Probabilités Conditionnelles

RAPPELS

- **Ω Ensemble fondamental, l'univers** : P(Ω) = 1, cela représente 100% des évènements, la probabilité est certaine.

- **P(A)** : Probabilité de l'évènement A.

- **P(Ā) ou P(CA)** : Probabilité de l'évènement contraire de A, donc de ne pas avoir A. On peut aussi dire que Ā c'est l'univers moins A.

Donc P(Ā) = P(Ω) – P(A) = 1 – P(A)

- **P(A∩B)=P(B∩A)** : Probabilité de A et B = Probabilité de B et A (c'est pareil) ou probabilité de A inter B (intersection des évènements A et B).

I. PROBABILITES CONDITIONNELLES :

A. Définition :

Une **probabilité conditionnelle** s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un évènement A à condition qu'un autre évènement B ait déjà été réalisé.

Autrement dit dans un univers Ω, on va définir deux évènements A et B. On va donc s'intéresser à ce que devient la probabilité de A lorsqu'on apprend que B s'est déjà réalisé. Ainsi on s'intéresse seulement à la réalisation de l'évènement A parmi les évènements B réalisés et non plus parmi tout l'univers. On cherche à savoir quelle est la probabilité que A se réalise une fois que B est réalisé.

Attention :

- Il faut bien faire la différence entre **l'intersection** (A∩B) où on regarde sur tout l'univers, et la **proba conditionnelle** où on s'intéresse à A au sein de B : La probabilité conditionnelle est une proportion de sujets présentant A parmi les sujets présentant B, alors que la probabilité d'une intersection est la proportion de tous les sujets qui présentant à la fois A et B en même temps

- Dans cette équation, les probabilités des évènements A∩B et B doivent être calculées sur **tout l'ensemble fondamental Ω**, comme si on ne savait pas que B s'est déjà réalisé. Sinon on obtiendrait P(B)=1

Formule de la probabilité conditionnelle :

$$P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ et } P(B\backslash A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

B. Théorème de la multiplication :

Si on reprend la formule de la probabilité conditionnelle, à savoir $P(A\backslash B) = P(A\cap B) / P(B)$, on en déduit que :

$$P(A \cap B) = P(A\backslash B) \times P(B) = P(B\backslash A) \times P(A)$$

Ça c'est la formule utilisée quand on étudie deux évènements. Néanmoins on peut **généraliser** cette égalité pour n évènements :

$$P(A1 \cap A2 \ldots \cap An) = P(A1) \times P(A2\backslash A1) \ldots \times P(An\backslash A1 \cap A2 \ldots \cap An-1)$$

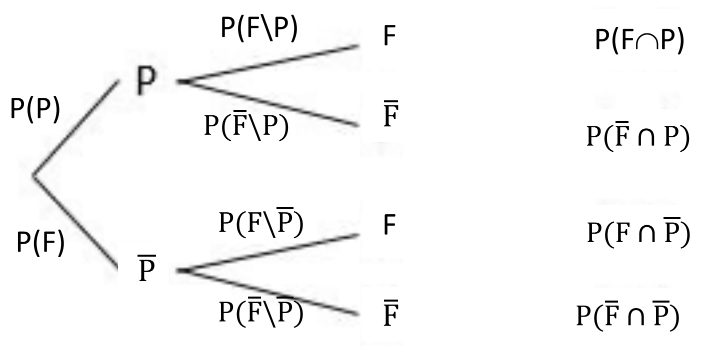
II. DIAGRAMME EN ARBRE :

On considère une séquence finie d'expériences dont chacune d'entre elles a un nombre fini de résultats possibles.

Les probabilités associées aux résultats possibles d'une expérience **dépendent du résultat de l'expérience précédente** : il s'agit de probabilités conditionnelles.

Pour représenter cette séquence, on utilise une représentation « **en arbre** », le **théorème des multiplications** permet de calculer la probabilité de chaque feuille de l'arbre.

Lecture d'un arbre :



Propriétés :

- La probabilité qu'un chemin particulier de l'arbre se réalise est, d'après le théorème de la multiplication, **le produit des probabilités de chaque branche du chemin**
- Les chemins **s'excluent mutuellement**
- La somme des finalités des probabilités de toutes les finalités doit être **égale à 1**

IV. FORMULE ET THEOREME DE BAYES :

A. Formule de Bayes :

Pour comprendre d'où vient cette formule, il faut reprendre la formule de la probabilité conditionnelle ainsi que le théorème de la multiplication :

Probabilité conditionnelle : $\mathbf{P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$ $\mathbf{P(B \backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$
Théorème de la multiplication : $\mathbf{P(A \cap B) = P(A \backslash B) \times P(B) = P(B \backslash A) \times P(A)}$

