 2y'' + 4y' + y = 0. On considère $\sqrt{8}$ = 3 (pour simplifier les calculs)

1. On calcul Δ = 16 – 4*2*1 = 8
2. On calcul les racines $r_1 = \frac{-4+\sqrt{8}}{2*2} = -\frac{1}{4}$ $r_2 = = \frac{-4-\sqrt{8}}{2*2} = -\frac{7}{4}$
3. On remplace dans la formule : $C_1e^{-\frac{1}{4}x} + C_2e^{-\frac{7}{4}x}$

b. Δ = 0

On calcul la racine du polynôme $\frac{-b}{2a}$

Les solutions sont de la forme $(C_1x + C_2)e^{rx}$

Exemple : 2y'' + 4y' + 2y = 0

1. On calcul Δ = 16 – 4*2*2 = 0
2. On calcul la racine $r = \frac{-4}{2*2} = -1$
3. On remplace dans la formule : $(C_1x + C_2)e^{-x}$

c. $\Delta < 0$

On calcul les 2 racines complexes conjuguées $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
On trouve alors 2 racines complexes conjuguées r ± iw

<u>Point tut</u> : dans la formule, on met i $\sqrt{-\Delta}$ car on ne peut pas prendre la racine de quelque chose de négatif. On prend donc la racine de -Δ (>0) et on rajoute i (un nombre complexe) pour signifier que $\sqrt{-\Delta}$ qu'on a calculé n'existe pas réellement.

Les solutions sont de la forme $(C_1\sin(wx) + C_2\cos(wx))e^{rx}$

Exemple : 2y'' + 4y' + 6y = 0. On considère $\sqrt{32}$ = 6

1. On calcul Δ = 16 – 48 = - 32
2. On calcul les racines composées $r_{1\text{ et }2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{32}}{2*2}$ = -1 ± i $\frac{3}{2}$
3. On trouve r et w. Ici r = -1 et w = $\frac{3}{2}$
4. On remplace dans la formule : $(C_1\sin(\frac{3}{2}x) + C_2\cos(\frac{3}{2}x))e^{-x}$