Ça nous donne la formule de Bayes :
(c'est une continuation des deux théorèmes vus avant)

$$P(B \backslash A) = \frac{P(A \backslash B) \times P(B)}{P(A)}$$

$$P(A \backslash B) = \frac{P(B \backslash A) \times P(A)}{P(B)}$$

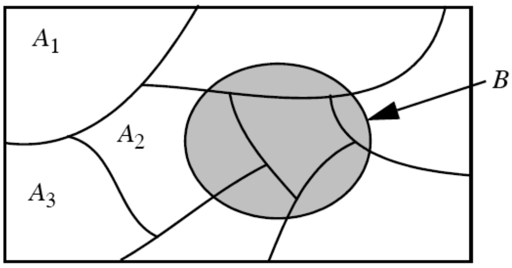
B. Théorème de Bayes :

Soit un univers Ω formé par un ensemble d'évènements de A1 à An. On dit que cet ensemble d'évènements de A1 à An constitue une **partition de Ω**. L'ensemble d'évènements de A1 à An dont l'union forme Ω. C'est une illustration du théorème des probabilités totales.

Une partition de Ω est une subdivision de Ω en sous-ensembles disjoints dont la réunion forme Ω. Par définition les Ai s'excluent mutuellement et leur union est Ω :

$$\bigcup_{i=1}^{n} Ai = \Omega$$

On considère un évènement B tel que :



Pour chaque A en appliquant la formule de Bayes, on a :

$$P(Ai\backslash B) = \frac{P(B \cap Ai)}{P(B)} = \frac{P(B\backslash Ai) \times P(A)}{P(B)}$$

Ça, c'est si on a qu'un seul A. mais si on **généralise** à ce que donne la formule pour plusieurs évènements Ai, on obtient

$$P(Ai\backslash B) = \frac{P(B\backslash Ai) \times P(Ai)}{\sum_{i=1}^{n} P(B\backslash Ai)P(Ai)}$$

En médecine, le théorème de bayes est utilisé pour résoudre les **problèmes d'aide au diagnostic**. Considérons en effet qu'un patient se **symptôme B (donc évènement B),** avant tout examen complémentaire, un certain nombre de diagnostics peuvent être évoqués, se manifestant tous par le même symptôme B. **Ces différents diagnostics forment la série d'évènements Ai**. On suppose que tous ces diagnostics ne peuvent pas survenir en même temps (ils sont **incompatibles**)
Les seules informations que l'on connait sont les probabilités d'avoir le signe sachant qu'on a telle maladie (P(B\Ai)). Le problème du diagnostic est donc le suivant : **quelle est la probabilité d'avoir la maladie Ai sachant qu'on présente le signe B ?**

V. EVENEMENTS INDEPENDANTS :

A. Introduction :

<u>**Définition**</u> : Deux évènements sont **indépendants si P(B ∩ A) = P(A)x P(B).** Les évènements sont indépendants dans la mesure où la **probabilité de réalisation de A ne change pas avec la réalisation de B.**

Soit P(A|B) = P(A) et P(B|A) = P(B)

Autrement dit l'apparition d'un des deux évènements n'influe pas sur l'apparition de l'autre.

Conséquences :

- A et $\bar{B}$ sont indépendants
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants
- $\bar{A}$ et B sont indépendants

Généralisation

On considère maintenant 3 évènements A, B, et C. Ils seront indépendants si :

- Ils sont **indépendants deux à deux** (A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B)
- Si **P(A ∩ B ∩ C) = P(A) x P(B) x P(C)**

Remarque : La seconde condition n'est pas une conséquence de la première. C'est-à-dire que les trois évènements peuvent être indépendants deux à deux, mais on peut avoir : $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)$ et du coup A, B, et C ne sont pas indépendants.

B. Indépendance et inclusion :

Définition : A⊂B : A est inclus dans B donc P(A ∩ B) = P(A)

En appliquant la formule de Bayes on obtient :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$$

Et

$$\mathrm{P}(\mathrm{B} \backslash \mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = 1$$

Remarque : on a $P(A \cap B) = P(B|A).P(A)$ avec la proba de B sachant A égale à 1, car A étant inclus dans B on est certain d'avoir B !

⚠️ **A et B ne sont PAS indépendants** ⚠️

C. Indépendance et exclusion :

Définition : A ∩ B = ∅ ; P(A ∩ B) = 0 : A et B sont **exclusifs, disjoints, incompatibles** (attention aux synonymes 🤪), donc **P(A|B) = P(B|A) = 0**.

⚠️ **A et B ne sont PAS indépendants** ⚠️

Attention : il ne faut pas confondre les évènements **incompatibles** et évènements **indépendants**.

➔ **Les évènements incompatibles** ne font pas intervenir leur probabilité. Ils ne peuvent pas se réaliser en même temps. Pour rappel, ils sont caractérisés par la relation :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

➔ **Les évènements indépendants** sont liés à leur probabilité. Les deux peuvent se produire en même temps mais la réalisation de l'un n'a aucune incidence sur la réalisation de l'autre. Ils sont caractérisés par la relation :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$